Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 24-37
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511429

Hans汉斯

双重介质部分射开井压力动态模型的统一构造解法

蔡雯雯*，李　伟

西华大学理学院，四川　成都

收稿日期：2026年10月4日；录用日期：2026年10月28日；发布日期：2026年11月4日

摘　要

裂缝性碳酸盐岩储层天然裂缝发育、厚度大，而生产井射开段一般仅几米，研究其部分射开井压力解具有重要意义。为此，本文建立双重介质油藏部分射开井渗流模型：径向外边界可取定压、封闭或无穷大三种，垂向边界由四种Dirichlet-Neumann组合构成；径向边界决定三类贝塞尔型相似核函数，垂向边界决定对应的Sturm-Liouville特征函数、特征值与归一化因子。本文首次将相似构造法引入该模型，通过Laplace变换与有限Fourier正余弦变换，将渗流偏微分方程化为二阶常微分方程边值问题，进而以两个线性无关解为基础构造相似核函数，并利用边界条件确定其中的待定系数，从而建立适用于各边界组合的统一解析框架，实现全部工况在Laplace空间下解析解的统一表达。

关键词

部分射开井，双重介质，Laplace-Fourier变换，相似构造法

A Unified Constructive Solution for the Pressure-Transient Model of Partially Penetrating Wells in Dual-Porosity Reservoirs

Wenwen Cai*, Wei Li

College of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: October 4, 2026; accepted: October 28, 2026; published: November 4, 2026

*通讯作者。

文章引用: 蔡雯雯, 李伟. 双重介质部分射开井压力动态模型的统一构造解法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 24-37.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511429

Abstract

Fractured carbonate reservoirs are characterized by well-developed natural fractures and large formation thickness, whereas the perforated intervals of production wells are generally only a few meters long. Therefore, investigating the pressure solutions for partially penetrating wells in such reservoirs is of considerable significance. To this end, a dual-porosity reservoir flow model for partially penetrating wells is established in this paper: the radial outer boundary may be of constant-pressure, no-flow, or infinite type, while the vertical boundaries consist of four Dirichlet-Neumann combinations. The radial boundary determines three types of Bessel-type similarity kernel functions, and the vertical boundary determines the corresponding Sturm-Liouville eigenfunctions, eigenvalues, and normalization factors. For the first time, the similarity construction method is introduced into this model. By applying the Laplace transform and the finite Fourier sine and cosine transforms, the seepage partial differential equation is reduced to a boundary-value problem for a second-order ordinary differential equation; the similarity kernel function is then constructed from two linearly independent solutions, with the undetermined coefficients determined by the boundary conditions. In this way, a unified analytical framework applicable to all boundary combinations is established, yielding a unified expression of the analytical solutions in the Laplace domain for all cases.

Keywords

Partially Penetrating Well, Dual-Porosity Reservoir, Laplace-Fourier Transform, Similarity Construction Method

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

天然裂缝性碳酸盐岩储层广泛分布于中东、四川盆地、塔里木盆地等地，由高孔低渗的基质岩块与低孔高渗的裂缝系统构成，双重介质模型是描述其渗流规律的基本工具[1]。实际生产中，因储层厚度大、隔夹层发育，直井常仅射开有限厚度形成部分射开井；与完全射开井相比，流体在射孔段附近发生垂向汇流，压力响应同时受径向与垂向边界条件影响[2]，边界组合多、求解难度大，故开展双重介质部分射开井压力动态研究具有明确工程意义。

国内外已有许多学者研究了均质油藏的部分射开问题。国外学者早在 1999 年，Cassiani G [3]等针对各向异性含水层中具有无穷小表皮的部分射开井混合边界问题，提出了一种新的半解析解方法。Bui T D [4] (2000)等，Karim Slimani K [5] (2006)等和 Biryukov D [6] (2015)都利用积分变换推导了部分射开井模型的解析解。Posadas M [7]等(2019)基于分形理论建立了部分射开井解析渗流模型，利用分数阶微积分推导了解，并为分形介质中的试井分析提供了新的理论模型。国内学者王建平[8]等(2007)，董文秀[9] (2016)，刘海龙[10]等(2016)都建立了部分射开直井的典型物理模型与数学模型，并利用积分变换法获得了模型的解析解，为试井分析提供了理论依据。

对于双重介质油藏绝大多数学者都是考虑完全射开的情况，但也有少数学者研究部分射开井。国外早在 1960 年，Barenblatta 提出了双重介质油藏的概念，随后 Warren J E [11] (1963)建立双重孔隙理想模型，假定基质裂缝为准稳态窜流，采用解析方法求解非稳态渗流方程，获得渐近解析解。Ozkan E [12]等

(1991)，Unsal E [13]等(2010)都建立了双重介质油藏模型并利用拉普拉斯变换推导点源解。Killough J E [14]等(2016)采用摄动变换、拉普拉斯变换推导拉氏空间解，结合镜像原理、叠加原理，再经 Stehfest 数值反演与摄动逆变换得到半解析解。国内早在 1981 年，刘慈群[15]就系统研究了双重介质非线性渗流模型，随后刘慈群[16]在 1991 年，1993 年研究双重介质二维不定常渗流，并利用积分变换与数值反演求得模型解析解。陈方方[17]等(2008)建立了双重介质油藏部分射开模型，并采用积分变换和分离变量法对数学模型进行求解。李秀军[18] (2009)，张艳玉[19]等(2012)，刘海龙[20] (2019)均建立了双重介质油藏渗流模型，数学变换方法和数值反演等求得该模型在实数域数值解。

综合已有文献，双重介质油藏中部分射开井的解析研究主要存在两点不足。其一是边界组合形式多：部分射开井的径向外边界有定压、封闭、无穷大三种，垂向顶底边界有 D-D、D-N、N-D、N-N 四种，合计 12 种；传统解析方法需要对每一种工况单独建立求解过程，推导工作量大。其二是缺乏统一表达：不同边界工况下得到的解式在形式上往往不一致，不利于对比与工程应用。

为解决上述问题，本文将相似构造法引入双重介质油藏部分射开井的瞬态渗流问题。相似构造法(similarity construction method)源于李顺初及其合作者关于微分方程边值问题解的相似结构的系列工作：贾闽惠和李顺初[21] (2005)最早揭示了 Bessel 方程边值问题解的相似结构，李顺初、伊良忠和郑鹏社[22] (2006)将其推广到一般二阶微分方程定解问题，其后李顺初[23] [24] (2010, 2015)将其凝练为系统的相似构造法。

与传统解析方法相比，二者均以 Laplace 变换与有限 Fourier 变换降阶，最终归结为求解修正 Bessel 方程边值问题。不同在于：传统方法对每种径向垂向边界组合都需重新代入边界条件、确定积分常数，12 种工况对应 12 套独立推导，得到 12 个形式各异的孤立解；而相似构造法将求解一次完成、多次复用，基本解与方程本身绑定，边界影响全部压缩进相似核函数的查表替换，最终归结为一个统一解式，既避免重复推导，又便于试井软件快速实现多工况计算。

本文将该方法推广到双重介质与部分射开井的组合问题：首先通过 Laplace 变换和有限 Fourier 变换将三维渗流偏微分方程降阶为修正 Bessel 形式的二阶常微分边值问题，然后利用相似构造法将径向边界抽象为三类相似核函数，将垂向边界抽象为 Sturm-Liouville 特征函数系统，从而在统一的 Laplace 域框架下得到 12 种边界工况的压力解。

2. 双重介质油藏部分射开井物理模型与数学模型

2.1. 物理模型

双重介质油藏是存在天然裂缝的油藏，这类油藏类型在实际分析中由基质岩块介质和裂缝介质组成，介质之间的分布相互均匀，其顶、底边界为定压或封闭边界，并做如下假设：(1) 单相微可压缩地层流体且流动满足达西定律；(2) 地层水平等厚，油井以定产量生产且从基质岩块流向裂缝介质；(3) 测试前地层 $r > r_w$ 范围内地层各处压力为原始油藏压力 p_i；(4) 考虑井筒储集效应和表皮效应的影响，忽略重力和双孔介质各向异性的影响；(5) 油井射开段厚度为 $z_a - z_b$，流体只从有限厚度流入井筒如图所示(见图 1)；(6) 裂缝基质和岩块基质的压缩系数为 C_f 和 C_m。

2.2. 数学模型

在上述假设下，双重介质油藏三维非稳态渗流的控制方程组为：

$$\begin{cases} \text{裂缝方程}: k_{fr}\left(\dfrac{\partial^2 P_f}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P_f}{\partial r}\right)+k_{fh}\dfrac{\partial^2 P_f}{\partial z^2}+\alpha_m k_{mr}\left(p_m-p_f\right)=\dfrac{\phi_f C_f \mu}{3.6}\dfrac{\partial P_f}{\partial t} \\ \text{基质方程}: -\alpha_m k_{mr}\left(P_m-P_f\right)=\dfrac{\phi_m C_m \mu}{3.6}\dfrac{\partial P_m}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

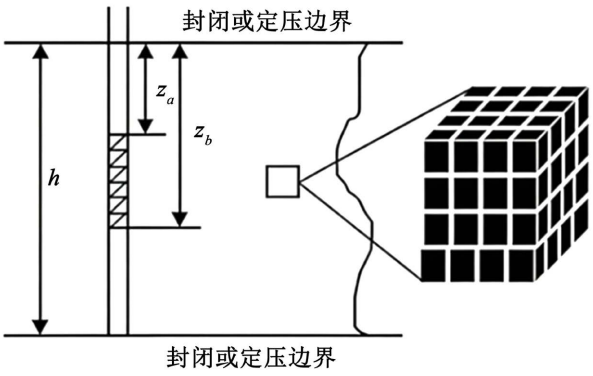


Figure 1. Schematic of the partially penetrating well model in dual-porosity reservoirs
图 1. 双重介质油藏中部分射开井模型示意图

引入如下无量纲变量：

$$P_{jD}=\frac{2\pi k_{fr}h}{Bq\mu}\left(P_i-P_j\right)\quad (j=m,f)\qquad t_D=\frac{3.6k_{fr}t}{\left(\phi_m C_m+\phi_f C_f\right)\mu r_w^2}$$
$$\omega_j=\frac{\phi_j C_j}{\phi_m C_m+\phi_f C_f}\qquad \lambda_m=\alpha_m\frac{k_{mr}}{k_{fr}}r_w^2\qquad r_D=\frac{r}{r_w}\qquad R_D=\frac{R}{r_w},\tag{2}$$
$$z_D=\frac{z}{r_w}\sqrt{\frac{k_{fr}}{k_{fh}}}\qquad h_D=\frac{h}{r_w}\sqrt{\frac{k_{ft}}{k_{fh}}}\qquad L_D=\frac{z_{bD}-z_{aD}}{h_D}$$

将上述变量代入方程(1)，得无量纲控制方程组：

$$\begin{cases}\text{裂缝方程}:\dfrac{\partial^2 P_{fD}}{\partial r_D^2}+\dfrac{1}{r_D}\dfrac{\partial P_{fD}}{\partial r_D}+\dfrac{\partial^2 P_{fD}}{\partial z_D^2}+\lambda_m\left(P_{mD}-P_{fD}\right)=\omega_f\dfrac{\partial P_{fD}}{\partial t_D}\\ \text{基质方程}:-\lambda_m\left(P_{mD}-P_{fD}\right)=\omega_m\dfrac{\partial P_{mD}}{\partial t_D}\end{cases}\tag{3}$$

初始条件：

$$P_{jD}\left(r_D,z_D,0\right)=0\quad (j=m,f)\tag{4}$$

三个水平外边界条件是互斥的，记为：

$$\mathcal{B}_r P_D=0\tag{5}$$

其中：

$$\mathcal{B}_r P_D=\begin{cases}P_{jD}\left(R_D,z_D,t_D\right), & \text{定压边界}\\ \left.\dfrac{\partial P_{jD}}{\partial r_D}\right|_{r_D=R_D}, & \text{封闭边界}\\ P_{jD}\left(\infty,z_D,t_D\right), & \text{无穷大边界}\end{cases}\tag{6}$$

顶、底边界条件：

$$\left.P_{jD}\right|_{z_D=0,h_D}=0\quad \text{或}\quad \left.\frac{\partial P_{jD}}{\partial z_D}\right|_{z_D=0,h_D}=0\quad (j=m,f)\tag{7}$$

井筒内边界条件：

$$\left.\frac{\partial P_{fD}}{\partial r_D}\right|_{r_D=1}=\begin{cases}-\dfrac{1}{L_D}, & z_{aD}\le z_D\le z_{bD}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{8}$$

3. 模型求解

对(3)~(8)式作如下关于 t_D 的 Laplace 变换：

$$\bar{P}_D\left(r_D,z_D,u\right)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ut_D}P_D\left(r_D,z_D,t_D\right)\mathrm{d}t_D \tag{9}$$

其中 u 为 Laplace 变换变量。将变换后的基质方程代入到裂缝方程中消去 $\bar{P}_{mD}$，则(3)~(8)式化为如下关于空间变量 r_D, z_D 的偏微分方程边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{P}_{fD}}{\mathrm{d}r_D^2}+\dfrac{1}{r_D}\dfrac{\mathrm{d}\bar{P}_{fD}}{\mathrm{d}r_D}+\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{P}_{fD}}{\mathrm{d}z_D^2}-f\left(u\right)\bar{P}_{fD}=0\\ \left.\bar{P}_{fD}\right|_{z_D=0,h_D}=0 \quad \text{或} \quad \left.\dfrac{\mathrm{d}\bar{P}_{fD}}{\mathrm{d}z_D}\right|_{z_D=0,h_D}=0\\ \mathcal{B}_r\bar{P}_D=0\\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\bar{P}_{fD}}{\mathrm{d}r_D}\right|_{r_D=1}=\begin{cases}-\dfrac{1}{uL_D}, & z_{aD}\le z_D\le z_{bD}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\end{cases} \tag{10}$$

其中：

$$\mathcal{B}_r\bar{P}_D=\begin{cases}\bar{P}_{fD}\left(R_D,z_D,u\right), & \text{定压边界}\\ \left.\dfrac{\partial\bar{P}_{fD}}{\partial r_D}\right|_{r_D=R_D}, & \text{封闭边界}\\ \bar{P}_{fD}\left(\infty,z_D,u\right), & \text{无穷大边界}\end{cases} \tag{11}$$

$$f\left(u\right)=u\omega_f+u\frac{\lambda_m\omega_m}{\lambda_m+u\omega_m} \tag{12}$$

由于(10)式中垂向边界条件为 Dirichlet 条件或 Neumann 条件，故将垂向 Dirichlet 与 Neumann 边界条件的四种组合下的特征函数 $\delta_n\left(z_D\right)$、特征值 λ_n 与归一化因子 N_n 汇总如下(见表 1)。

Table 1. Eigenfunctions, eigenvalues, and normalization factors under different vertical boundary conditions
表 1. 不同垂向边界条件下的特征函数、特征值与归一化因子表

垂向边界条件	$\delta_n\left(z_D\right)$	λ_n	N_n
D-D	$\sin\left(\lambda_n z_D\right)$	$\lambda_n=n\pi/h_D$	$h_D/2$
N-N	$\cos\left(\lambda_n z_D\right)$	$\lambda_n=n\pi/h_D$	$N_0=h_D, N_n=h_D/2\left(n\ge1\right)$
D-N	$\sin\left(\lambda_n z_D\right)$	$\lambda_n=\left(2n-1\right)\pi/2h_D$	$h_D/2$
N-D	$\cos\left(\lambda_n z_D\right)$	$\lambda_n=\left(2n-1\right)\pi/2h_D$	$h_D/2$

结合表 1 对(10)式做如下关于 z_D 的有限 Fourier 变换：

$$\tilde{\bar{P}}\left(r_D,\lambda_n,u\right)=\int_0^{h_D}\bar{P}\left(r_D,z_D,u\right)\delta_n\left(z_D\right)\mathrm{d}z_D,\quad n=1,2,\cdots \tag{13}$$

可将(10)式化简为一个仅含 r_D 的二阶常微分方程边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{\bar{P}}_{fD}}{\mathrm{d}r_D^2}+\dfrac{1}{r_D}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\bar{P}}_{fD}}{\mathrm{d}r_D}-\beta_n^2\tilde{\bar{P}}_{fD}=0\\ \mathcal{B}_r\tilde{\bar{P}}_D=0\\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\bar{P}}_{fD}}{\mathrm{d}r_D}\right|_{r_D=1}=\dfrac{1}{uL_D}\int_{z_{bD}}^{z_{aD}}\delta_n\left(z_D\right)\mathrm{d}z_D\end{cases} \tag{14}$$

其中：

$$\beta_n=\sqrt{\lambda_n^2+f\left(u\right)},\ \mathcal{B}_r\tilde{\bar{P}}_D=\begin{cases}\tilde{\bar{P}}_{fD}\left(R_D,\lambda_n,u\right), & \text{定压边界}\\ \left.\dfrac{\partial\tilde{\bar{P}}_{fD}}{\partial r_D}\right|_{r_D=R_D}, & \text{封闭边界}\\ \tilde{\bar{P}}_{fD}\left(\infty,\lambda_n,u\right), & \text{无穷大边界}\end{cases} \tag{15}$$

观察可知，方程(14)是修正 Bessel 方程边值问题，其一般形式与附录 A 中定理 A.1 所讨论的数学中的标准边值问题完全一致，故将油藏中的渗流模型与数学中的边值问题做如下(见表 2)变量替换。

Table 2. Correspondence table of variables between the reservoir model and the standard boundary-value problem
表 2. 油藏模型与标准边值问题之间的变量对照表

标准边值问题中的符号	油藏模型中的符号	标准边值问题中的符号	油藏模型中的符号
y	$\tilde{\bar{P}}_{fD}$	D	$\dfrac{1}{uL_D}\int_{z_{bD}}^{z_{aD}}\delta_n\left(z_D\right)\mathrm{d}z_D$
x	r_D	G	1
A	β_n^2	H	0
E	0	a	1
F	0	b	R_D

由附录 A 定理 A.1 和表 2，方程(14)的解为：

$$\tilde{\bar{P}}_{fD}\left(r_D,\lambda_n,u\right)=\Phi_i\left(r_D,R_D,\beta_n\right)\cdot\frac{1}{uL_D}\int_{z_{bD}}^{z_{aD}}\delta_n\left(z_D\right)\mathrm{d}z_D,\ i\in\{D,N,\infty\} \tag{16}$$

其中 Φ_i 是由径向边界决定的相似核函数，由附录 A 给出：

$$\Phi_D\left(r_D,R_D,\beta_n\right)=-\frac{\psi_{0,0}\left(r_D,R_D,\beta_n\right)}{\beta_n\psi_{1,0}\left(1,R_D,\beta_n\right)} \tag{17}$$

$$\Phi_N\left(r_D,R_D,\beta_n\right)=-\frac{\psi_{0,1}\left(r_D,R_D,\beta_n\right)}{\beta_n\psi_{1,1}\left(1,R_D,\beta_n\right)} \tag{18}$$

$$\Phi_\infty\left(x\right)=-\frac{K_0\left(r_D\beta_n\right)}{\beta_nK_1\left(\beta_n\right)} \tag{19}$$

对(16)式关于 z_D 作有限 Fourier 逆变换，得到 Laplace 域压力解：

$$\bar{P}_{fD}\left(r_D,z_D,u\right)=\frac{1}{uL_D}\sum_{n\in\mathcal{N}}\frac{\Phi_i\left(r_D,R_D,\beta_n\right)\delta_n\left(z_D\right)}{N_n}\int_{z_{bD}}^{z_{aD}}\delta_n\mathrm{d}z_D \tag{20}$$

其中指标集 $\mathcal{N}$ 由垂向边界类型决定：N-N 时 $\mathcal{N}=\{n\mid n\geq 0\}$；D-D、D-N、N-D 时 $\mathcal{N}=\{n\mid n\geq 1\}$。

式(20)是本文的统一压力解。它将径向边界与垂向边界的影响完全解耦：径向边界由相似核函数 Φ_i 表征，垂向边界由特征函数 δ_n、特征值 λ_n、归一化因子 N_n 表征。求解具体边界组合的压力解时，只需按以下三步组装即可：

1. 查表 1：根据垂向边界组合(D-D、N-N、D-N、N-D)，查取对应的 $\delta_n\left(z_D\right)$、λ_n、N_n，确定指标集 $\mathcal{N}$；

2. 查附录 A：根据径向边界组合(定压、封闭、无穷大)，查取对应的相似核函数 Φ_i；

3. 代入式(20)：将上述两组函数代入统一解式(20)，即可得到该边界组合下的 Laplace 域压力解。

4. 不同边界条件组合下 Laplace 解的构造

4.1. 情形 1：径向 D 边界，垂向 N-N 边界

垂向参数：

$$\delta_0\left(z_D\right)=1,N_0=h_D,\delta_n\left(z_D\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{h_D}z_D\right),N_n=h_D/2 \tag{21}$$

相似核函数：

$$\Phi_D^{(0)}\left(r_D,R_D,\sqrt{f\left(u\right)}\right)=-\frac{\psi_{0,0}\left(r_D,R_D,\sqrt{f\left(u\right)}\right)}{\sqrt{f\left(u\right)}\psi_{1,0}\left(1,R_D,\sqrt{f\left(u\right)}\right)} \tag{22}$$

$$\Phi_D^{(n\geq 1)}\left(r_D,R_D,\beta_n\right)=-\frac{\psi_{0,0}\left(r_D,R_D,\beta_n\right)}{\beta_n\psi_{1,0}\left(1,R_D,\beta_n\right)} \tag{23}$$

将(21)~(23)式分别代入到(20)式中，并对其三角函数进行积分后有：

$$\begin{aligned}\bar{P}_{fD}^{(0)}&=\frac{h_D}{u}\cdot\frac{\Phi_D^{(0)}\left(r_D,R_D,\sqrt{f\left(u\right)}\right)}{h_D}\\&=-\frac{K_0\left(r_D\sqrt{f\left(u\right)}\right)I_0\left(R_D\sqrt{f\left(u\right)}\right)-I_0\left(r_D\sqrt{f\left(u\right)}\right)K_0\left(R_D\sqrt{f\left(u\right)}\right)}{u\sqrt{f\left(u\right)}\left[K_1\left(\sqrt{f\left(u\right)}\right)I_0\left(R_D\sqrt{f\left(u\right)}\right)+I_1\left(\sqrt{f\left(u\right)}\right)K_0\left(R_D\sqrt{f\left(u\right)}\right)\right]}\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\bar{P}_{fD}^{(n\geq 1)}\left(r_D,z_D,u\right)=&-\frac{2}{un\pi L_D}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi z_D}{h_D}\right)\left[\sin\left(\frac{n\pi z_{aD}}{h_D}\right)-\sin\left(\frac{n\pi z_{bD}}{h_D}\right)\right]\\&\times\frac{K_0\left(r_D\beta_n\right)I_0\left(R_D\beta_n\right)-I_0\left(r_D\beta_n\right)K_0\left(R_D\beta_n\right)}{\beta_n\left[K_1\left(\beta_n\right)I_0\left(R_D\beta_n\right)+I_1\left(\beta_n\right)K_0\left(R_D\beta_n\right)\right]}\end{aligned} \tag{25}$$

其中：

$$f\left(u\right)=u\omega_f+u\frac{\lambda_m\omega_m}{\lambda_m+u\omega_m},\beta_n=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_D}\right)^2+u\omega_f+u\frac{\lambda_m\omega_m}{\lambda_m+u\omega_m}}, \tag{26}$$

结合(24)式和(25)式可得在该边界条件下渗流模型的压力解析解为：

$$\bar{P}_{fD}\left(r_D,z_D,u\right)=\bar{P}_{fD}^{(0)}\left(r_D,z_D,u\right)+\bar{P}_{fD}^{(n\geq 1)}\left(r_D,z_D,u\right) \tag{27}$$

4.2. 情形 2：径向 D 边界，垂向 D-N 边界

垂向参数：

$$\delta_n\left(z_D\right)=\sin\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi z_D}{2h_D}\right),N_n=h_D/2, \tag{28}$$

相似核函数：

$$\Phi_D\left(r_D,R_D,\beta_n\right)=-\frac{\psi_{0,0}\left(r_D,R_D,\beta_n\right)}{\beta_n\psi_{1,0}\left(1,R_D,\beta_n\right)} \tag{29}$$

将(28)、(29)式代入到(20)式中，并对其三角函数进行积分后有：

$$\begin{aligned}\bar{P}_{fD}\left(r_D,z_D,u\right)=&-\frac{2}{uL_D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_{0,0}\left(r_D,R_D,\beta_n\right)}{\beta_n\psi_{1,0}\left(1,R_D,\beta_n\right)}\\&\times\sin\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi z_D}{2h_D}\right)\int_{z_{bD}}^{z_{aD}}\sin\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi z_D}{2h_D}\right)\mathrm{d}z_D\end{aligned} \tag{30}$$

对(30)式中三角函数积分进行解析积分后，可得到完全展开级数：

$$\begin{aligned}\bar{P}_{fD}\left(r_D,z_D,u\right)=&\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi z_{aD}}{2h_D}\right)-\cos\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi z_{bD}}{2h_D}\right)\right]\\&\times\frac{4\left[K_0\left(r_D\beta_n\right)I_0\left(R_D\beta_n\right)-I_0\left(r_D\beta_n\right)K_0\left(R_D\beta_n\right)\right]\sin\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi z_D}{2h_D}\right)}{uL_D\left(2n-1\right)\pi\beta_n\left[K_1\left(\beta_n\right)I_0\left(R_D\beta_n\right)+I_1\left(\beta_n\right)K_0\left(R_D\beta_n\right)\right]}\end{aligned} \tag{31}$$

其中：

$$\beta_n=\sqrt{\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi}{2h_D}\right)^2+u\omega_f+u\frac{\lambda_m\omega_m}{\lambda_m+u\omega_m}} \tag{32}$$

5. 讨论

本文双重介质部分射开井统一构造解虽实现了 12 种边界工况在 Laplace 空间的统一表达，但仍基于理想化假设，存在以下局限。其一，窜流采用 Warren-Root 准稳态假设，未考虑基质块内部压力的瞬态扩散，对低渗透致密碳酸盐岩，早期段会低估压力动态并影响窜流系数反演。其二，假设单相微可压缩流体遵循线性达西定律，未考虑油水油气两相流、近井应力敏感、介质变形及启动压力梯度，这些效应将引入非线性系数，使方程不再是线性二阶边值问题。其三，假定储层水平等厚、双系统均质各向同性，未计及层间非均质性、隔夹层及人工裂缝与天然裂缝的耦合。

后续可在本文统一框架内沿四方向拓展：将准稳态窜流替换为非稳态窜流函数，修正 Bessel 结构与相似核函数可望沿用，仅需重标窜流系数；引入应力敏感效应，经扰动线性化或换形变换局部恢复修正 Bessel 方程后再套用本方法；在径向–垂向二维解上叠加人工裂缝、水平井或斜井的点源镜像，结合 Duhamel 原理耦合分段压裂与井筒动态；进而将“基本解 + 相似核函数查表”范式推广至多相流、分形介质与复合油藏。相似构造法的核心价值在于方程结构与边界条件解耦，这为上述复杂化方向提供了可复用的求解框架。

6. 结论

(1) 本文建立了双重介质油藏中部分射开直井的三维瞬态渗流模型。模型涵盖三种径向边界(定压、

封闭、无穷大)和四种垂向顶底边界组合(D-D、D-N、N-D、N-N)，共形成 12 种边界工况，可用于描述裂缝性碳酸盐岩储层中部分射开井的压力响应。

(2) 通过 Laplace 变换与有限 Fourier 变换，将三维偏微分方程组降阶为只含径向坐标的修正 Bessel 方程边值问题。该边值问题的结构不随边界组合的改变而改变，为后续统一求解提供了基础。

(3) 引入相似构造法，将径向边界影响归结为三类贝塞尔型相似核函数，将垂向边界影响抽象为 Sturm-Liouville 特征函数、特征值与归一化因子。由此形成统一压力解式(20)与两张查表(表 1、表 2)。

(4) 通过查表替换的方式，任一工况下的压力解都可直接从式(20)得到，避免了传统解析方法对每一种工况逐一重新推导。该方法特别适合需要快速给出多种边界工况下压力解的试井解释与软件研发工作。

(5) 本文给出的四组典型组合完全展开解，与已有双重介质部分射开井解析解在垂向 D-D 与径向无穷大组合下的一致性，验证了统一框架的正确性。

(6) 结合井筒储集与表皮效应的连分式解，与经典直井试井分析在形式上保持一致，为后续试井曲线绘制与参数反演提供了现成格式。

参考文献

[1] 尹洪军, 何应付. 变形介质油藏渗流规律和压力特征分析[J]. 水动力学研究与进展, 2002, 17(5): 538-546.

[2] 李忠忱. 部分射开井试井方法研究[D]: [硕士学位论文]. 大庆: 大庆石油学院, 1997.

[3] Cassiani, G., Kabala, Z.J. and Medina, M.A. (1999) Flowing Partially Penetrating Well: Solution to a Mixed-Type Boundary Value Problem. *Advances in Water Resources*, **23**, 59-68. https://doi.org/10.1016/s0309-1708(99)00002-0

[4] Bui, T., Mamora, D. and Lee, W. (2000) Transient Pressure Analysis for Partially Penetrating Wells in Naturally Fractured Reservoirs. *Proceedings of SPE Rocky Mountain Regional/Low-Permeability Reservoirs Symposium and Exhibition*, Denver, 12-15 March 2000, SPE-60289-MS. https://doi.org/10.2523/60289-ms

[5] Slimani, K., Tiab, D. and Moncada, K. (2006). Pressure Transient Analysis of Partially Penetrating Wells in a Naturally Fractured Reservoir. *International Oil Conference and Exhibition in Mexico*, Cancun, 31 August-2 September 2006, SPE-104059-MS. https://doi.org/10.2118/104059-ms

[6] Biryukov, D. and Kuchuk, F.J. (2014) Pressure Transient Solutions for Vertically Slotted-Partially Penetrated Vertical Wells in Porous Media. *Transport in Porous Media*, **106**, 455-486. https://doi.org/10.1007/s11242-014-0410-8

[7] Posadas-Mondragón, R. and Camacho-Velázquez, R.G. (2019) Partially Penetrated Well Solution of Fractal Single-Porosity Naturally Fractured Reservoirs. *Fractal and Fractional*, **3**, Article 23. https://doi.org/10.3390/fractalfract3020023

[8] 王建平, 王晓冬, 马世东. 各向异性部分射开直井不稳定渗流理论研究[J]. 大庆石油地质与开发, 2007(3): 65-67, 71.

[9] 董文秀, 王晓冬, 王家航. 各向异性储层部分射开斜井新表皮模型[J]. 西南石油大学学报: 自然科学版, 2018, 40(1): 104-113.

[10] 刘海龙. 部分射开压裂直井渗流压力动态分析[J]. 计算物理, 2016, 33(3): 322-332.

[11] Warren, J.E. and Root, P.J. (1963) The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, **3**, 245-255. https://doi.org/10.2118/426-pa

[12] Ozkan, E. and Raghavan, R. (1991) New Solutions for Well-Test-Analysis Problems: Part 1—Analytical Considerations. *SPE Formation Evaluation*, **6**, 359-368. https://doi.org/10.2118/18615-pa

[13] Unsal, E., Matthäi, S.K. and Blunt, M.J. (2009) Simulation of Multiphase Flow in Fractured Reservoirs Using a Fracture-Only Model with Transfer Functions. *Computational Geosciences*, **14**, 527-538. https://doi.org/10.1007/s10596-009-9168-4

[14] Yan, B., Wang, Y. and Killough, J.E. (2015) Beyond Dual-Porosity Modeling for the Simulation of Complex Flow Mechanisms in Shale Reservoirs. *Computational Geosciences*, **20**, 69-91. https://doi.org/10.1007/s10596-015-9548-x

[15] 刘慈群. 双重介质非线性渗流[J]. 科学通报, 1981(17): 1081-1085.

[16] 刘慈群. 双重介质二维不定常渗流[J]. 水动力学研究与进展(A 辑), 1993(2): 159-163.

[17] 陈方方, 贾永禄, 张福祥. 双重介质部分射开渗流模型与试井样板曲线[J]. 大庆石油地质与开发, 2008, 27(6): 87-90, 103.

[18] 李秀军. 双重介质复杂油藏试井模型及试井解释软件[D]: [硕士学位论文]. 大庆: 大庆石油学院, 2009.

[19] 张艳玉, 李卫东, 崔国亮, 等. 低渗透双重介质油藏试井解释模型[J]. 陕西科技大学学报(自然科学版), 2012, 30(3): 65-69.

[20] 刘海龙, 王强. 双重介质压裂直井非定常流井底压力动态分析[C]//西安石油大学, 陕西省石油学会. 2019 油气田勘探与开发国际会议论文集. 2019: 1299-1309.

[21] 贾闽惠, 李顺初. Bessel 方程的边值问题解的相似结构[J]. 大学数学, 2005, 21(5): 37-39.

[22] 李顺初, 伊良忠, 郑鹏社. 微分方程定解问题解的相似结构[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2006, 43(4): 933-934.

[23] 李顺初. 微分方程解的相似结构的初探与展望[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2010, 29(2): 223-226, 238.

[24] 李顺初. 从相似结构到相似构造法的微分方程边值问题求解方法综述[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2015, 34(2): 22-29.

[25] Li, S., Guo, H., Zheng, P., Dong, X., Zhao, C. and Gui, Q. (2020) The Elastic Boundary Value Problem of Extended Modified Bessel Equation and Its Application in Fractal Homogeneous Reservoir. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, Article No. 63. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1104-1

符号注释

p_f	裂缝地层压力
p_m	基质地层压力
k_{fh}	垂向裂缝渗透率(μm²)
k_{mh}	垂向基质渗透率(μm²)
h	油层厚度(m)
p_i	原始地层压力(MPa)
p	井底流动压力(MPa)
q	地面产量(m³/d)
μ	流体粘度(mPa·s)
B	体积系数(无量纲)
R	外边界半径(m)
r_w	井筒半径(m)
k_{fr}	径向裂缝渗透率(μm²)
k_{fr}	径向裂缝渗透率(μm²)
k_{mr}	径向基质渗透率(μm²)
t	生产时间(h)
ϕ_f 、 ϕ_m	裂缝/基质孔隙度
C_m	基质压缩系数(MPa⁻¹)
C_f	裂缝压缩系数(MPa⁻¹)
z	垂向坐标(m)
r	径向坐标(m)
z_a	射孔段顶部位置(m)
z_b	射孔段底部位置(m)
D	无量纲

附录 A

A.1. 修正 Bessel 方程边值问题

定理 1 考虑以下二阶线性齐次常微分方程的边值问题：

$$\begin{cases} y''+\dfrac{1}{x}y'-Ay=0, \quad a<x<b \\ \left[Ey+(1+EF)y'\right]_{x=a}=D, \quad (\text{内边界条件}) \\ \left[Gy+Hy'\right]_{x=b}=0, \quad b<+\infty \quad (\text{有限外边界条件}) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0, \quad b\to+\infty, H=0 \quad (\text{无穷大外边界条件}) \end{cases} \tag{A.1}$$

其中 D,E,F,G,H,a,b 均为已知的实常数，且 $D\neq 0, G^2+H^2\neq 0, 0<a<b$。根据参考文献[25]，(1)式中广义修正 Bessel 方程的两个线性无关的基本解分别为 $K_0\left(x\sqrt{A}\right), I_0\left(x\sqrt{A}\right)$，可引入由第一类和第二类修正 Bessel 函数构建的双变量修正 Bessel 基函数：

$$\psi_{m,n}(x,y,z)=K_m(xz)I_n(yz)+(-1)^{m-n+1}I_m(xz)K_n(yz) \tag{A.2}$$

其中 $I_n(\,),K_n(\,)$ 分别为第一类，第二类 n 阶修正贝塞尔函数。

若边值问题(1)式存在唯一解，则其解可以表示为如下修正的连分式形式：

$$y(x)=D\cdot\frac{1}{E+\dfrac{1}{F+\Phi(a)}}\cdot\frac{1}{F+\Phi(a)}\Phi(x) \tag{A.3}$$

当 $E=0$ 且 $F=0$ 时，(3)式可化简为如下形式：

$$y(x)=D\cdot\Phi(x) \tag{A.4}$$

其中 $\Phi(x)$ 为相似核函数(SKF)，其在区间 $[a,b]$ 上的通用形式定义为：

$$\Phi(x)=\frac{G\varphi_{0,0}(x,b)+H\varphi_{0,1}(x,b)}{G\varphi_{1,0}(a,b)+H\varphi_{1,1}(a,b)} \tag{A.5}$$

其中 $\varphi_{m,n}(a,b)(m,n=0,1)$ 为相似核函数的四组相似基函数，这些函数由双变量修正 Bessel 基函数 $\psi_{m,n}(x,y,z)$ 构成，且满足下列二元函数：

$$\varphi_{0,0}(x,b)=\varphi_{0,0}(x,y)\Big|_{(x,b)}=\psi_{0,0}\left(x,b,\sqrt{A}\right) \tag{A.6}$$

$$\varphi_{0,1}(x,b)=\frac{\partial}{\partial y}\varphi_{0,0}(x,y)\Big|_{(x,b)}=\sqrt{A}\psi_{0,1}\left(x,b,\sqrt{A}\right) \tag{A.7}$$

$$\varphi_{1,0}(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,0}(x,y)\Big|_{(a,b)}=-\sqrt{A}\psi_{1,0}\left(a,b,\sqrt{A}\right) \tag{A.8}$$

$$\varphi_{1,1}(a,b)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\varphi_{0,0}(x,y)\Big|_{(a,b)}=-A\psi_{1,1}\left(a,b,\sqrt{A}\right) \tag{A.9}$$

A.2. 三类径向相似核函数

显然 G 与 H 决定了(1)式的外边界条件。在下列推论中，推导出了相似核函数 $\Phi(x)$ 在外边界约束条件下的三个简化表达式。

有限 Dirichlet 外边界条件：当 $H=0$，$G\neq 0$ 时，外边界条件为 Dirichelet 边界条件 $y(b)=0$，在油

藏模型中为定压外边界，此时相应的核函数(5)式化为：

$$\Phi_D(x)=\frac{\varphi_{0,0}(x,b)}{\varphi_{1,0}(a,b)}=-\frac{\psi_{0,0}\left(x,b,\sqrt{A}\right)}{\sqrt{A}\psi_{1,0}\left(a,b,\sqrt{A}\right)} \tag{A.10}$$

有限 Neumann 外边界条件：当 $G=0$，$H\neq 0$ 时，外边界条件为 Neumann 边界条件 $y'(b)=0$，在油藏模型中为封闭外边界，此时相应的核函数(5)式化为：

$$\Phi_N(x)=\frac{\varphi_{0,1}(x,b)}{\varphi_{1,1}(a,b)}=-\frac{\psi_{0,1}\left(x,b,\sqrt{A}\right)}{\sqrt{A}\psi_{1,1}\left(a,b,\sqrt{A}\right)} \tag{A.11}$$

无穷大外边界条件：当(1)式中的外边界条件为：$\lim_{x\to\infty} y=0$，在油藏模型中为无穷大外边界，通过计算可得到相应的核函数为：

$$\Phi_\infty(x)=-\frac{K_0\left(x\sqrt{A}\right)}{\sqrt{A}K_1\left(\sqrt{A}\right)} \tag{A.12}$$

附录 B. 垂向 Sturm-Liouville 特征值问题的完整解

对于垂向二阶常系数特征值问题：

$$X''(z)+\lambda^2 X(z)=0,\quad z\in[0,h_D] \tag{B.1}$$

本文考虑四组经典的分离型齐次边界条件：

B.1. 双重 Dirichlet 边界(D-D)

$$X(0)=0, X(h_D)=0, X_n(z)=\sin\left(\frac{n\pi z}{h_D}\right), \lambda_n=\frac{n\pi}{h_D}, n=1,2,\cdots \tag{B.2}$$

B.2. Dirichlet-Neumann (D-N)

$$X(0)=0, X'(h_D)=0, X_n(z)=\sin\left(\frac{(2n-1)\pi z}{2h_D}\right), \lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{2h_D}, n=1,2,\cdots \tag{B.3}$$

B.3. Neumann-Dirichlet (N-D)

$$X'(0)=0, X(h_D)=0, X_n(z)=\cos\left(\frac{(2n-1)\pi z}{2h_D}\right), \lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{2h_D}, n=1,2,\cdots \tag{B.4}$$

B.4. 双重 Neumann (N-N)

$$X'(0)=0, X'(h_D)=0, X_n(z)=\cos\left(\frac{n\pi z}{h_D}\right), \lambda_n=\frac{n\pi}{h_D}, n=0,1,2,\cdots \tag{B.5}$$