Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 51-57
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511431

Hans汉斯

基于谱元法的三维地震波场数值模拟与分析

韩冰雪[1]，马中华[1,2*]

[1]天津职业技术师范大学理学院，天津
[2]吕梁职业技术学院大数据学院，山西 吕梁

收稿日期：2026年10月4日；录用日期：2026年10月28日；发布日期：2026年11月5日

摘　要

本文采用谱元法(Spectral Element Method, SEM)对三维介质中的地震波传播过程进行数值模拟，并以三维无限均匀介质中的点源球面波解析解作为理论参照。数值模型采用六面体单元进行空间剖分，在单元内部布置Gauss-Lobatto-Legendre (GLL)节点，通过高阶拉格朗日多项式对波场进行空间逼近，时间方向采用显式差分格式推进。结果表明，在本文所建立的三维均匀介质模型和计算参数条件下，波前具有较好的连续性，观测点处的数值解波形与解析解波形在初至位置、主要波峰和波谷位置以及整体振荡特征方面具有较好的一致性。峰值归一化后，数值解与解析解之间的均方根误差为1.01%，表明当前数值模型和计算程序能够较好地描述三维介质中的地震波传播过程。

关键词

谱元法，三维声波方程，GLL，均方根误差

Spectral Element Method-Based Numerical Simulation and Analysis of 3D Seismic Wavefield

Bingxue Han[1], Zhonghua Ma[1,2*]

[1]School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin
[2]School of Big Data, Lvliang Vocational and Technical College, Lvliang Shanxi

Received: October 4, 2026; accepted: October 28, 2026; published: November 5, 2026

Abstract

In this paper, the Spectral Element Method (SEM) is adopted to numerically simulate the

*通讯作者。

文章引用: 韩冰雪, 马中华. 基于谱元法的三维地震波场数值模拟与分析[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 51-57.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511431

propagation of seismic waves in three-dimensional media. The analytical solution of spherical waves excited by a point source in a three-dimensional infinite homogeneous medium is used as the theoretical reference. The numerical model is spatially discretized using hexahedral elements. Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) nodes are arranged within each element, and high-order Lagrange polynomials are employed for spatial approximation of the wavefield. An explicit difference scheme is utilized for time integration. The results show that under the established three-dimensional homogeneous medium model and computational parameters, the wavefront maintains good continuity. At observation points, the waveforms of numerical solutions are in good agreement with analytical solutions in terms of first-arrival time, positions of major peaks and troughs, and overall oscillation characteristics. After peak normalization, the root mean square error (RMSE) between numerical and analytical solutions is 1.01%, demonstrating that the proposed numerical model and computational program can well describe the propagation of seismic waves in three-dimensional media.

Keywords

Spectral Element Method, Three-Dimensional Acoustic Wave Equation, GLL, Root Mean Square Error

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

波动方程数值模拟是研究声波和地震波传播规律的重要方法之一。在实际数值计算中，仅通过波场图像观察传播特征难以对计算结果的准确性进行定量判断，因此通常需要采用理论解析解、标准模型或实验结果进行对比验证[1]。有限差分法具有离散过程简单、程序实现方便等特点，在波动方程数值求解中得到了广泛应用。但在高频波传播问题中，有限差分法对空间网格尺度具有较高要求，当网格划分不足时容易产生散射现象。有限元法具有较好的区域离散和复杂几何适应能力，但传统低阶有限元方法在提高计算精度时通常需要增加网格数量，从而增加计算量[2]。谱元法是在有限元方法基础上发展起来的一种高阶数值方法。该方法采用高阶多项式对单元内部波场进行逼近，并利用 Gauss-Lobatto-Legendre (GLL)节点进行数值积分，在保证有限元方法区域离散灵活性的同时，可以提高空间离散精度[3]。由于波动问题对空间和时间离散精度具有较高要求，谱元法已被应用于声波和地震波传播等问题的数值模拟[4]。对于三维均匀无限介质中的点源问题，波场具有明确的球面对称特征，并可以得到相应的理论解析解。该问题的传播规律较为清晰，因此适合作为数值方法和程序实现的基础校验模型[5]。

基于上述考虑，本文建立三维介质声波模型，采用谱元法计算声波传播过程，并在距震源 50 m 的位置设置观测点。随后根据数值模拟所采用的介质参数、震源参数以及空间坐标计算相应的球面波解析解，在相同的时间采样节点上提取数值解和解析解进行比较。通过波场空间分布、观测点波形以及归一化波形均方根误差等指标，分析谱元法数值结果与理论解析结果之间的一致程度。

2. 理论基础与计算方法

2.1. 三维声波波动方程

均匀理想弹性介质中，标量声波波动方程的控制方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla^2 u \tag{1}$$

式中：u 为声波标量波场位移(m)；v_p 为介质纵波传播速度(m/s)；∇^2 为拉普拉斯算子，在直角坐标系下表达式为 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$。

2.2. 三维球面波解析解推导与计算

2.2.1. 解析解推导基础

三维点源激发的声波具有球对称传播特征，仅与震源至观测点的直线距离 r 相关，与空间角度无关。将直角坐标系下的波动方程转换为球坐标形式，球坐标下拉普拉斯算子为：

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{2}$$

代入波动方程，通过变量代换 $\psi(r,t) = r \cdot u(r,t)$，可将三维波动方程退化为一维声波方程：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v_p^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \tag{3}$$

一维声波方程的通解为 $\psi(r,t) = f\left(t - \frac{r}{v_p}\right)$，仅考虑向外传播的球面波(舍去向内汇聚波)，换回原变量 $u(r,t)$，得到球面波传播的基本形式：

$$u(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{v_p}\right) \tag{4}$$

式中：$f\left(t - \frac{r}{v_p}\right)$ 为震源时间函数；$\frac{1}{r}$ 为球面波几何扩散衰减项；$t - \frac{r}{v_p}$ 为波传播的时间延迟，即波从震源到达观测点的滞后时间。

2.2.2. Ricker 子波

本文采用 Ricker 子波作为震源时间函数，其表达式为：

$$f(\tau) = \left[1 - 2(\pi f_0 \tau)^2\right] \exp\left[-(\pi f_0 \tau)^2\right] \tag{5}$$

式中：$\tau = t - \frac{r}{v_p}$ 为延迟时间；f_0 为震源主频(Hz)；t 为模拟时间(s)。

结合三维无限空间点源理论标定系数，完整三维球面波解析解表达式为：

$$u_{ana}(t) = \frac{1}{4\pi v_p^2 r}\left[1 - 2(\pi f_0 \tau)^2\right] \exp\left[-(\pi f_0 \tau)^2\right] \tag{6}$$

式中：$4\pi v_p^2 r$ 为三维无限空间点源的理论振幅标定项；r 为震源与观测点的直线距离(m)。

2.2.3. 解析解计算参数与数值模拟参数的一致性

为了保证数值解与理论解析解具有一致的计算条件，解析解计算过程中不重新设置模型参数，而是直接采用数值模拟程序中的相关参数，包括介质参数、震源参数、震源坐标、观测点坐标以及时间离散

参数。提取数值模拟的介质参数(v_p)、震源参数(f_0)、震源坐标(x_s, y_s, z_s)与观测点坐标(x_r, y_r, z_r)；计算震源与观测点的直线距离$r=\sqrt{(x_r-x_s)^2+(y_r-y_s)^2+(z_r-z_s)^2}$；计算波的初至走时$t_d=\frac{r}{v_p}$，确定波到达观测点的时刻；构造与数值模拟完全一致的时间序列$t=n\cdot dt$ ($n=0,1,2,\cdots,nt$，dt为时间步长，nt为总时间步数)；对每个时间步计算延迟时间$\tau=t-t_d$，$\tau\le 0$时解析解置零，$\tau>0$时代入解析解公式逐时刻计算。

2.3. 方法

2.3.1. 谱元法基本原理

本文将三维计算域剖分为若干六面体单元，单元内部采用 4 阶 GLL 节点进行高阶拉格朗日插值，通过 GLL 高精度数值积分组装刚度矩阵与质量矩阵；时间域采用二阶中心差分显式迭代格式推进波场演化，模型边界设置衰减吸收边界条件，有效压制人工边界反射干扰。

2.3.2. 峰值归一化方法

由于解析解基于理想无限介质、质点源理论假设，而数值解受网格离散、GLL 积分、质量矩阵、扩展震源及人工边界等数值效应影响，二者绝对振幅存在固有标定差异，不具备直接对比价值。因此采用峰值归一化方法消除振幅量级干扰，仅对比波形形态、初至走时与相位特征。

峰值归一化的通用公式为：

$$u_{\text{norm}}(t)=\frac{u(t)}{\max\limits_t|u(t)|} \tag{7}$$

式中：$u(t)$为原始波形(数值解或解析解)；$\max\limits_t|u(t)|$为原始波形的最大振幅绝对值；$u_{\text{norm}}(t)$为归一化后的波形，其峰值为 1。

对应数值解与解析解的归一化表达式分别为：

$$u_{\text{num,norm}}(t)=\frac{u_{\text{num}}(t)}{\max\limits_t|u_{\text{num}}(t)|} \tag{8}$$

$$u_{\text{ana,norm}}(t)=\frac{u_{\text{ana}}(t)}{\max\limits_t|u_{\text{ana}}(t)|} \tag{9}$$

2.3.3. 误差计算方法

采用归一化后波形的均方根误差(RMSE)定量评价数值解与解析解的匹配精度，该方法是学术上评价两条曲线匹配度的标准方法，计算步骤如下：

对数值解与解析解分别进行峰值归一化，得到$u_{\text{num,norm}}(t_i)$与$u_{\text{ana,norm}}(t_i)$ ($i=1,2,\cdots,N$，N为时间点总数)；

计算每个时间点的波形差值：$e_i=u_{\text{num,norm}}(t_i)-u_{\text{ana,norm}}(t_i)$；

计算差值的平方，避免正负抵消：e_i^2；

计算所有时间点平方差值的平均值(均方误差 MSE)：$\text{MSE}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}e_i^2$；

对均方误差开根号，得到均方根误差 RMSE：$\text{RMSE}=\sqrt{\text{MSE}}$；

将 RMSE 转换为百分比，得到波形匹配误差：波形误差$(\%)=\text{RMSE}\times 100\%$。

合并后的完整误差计算公式为：

$$\text{波形误差}=100\%\times\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[u_{\text{num,norm}}(t_i)-u_{\text{ana,norm}}(t_i)\right]^2} \tag{10}$$

3. 数值模型

3.1. 模型参数

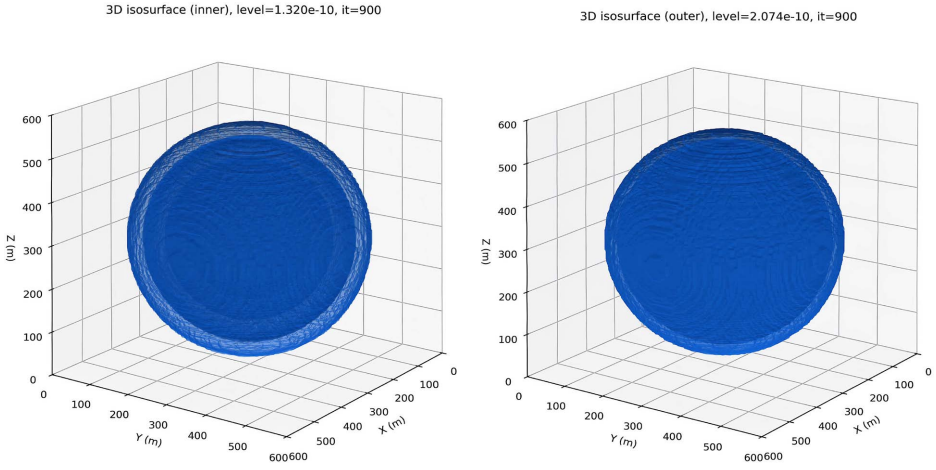
本文构建三维均匀介质模型，所有参数严格对应自编谱元法程序设置，具体参数如下表 1 所示。

Table 1. Specific parameters of 3D homogeneous medium model
表 1. 三维均匀介质模型具体参数

参数名称	参数值	单位	说明
计算域尺寸	$L_x = L_y = L_z = 600$	m	三维立方体计算域
单元剖分数量	$N_x = N_y = N_z = 30$	个	x、y、z 方向均匀剖分
谱元插值阶数	$N = 4$	-	4 阶 GLL 插值节点
纵波速度	$v_p = 2500$	m/s	均匀介质波速
介质密度	$\rho = 1.0$	kg/m^3	简化密度，不影响波形形态
震源主频	$f_0 = 25$	Hz	Ricker 子波主频
总时间步数	$nt = 1800$	步	时间迭代总步数
时间步长	$dt = 1.3333 \times 10^{-4}$	s	数值稳定性条件
观测点距震源距离	$r = 50$	m	震源近场，球面波稳定传播区域
CFL 控制系数	0.15	-	时间步长稳定性控制参数

震源设置于模型几何中心，坐标为$(300,300,300)$m，采用高斯扩展震源加载方式，震源时间函数为 Ricker 子波；观测点布设于震源正右侧 50 m 处，坐标为$(350,300,300)$m，该位置处于球面波稳定传播区域如图 1，可有效避免震源近场非线性效应影响，适合波形匹配与精度校验。震源与观测点的直线距离计算如下：

$$r = \sqrt{(350-300)^2 + (300-300)^2 + (300-300)^2} = 50 \text{ m} \tag{11}$$



(a) (b)

Figure 1. Numerical spherical wave
图 1. 数值球面波

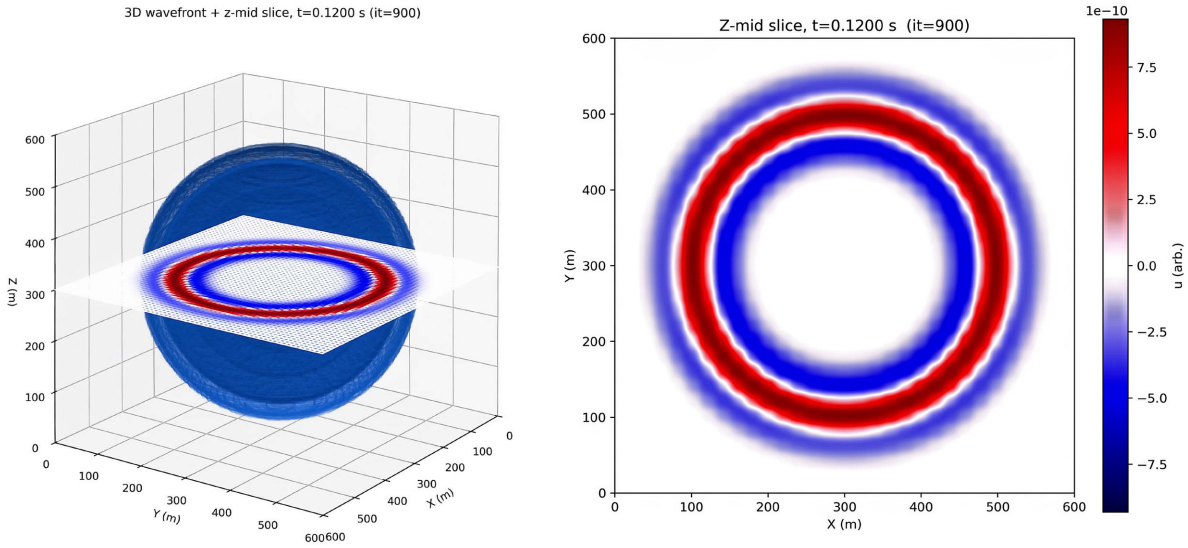
3.2. 试验流程

- 参数初始化：设置模型参数、震源参数、网格参数及时间参数，生成 GLL 节点、权重及微分矩阵；
- 解析解计算：基于上述参数，按 2.2.2 节步骤求解三维球面波解析解，得到观测点的理论波形；
- 数值模拟：运行谱元法程序，迭代推进波场演化，记录观测点的数值解波形；
- 归一化处理：对数值解与解析解分别进行峰值归一化，消除振幅量级差异；
- 波形对比与误差计算：绘制原始振幅与归一化振幅对比图，按 2.5 节方法计算波形匹配误差；
- 结果分析：分析波场空间传播特征、波形匹配情况及误差来源，验证数值模拟的精度与可靠性。

4. 模拟结果与分析

4.1. 波场空间传播特征

如图 2 所示，选取计算过程中的目标时刻提取(Z)方向中间剖面，观察三维波场的空间传播特征。结果表明，波场以模型中心的震源位置为中心向外传播，在中间剖面上呈现较为规则的近圆形波前，波场整体分布具有较好的对称性。从波前连续性来看，当前计算参数下未观察到明显的局部波场畸变。吸收层区域的波场幅值逐渐衰减，计算域内部未出现明显的边界反射波干扰。上述结果与均匀介质中球面波的基本传播特征相符，说明当前程序在所设置的模型和计算参数条件下能够稳定完成三维波场传播模拟。



(a) (b)

Figure 2. Middle slice along Z-direction
图 2. Z 向中间剖面切片

4.2. 波形对比分析

在距震源 50 m 观测点处，同步提取谱元法数值解与三维球面波解析解波形，分别绘制原始振幅对比图与归一化振幅对比图。

原始振幅对比可见，两条波形的初至走时完全一致(均为 $t_d = 0.02\,\mathrm{s}$)，波峰、波谷出现时刻严格对应，波形震荡周期完全相同，说明数值模拟能够准确复现声波的传播走时与相位特征；但由于解析解与数值解的能量标定体系不同，二者绝对振幅量级存在固有差异，无直接对比意义。

归一化振幅对比可见，将数值解与解析解分别按自身峰值归一化至单位幅值后，两条波形曲线几乎

完全重合，波形形态、震荡规律、相位特征高度一致，无明显相位偏移与波形畸变，直观证明了谱元法数值模拟的高精度(图 3)。

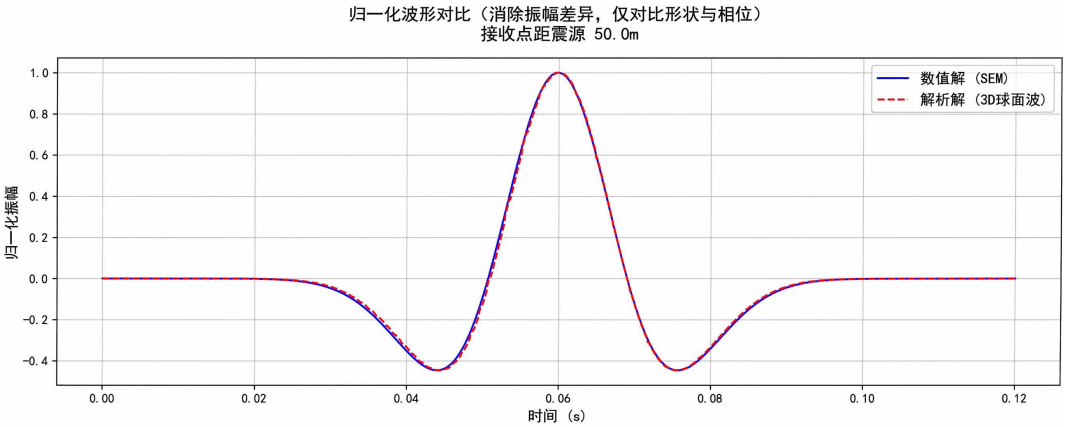


Figure 3. Comparison of normalized amplitudes
图 3. 归一化振幅对比

5. 结论

本文针对三维均匀介质中的声波传播问题，实现了一套基于 Gauss-Lobatto-Legendre (GLL)节点的三维谱元法数值模拟程序，并采用三维球面波理论解析解对程序的计算结果进行了基准验证。

数值模型采用六面体谱元进行空间离散，谱元阶数取($N = 4$)，并采用二阶中心差分格式进行时间推进。程序中进一步设置了阻尼型吸收层和高斯空间扩展震源，以减小有限计算域边界反射以及单节点震源加载对数值结果的影响。时间步长根据谱元阶数、空间单元尺寸及介质波速确定，并满足本文所采用的 CFL 稳定性控制条件。

数值结果表明，在本文所设置的均匀介质模型和计算参数条件下，三维波场能够以震源为中心较稳定地向外传播，中间剖面上的波前具有较好的连续性和对称性，吸收层能够有效降低计算域边界产生的反射干扰。观测点处的数值波形与理论解析解在初至时间、主要波峰波谷位置以及整体振荡特征方面具有较好的一致性。峰值归一化后，两者的 RMSE 为 1.01%，表明当前程序在该基准模型下具有较好的数值一致性。

基金项目

山西省基础研究计划项目(202303021211245)。

参考文献

[1] 任志明, 戴雪, 包乾宗, 蔡晓慧, 刘洋. 有限差分的时间和空间频散及其对逆时偏移和全波形反演的影响[J]. 地球物理学报, 2021, 64(11): 4166-4180.

[2] 印兴耀, 周建科, 吴国忱, 梁锴. 有限元算法在声波方程数值模拟中的频散分析[J]. 地震学报, 2014, 36(5): 944-955+982.

[3] De Basabe, J.D. and Sen, M.K. (2007) Grid Dispersion and Stability Criteria of Some Common Finite-Element Methods for Acoustic and Elastic Wave Equations. *Geophysics*, **72**, T81-T95. https://doi.org/10.1190/1.2785046

[4] Komatitsch, D. and Tromp, J. (1999) Introduction to the Spectral Element Method for Three-Dimensional Seismic Wave Propagation. *Geophysical Journal International*, **139**, 806-822. https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.1999.00967.x

[5] 董兴朋, 杨顶辉. 球坐标系下谱元法三维地震波场模拟[J]. 地球物理学报, 2017, 60(12): 4671-4680.