**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2026, 15(11), 79-98
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511434

Hans汉斯

# 含经典时间导数项的变阶时间分数阶对流扩散方程的局部RBF-DQ数值模拟方法

**张博涵**

江苏师范大学敬文书院，江苏 徐州

收稿日期：2026年10月9日；录用日期：2026年11月2日；发布日期：2026年11月17日

## 摘　要

**本文针对一类含一阶时间导数与变阶时间分数阶导数的对流－扩散方程，提出基于径向基函数的微分求积法(RBF-DQ)进行数值求解。该方程在经典变阶时间分数阶对流－扩散模型的基础上引入一阶时间导数项，构建了双时间导数项模型，以更精确刻画具有复杂记忆效应的输运过程。为提升数值精度，本文采用局部RBF-DQ格式，针对一般几何区域发展了无网格局部离散方法，并分别建立了Dirichlet边界条件与Riemann边界条件下的离散格式。数值实验结果表明，该方法在不同节点分布下均表现出良好的收敛性，且随着节点数的增加，计算精度显著提高，验证了所提方法在处理复杂几何区域及多时间导数项模型中的有效性与鲁棒性。**

## 关键词

**径向基函数，微分求积法，双时间导数项模型，变阶时间分数阶**

# Local RBF-DQ Numerical Simulation Method for Variable-Order Time-Fractional Advection-Diffusion Equations with Classical Time Derivative Term

**Bohan Zhang**

CW CHU College, Jiangsu Normal University, Xuzhou Jiangsu

Received: October 9, 2026; accepted: November 2, 2026; published: November 17, 2026

## Abstract

**This paper proposes a numerical solution based on the radial basis function-based differential**

文章引用: 张博涵. 含经典时间导数项的变阶时间分数阶对流扩散方程的局部 RBF-DQ 数值模拟方法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 79-98. DOI: 10.12677/aam.2026.1511434

**quadrature (RBF-DQ) method for a class of advection-diffusion equations involving both a first-order time derivative and a variable-order time-fractional derivative. By incorporating a first-order time derivative term into the classical variable-order time-fractional advection-diffusion model, a dual-time-derivative model is constructed to more accurately characterize transport processes with complex memory effects. To enhance numerical accuracy, a local RBF-DQ scheme is adopted, and a meshless local discretization method is developed for general geometric domains. Discrete formulations under Dirichlet and Riemann boundary conditions are established, respectively. Numerical experimental results demonstrate that the proposed method exhibits good convergence under different node distributions, and the computational accuracy improves significantly as the number of nodes increases, thereby verifying the effectiveness and robustness of the method in handling complex geometric domains and multi-time-derivative models.**

## Keywords

**Radial Basis Function, Differential Quadrature Method, Double-Time-Derivative Terms Model, Variable-Order Time-Fractional**

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

## 1. 引言

分数阶微积分将经典微积分中整数阶导数的概念推广至任意实数乃至复数阶次，其定义天然蕴含的卷积积分结构赋予了方程描述过程记忆与空间遗传性的能力[1]。这一特性使得分数阶模型在反常扩散、黏弹性力学、软物质物理、生物组织输运等具有显著历史依赖性的复杂过程建模中展现出超越传统整数阶模型的突出优势[2] [3]。近年来，随着研究的不断深入，人们逐渐认识到在许多实际系统中，介质的微观环境会随时间持续演化，导致其记忆特性并非一成不变。为应对这一挑战，Lorenzo 和 Hartley [4]首次从数学上严格定义了变阶分数阶算子，开创性地将分数阶导数的阶次从常数推广为关于时间或空间的函数，从而能够灵活捕捉系统在不同阶段表现出的可变记忆行为。此后，该理论被成功应用于球形颗粒沉降诱导的非线性尾流分析[5]以及多类反常扩散过程的建模[6]，充分彰显了变阶分数阶模型在复杂时变系统刻画中的独特价值。

由于变阶分数阶导数算子的非局部性和卷积结构，绝大多数实际模型难以求得解析解，数值方法因此成为该领域的核心研究内容。有限差分法因其构造直观、实施简便而应用最广，Meerschaert 和 Tadjeran [7]以及 Shen 等[8]分别针对分数阶对流–弥散方程和变阶扩散方程发展了稳定有效的差分格式。谱方法则凭借其在光滑区域内的指数收敛特性，在分数阶方程求解中展现出极高的精度优势，Zayernouri 和 Karniadakis [9]发展的分数阶谱配点法即为此类工作的优秀代表，Bhrawy 和 Zaky [10]也提出了适用于变阶 Caputo 泛函微分方程的高精度谱算法。此外，Tayebi 等[11]采用基于移动最小二乘(MLS)的无网格方法对二维变阶分数阶对流扩散方程进行了系统研究。

在复杂非均匀介质中的溶质运移、热质传递以及许多反常输运过程中，实验观测表明，系统的扩散行为往往并非始终遵循单一时间尺度律，而是可以在正常扩散、亚扩散和超扩散状态之间发生转换。例如，在高度非均质多孔介质中的示踪剂运移实验中，污染物羽流的增长既可能表现出快速的前缘传播，也可能因滞留或质量交换而呈现缓慢的尾部拖尾[12] [13]。这种瞬态弥散现象表明，单一的常阶或变阶分数阶时间导数虽能较好地描述具有固定记忆强度的反常输运，却难以充分捕捉扩散状态随时间演化的完

整图景[12]。为刻画这类多机制耦合过程，研究者提出了包含多个时间导数项的分数阶模型，其中不同导数项分别对应不同的输运机制。具体而言，经典的一阶时间导数描述的是局部瞬时响应或正常扩散成分，它体现了介质中可动相或直接迁移过程的贡献；而分数阶时间导数则通过其卷积核的非局部性表征历史依赖的记忆效应和长程时间关联，能够捕捉滞留、吸附–解吸、质量交换等慢过程造成的亚扩散行为[13] [14]。当分数阶阶次进一步取为时间的函数时，变阶分数阶项还能反映介质微观结构随时间演化引起的记忆强度变化[15]。因此，将一阶时间项与变阶分数阶时间项并联，可以同时刻画正常输运与异常记忆效应之间的竞争与耦合，从而更真实地描述非均匀介质中的溶质运移、污染物迁移以及复杂热质传递等实际过程。为利用分数阶动力学明确区分可移动与不可移动状态[16]，针对总浓度建立了分数阶可移动/不可移动模型。本文为了获得复杂输运过程更为精确的数学描述与有效的数值求解方法，针对更一般包含两项可移动/不可移动时分数阶对流扩散方程，研究无网格数值方法。

在多时间项变阶分数阶方程方面，近年也已有一些探索。Chen 与 Zhao 等[12] [17]针对二维多时间项时间分数阶扩散方程提出了数值方法，但其多个时间项均为分数阶导数，未涉及一阶整数阶时间导数。Chen 等[12]研究了多时间项时空变阶分数阶对流扩散方程，模型更具一般性，但时间项仍为多个变阶分数阶算子。Hussain 和 Haq [14]提出加权无网格谱方法求解多时间项时间分数阶对流扩散问题，证明无网格类方法可处理此类多时间项模型，但其空间离散基于谱方法而非 RBF-DQ。Dwivedi 等[13]采用有限差分/配点混合方法求解多时间项变阶分数阶反应对流扩散方程，处理了更复杂的反应项，但时间项设定仍为多个分数阶项。Tian 等[15]采用无网格配点法求解多时间项变阶分数阶偏微分方程，说明无网格配点法对多时间项变阶分数阶方程具有较好适应性，但其配点格式与本文采用的局部 RBF-DQ 存在差异。这些已有工作表明多时间项变阶分数阶方程已经受到关注，但大多数将多个时间项均设为分数阶导数，且空间离散方法以有限差分、谱方法或其他无网格方法为主，尚未见局部 RBF-DQ 用于含一个变阶分数阶项与一个一阶整数阶时间导数的二维对流扩散方程。

为突破网格依赖性这一根本约束，以径向基函数(RBF)为代表的无网格方法近二十年来发展迅速。这类方法仅基于一组离散节点构建近似空间，无需网格单元连接，对任意复杂边界均具有良好的适应性[18] [19]。在诸多 RBF 基函数中，Multiquadrics (MQ)函数因其优异的散点插值性能和谱收敛特征而备受推崇[20]。Shu 等[21]创造性地将 RBF 插值与经典微分求积法相融合，通过在每节点局部支持域内近似导数，提出了局部 RBF-DQ 方法，从根本上克服了全局 RBF 导致的稠密病态矩阵问题，并成功应用于不可压缩流动模拟。此后，该方法被不断推广至可压缩流动[22]、非线性薛定谔方程以及变阶分数阶方程[23]等多种复杂物理场景的数值模拟。

本文将局部 RBF-DQ 方法从已有的单项变阶时间分数阶对流扩散方程推广至同时含有变阶 Caputo 时间分数阶导数项与经典一阶时间导数项的二维对流扩散方程。与现有研究中多个时间项均为分数阶导数或仅含单项分数阶导数的设定不同，本文构造了变阶分数阶项与一阶整数阶时间项耦合的双时间导数模型，并在圆域和五角星形复杂区域上，系统检验了该方法在 Dirichlet 与 Neumann 边界条件下的数值精度与稳健性。就作者所知，采用局部 RBF-DQ 方法求解此类同时含变阶分数阶项和一阶时间项的二维对流扩散方程尚未见过，这正是本文工作的主要贡献。

## 2. 两项时间分数阶对流扩散模型

本文考虑如下 Caputo 意义下的两项变阶时间分数阶对流扩散方程：

$$\begin{aligned} &{}_{0}^{c}D_{t}^{\alpha(x,t)}u(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\kappa(\boldsymbol{x},t)\Delta u(\boldsymbol{x},t)-v(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla u(\boldsymbol{x},t)+f(\boldsymbol{x},t) \\ &\boldsymbol{x}=(x,y)\in\Omega\subset\Re^{2},t>0 \end{aligned} \tag{1}$$

满足如下一般形式的初始条件和边界条件：

$$u(\boldsymbol{x},0)=\phi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in\Omega,\quad \mathscr{B}u(\boldsymbol{x},t)=\psi(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{x}\in\partial\Omega,t>0 \tag{2}$$

其中 $\Delta u=\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2$，$\nabla u=(\partial u/\partial x,\partial u/\partial y)$，$\mathscr{B}$ 表示 Dirichlet 或 Neumann 边界条件算子。$\Omega$ 为 $\Re^2$ 中的有界区域，$\partial\Omega$ 为 $\Omega$ 的边界；$\kappa(\boldsymbol{x},t)>0$ 为扩散系数函数，$v(\boldsymbol{x},t)$ 为对流速度，$f(\boldsymbol{x},t),\phi(x),\psi(x)$ 分别为已知函数。Dirichlet 边界条件给定区域边界上的函数值，而 Neumann 边界条件则给定穿过该边界的通量。

方程(1)中的记号 ${}_0^cD_t^{\alpha(x,t)}u(\boldsymbol{x},t)$ 表示 Caputo 意义下的变阶时间分数阶导数算子，定义：

$${}_0^cD_t^{\alpha(x,t)}u(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha(\boldsymbol{x},t))}\displaystyle\int_0^t\frac{1}{(t-\xi)^{\alpha(x,t)}}\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial\xi},0<\alpha(\boldsymbol{x},t)<1\\ \dfrac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t},\alpha(\boldsymbol{x},t)=1\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\Gamma$ 为伽马函数。

## 3. 时间离散近似

方程(1)中包含两项时间导数。为在时间方向上获得一个中等精度的近似，我们采用经典的 L1 公式对 Caputo 导数进行离散，并采用向后差分对整数阶导数进行离散，两者均定义在均匀时间网格 $t^k=k\Delta t$ $(k=0,1,\cdots,M,M=T/\Delta t)$ 上。

对于 $t=t^{k+1}$ 处的变阶分数阶导数，L1 近似可写为(参见文献[9])：

$${}_0^cD_t^{\alpha\left(x,t^{k+1}\right)}u\left(\boldsymbol{x},t^{k+1}\right)=\frac{\Delta t^{-\alpha^{k+1}}}{\Gamma\left(2-\alpha^{k+1}\right)}\sum_{j=0}^{k}b_j^{k+1}\left(u^{k-j+1}-u^{k-j}\right)+R^{k+1} \tag{4}$$

其中 $\alpha^{k+1}=\alpha\left(\boldsymbol{x},t^{k+1}\right),u^j=u\left(\boldsymbol{x},t^j\right)$ 且：

$$b_j^{k+1}=\left(j+1\right)^{1-\alpha^{k+1}}-j^{1-\alpha^{k+1}},\ j=0,1,\cdots,k \tag{5}$$

其截断误差满足 $\left|R^{k+1}\right|\le C\Delta t^{2-\alpha^{k+1}}$。

标准的一阶时间导数则直接用向后差分代替：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t}+O(\Delta t) \tag{6}$$

将(4)式和(6)式代入控制方程(1)，并采用权系数 $\theta\in[0,1]$ 将空间项的一部分置于 $t^{k+1}$ 处计算，余下部分置于 $t^k$ 处计算，可得：

$$\begin{aligned}&\frac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t}+\frac{\Delta t^{-\alpha^{k+1}}}{\Gamma\left(2-\alpha^{k+1}\right)}\sum_{j=1}^{k}b_j^{k+1}\left(u^{k-j+1}-u^{k-j}\right)\\&=\theta\left[\kappa^{k+1}\Delta u^{k+1}-v^{k+1}\cdot\nabla u^{k+1}\right]+(1-\theta)\left[\kappa^{k+1}\Delta u^k-v^{k+1}\cdot\nabla u^k\right]+f^{k+1}+\tilde{R}^{k+1}\end{aligned} \tag{7}$$

其中总截断误差为 $\tilde{R}^{k+1}=R^{k+1}+O(\Delta t)$。

定义因子：

$$\varsigma^{k+1}=\Delta t^{\alpha^{k+1}}\Gamma\left(2-\alpha^{k+1}\right) \tag{8}$$

将(7)式两端乘以 $\varsigma^{k+1}$，并将含有 $u^{k+1}$ 的项集中至左端，整理后得到：

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{\varsigma^{k+1}}{\Delta t}\right)u^{k+1}-\theta\varsigma^{k+1}\left[\kappa^{k+1}\Delta u^{k+1}-v^{k+1}\cdot\nabla u^{k+1}\right]\\&=\beta_0^{k+1}u^k+\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j^{k+1}u^{k-j}+\beta_k^{k+1}u^0+(1-\theta)\varsigma^{k+1}\left[\kappa^{k+1}\Delta u^k-v^{k+1}\cdot\nabla u^k\right]+\varsigma^{k+1}f^{k+1}+O\left(\Delta t^2\right)\end{aligned}\tag{9}$$

其中系数 $\beta_j^{k+1}$ 由下式给出：

$$\begin{cases}\beta_0^{k+1}=\dfrac{\varsigma^{k+1}}{\Delta t}+1-b_1^{k+1}\\\beta_j^{k+1}=b_j^{k+1}-b_{j+1}^{k+1},\ j=1,2,\cdots,k-1\\\beta_k^{k+1}=b_k^{k+1}\end{cases}\tag{10}$$

方程(9)即为完全离散的时间推进格式，在下文中为引用方便，我们将(10)中三个对应参数带入式(9)后的式子分别记为式(11~13)[1]。

## 4. 基于径向基函数的微分求积法

### 4.1. 基本 RBF-DQ 方法

微分求积法的思想源于数值微分，即节点处的任意阶导数均可由函数值的线性加权和近似。在微分求积法中，中心 $\mathbf{x}_i$ 处的导数 $u^{(m)}(\mathbf{x})$ 由区域内一组节点上的函数值的线性加权和近似，定义为：

$$u_x^{(m)}(\mathbf{x})\approx\sum_{j=1}^{N}w_{ij}^{(m)}u(\mathbf{x}_j),\quad u_y^{(m)}(\mathbf{x}_i)\approx\sum_{j=1}^{N}\overline{w}_{ij}^{(m)}u(\mathbf{x}_j)\tag{14}$$

其中 $i=1,2,\cdots,N$，$w_{ij}^{(m)}$ 和 $\overline{w}_{ij}^{(m)}$ 分别为关于 $x$ 和 $y$ 的 $m$ 阶导数的权系数。在 RBF-DQ 方法中，权系数通过将所有基函数代入(14)式作为测试函数而唯一确定。

需要指出的是，RBF 方法中的基函数有多种选择。鉴于 Multiquadrics (MQ)基函数在二维散点数据插值中的优异性能[19]，本文选用 MQ 函数作为测试函数。区域 $\Omega$ 内的函数可由 MQ-RBF 局部近似为

$$h(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+c_j^2}+\lambda_{N+1}\tag{15}$$

其中 $c_j$ 为形状参数。为使问题适定，施加条件：

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j=0\tag{16}$$

将(16)式代入(15)式，可得

$$h(x,y)=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}\lambda_j g_j(x,y)+\lambda_{N+1}\tag{17a}$$

其中

$$g_j(x,y)=\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+c_j^2}-\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+c_i^2}\tag{18}$$

(17)式中的未知量个数为 $N$。按文献[19]的做法，可将 $\lambda_{N+1}$ 替换为 $\lambda_i$，从而将(17a)式重写为

$$h(x,y)=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}\lambda_j g_j(x,y)+\lambda_i\tag{17b}$$

[1]公式(11)~公式(13)由公式(10)和公式(9)推导，公式过长，故正文省略。

其中 $g_j(x,y)=1$，而 $g_j(x,y),(j=1,2,\cdots,N,j\neq i)$ 由(18)式给出，它们构成函数空间 $h(x,y)$ 的一组基。

在 RBF-DQ 方法中，将全部基函数作为测试函数代入(14)式，即可确定权系数 $w_{ij}^{(m)}$ 和 $\overline{w}_{ij}^{(m)}$，具体方程为：

$$\sum_{k=1}^{N} w_{ik}^{(m)} = 0 \tag{19a}$$

$$\frac{\partial^m g_j(x_j,y_j)}{\partial x^m} = \sum_{k=1}^{N} w_{ik}^{(m)} g_j(x_k,y_k),\ j=1,2,\cdots,N,\ j\neq i \tag{19b}$$

对于给定的 $i$，由(20a)~(20b)式可形成一个含 $N$ 个未知量的 $N$ 阶线性方程组，从而数值求解出权系数 $w_{ik}^{(m)}$。类似地，只需将 $x$ 替换为 $y$，便可计算出 $y$ -导数的权系数 $\overline{w}_{ij}^{(m)}$。

将(14)式代入时间离散后的方程(13)，并在内部节点 $\boldsymbol{x}_i=(x_i,y_i)$ 处取值，记 $u_i^{k+1}$ 为 $u(\boldsymbol{x}_i,t^{k+1})$ 的近似解，可得

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{\varsigma_i^{k+1}}{\Delta t}\right)u_i^{k+1}-\theta\varsigma_i^{k+1}\left[\kappa_i^{k+1}\sum_{j=1}^{N}\left(w_{ij}^{(2)}+\overline{w}_{ij}^{(2)}\right)u_j^{k+1}-\sum_{j=1}^{N}\left(w_{ij}^{(1)}v_{1,i}^{k+1}+\overline{w}_{ij}^{(1)}v_{2,i}^{k+1}\right)u_j^{k+1}\right]\\&=\beta_{i,0}^{k+1}u_i^{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\beta_{i,j}^{k+1}u_i^{k-j}+\beta_{i,k}^{k+1}u_i^{0}+(1-\theta)\varsigma_i^{k+1}\left[\kappa_i^{k+1}\sum_{j=1}^{N}\left(w_{ij}^{(2)}+\overline{w}_{ij}^{(2)}\right)u_j^{k}-\sum_{j=1}^{N}\left(w_{ij}^{(1)}v_{1,i}^{k+1}+\overline{w}_{ij}^{(1)}v_{2,i}^{k+1}\right)u_j^{k}\right]+\varsigma_i^{k+1}f_i^{k+1}\end{aligned} \tag{20}$$

其中节点相关的系数为：

$$\begin{aligned}&\varsigma_i^{k+1}=\varsigma(x_i,t^{k+1}) \qquad \kappa_i^{k+1}=\kappa(\boldsymbol{x}_i,t^{k+1}) \qquad v_i^{k+1}=\left(v_1(x_i,t^{k+1}),v_2(x_i,t^{k+1})\right)\\&\beta_{i,j}^{k+1}=\beta_j(\boldsymbol{x}_i,t^{k+1}) \qquad f_i^{k+1}=f(\boldsymbol{x}_i,t^{k+1})\end{aligned} \tag{21}$$

## 4.2. 局部 RBF-DQ 方法

当节点总数 $N$ 较大时，方程(19a)~(19b)的系数矩阵可能呈现病态，这限制了其直接应用。因此，本文主要采用局部 RBF-DQ 方法求解变阶时间分数阶对流扩散方程。

局部 RBF-DQ 方法的核心在于：节点 $\boldsymbol{x}_i$ 处函数 $u(\boldsymbol{x})$ 的 $m$ 阶导数由该点邻域内一组共 $N_i$ 个节点(包含 $\boldsymbol{x}_i$)上的函数值近似，即：

$$u_x^{(m)}(\boldsymbol{x}_i)\approx\sum_{j=1}^{N_i}w_{ij}^{(m)}u(\boldsymbol{x}_j),\quad u_y^{(m)}(\boldsymbol{x}_i)\approx\sum_{j=1}^{N_i}\overline{w}_{ij}^{(m)}u(\boldsymbol{x}_j),\quad i=1,2,\cdots,N \tag{22}$$

相应的权系数 $w_{ij}^{(m)}$ 和 $\overline{w}_{ij}^{(m)}$ 则通过在 $\boldsymbol{x}_i$ 的局部支持域内求解(19a)~(19b)式而确定。

将(23)式代入时间离散后的方程(13)，并结合局部 RBF-DQ 方法，在内部节点 $\boldsymbol{x}_i$ 处可得：

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{\varsigma_i^{k+1}}{\Delta t}\right)u_i^{k+1}-\theta\varsigma_i^{k+1}\left[\kappa_i^{k+1}\sum_{j=1}^{N_i}\left(w_{ij}^{(2)}+\overline{w}_{ij}^{(2)}\right)u_j^{k+1}-\sum_{j=1}^{N_i}\left(w_{ij}^{(1)}v_{1,i}^{k+1}+\overline{w}_{ij}^{(1)}v_{2,i}^{k+1}\right)u_j^{k+1}\right]\\&=\beta_{i,0}^{k+1}u_i^{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\beta_{i,j}^{k+1}u_i^{k-j}+\beta_{i,k}^{k+1}u_i^{0}+(1-\theta)\varsigma_i^{k+1}\left[\kappa_i^{k+1}\sum_{j=1}^{N_i}\left(w_{ij}^{(2)}+\overline{w}_{ij}^{(2)}\right)u_j^{k}-\sum_{j=1}^{N_i}\left(w_{ij}^{(1)}v_{1,i}^{k+1}+\overline{w}_{ij}^{(1)}v_{2,i}^{k+1}\right)u_j^{k}\right]+\varsigma_i^{k+1}f_i^{k+1}\end{aligned} \tag{23}$$

形状参数 $c$ 的选取以及支持节点的确定均沿用文献[19]及原文中的做法。如无特别说明，所有数值实验均取 $c^2=15$，并取两层最近邻点作为支持节点集。

## 4.3. 边界处理

在配点法中，Dirichlet 边界条件的处理较为直接，但对于导数型边界条件则需专门设计。下面分别给

出不同边界条件下系统方程的构造方式。

记 $\boldsymbol{U}$ 为收集所有节点值的向量，即

$$\boldsymbol{U}_{N\times 1}=\left[u_1^{k+1},u_2^{k+1},\cdots,u_{N-1}^{k+1},u_N^{k+1}\right]^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

采用本文的局部 RBF-DQ 方法，对于仅含 Dirichlet 边界的问题，在内部节点 $\boldsymbol{x}_i$ 处的离散控制方程由(24)式给出。对于任意边界节点 $\boldsymbol{x}_I^b$，则直接施加条件

$$u_I^{k+1}=\psi\left(\boldsymbol{x}_I^b,t^{k+1}\right) \tag{25}$$

综合全部内部节点的方程(24)与全部 Dirichlet 边界点的方程(26)，即可得到完整的代数方程组：

$$\boldsymbol{K}_{N\times N}\boldsymbol{U}_{N\times 1}=\boldsymbol{F}_{N\times 1} \tag{26}$$

其中全局系统矩阵 $\boldsymbol{K}$ 由方程(24)和(26)的左端项组集而成，全局向量 $\boldsymbol{F}$ 则由两者的右端项组集而成。在局部 RBF-DQ 方法中，系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是稀疏的，带宽由局部支持点的个数决定，该稀疏系统可用任何直接法求解。

对于 Neumann 边界条件，我们仍可将局部 RBF-DQ 格式(23)应用于该边界条件，其离散形式为

$$\frac{\partial u\left(x_I^b,y_I^b\right)}{\partial n}\approx\sum_{j=1}^{N_I}\left(w_{Ij}^{(1)}n_x+\overline{w}_{Ij}^{(1)}n_y\right)u_j \tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{x}_I^b$ 为 Neumann 边界节点。因此，在 Neumann 边界节点上，应施加方程

$$\sum_{j=1}^{N_I}\left(w_{Ij}^{(1)}n_x+\overline{w}_{Ij}^{(1)}n_y\right)u_j=\psi\left(\boldsymbol{x}_I^b,t^{k+1}\right) \tag{28}$$

最终的代数系统(26)由全部内部节点的方程(23)与全部 Neumann 边界节点的方程(28)组集而成，所得矩阵仍为稀疏矩阵。

## 5. 数值算例

为定量刻画所提局部 RBF-DQ 方法的数值精度，本文统一采用以下三种误差指标。设 $u\left(x_i\right)$ 为节点 $x_i$ 处的精确解，$u_h\left(x_i\right)$ 为对应的数值解，$N$ 为计算区域内节点总数，则相对 $L_2$ 误差、最大 $L_\infty$ 误差和均方根 RMS 误差分别定义为

$$\begin{cases}L_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left|u\left(x_i\right)-u_h\left(x_i\right)\right|^2\Big/\sum_{i=1}^{N}\left|u\left(x_i\right)\right|^2}\\ L_\infty=\max\limits_{1\le i\le N}\left|u\left(x_i\right)-u_h\left(x_i\right)\right|\\ \mathrm{RMS}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left|u\left(x_i\right)-u_h\left(x_i\right)\right|^2\Big/N}\end{cases} \tag{29}$$

如无特别说明，本节所有数值实验均取 MQ 基函数的形状参数 $c^2=15$，支持节点取两层最近邻点，时间离散采用的隐式加权格式，时间步长取 $\Delta t=1/1200$，最终时刻取 $T=1$。除特殊声明外，所有算例中的变阶函数统一设定为

$$\alpha\left(x,y,t\right)=0.8-0.1\cos\left(xt\right)\sin x-0.1\cos\left(yt\right)\sin y \tag{30}$$

本文所有算例均采用同一精确解构造源项，以确保初边值条件完全一致。精确解取为：

$$u(x,y,t)=x^2+y^2+z^2 \tag{31}$$

将其代入两项方程(1)

## 5.1. 圆域上 Dirichlet 与 Neumann 边界条件的计算与对比

本算例首先考察所提方法在单位圆域上对两类常见边界条件的处理能力。计算中分别采用 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件，其余设置完全一致。源项由上述精确解反推得到。该算例的直接目的在于验证本文方法能够在不改变空间离散框架的前提下，统一处理固定值边界与通量边界，并在两类条件下均保持稳定的数值精度。

### 5.1.1. Dirichlet 边界条件下不同节点数计算

本算例考察所提方法在单位圆域上 Dirichlet 边界条件下不同节点数的处理能力。计算中采用三种节点数的圆域进行对比，其余设置完全一致。该算例的直接目的在于验证本文方法能够在不改变空间离散框架的前提下，网格数的增加会有效增加精确度。圆域在两种圆域下的点分布如图 1~3 所示。

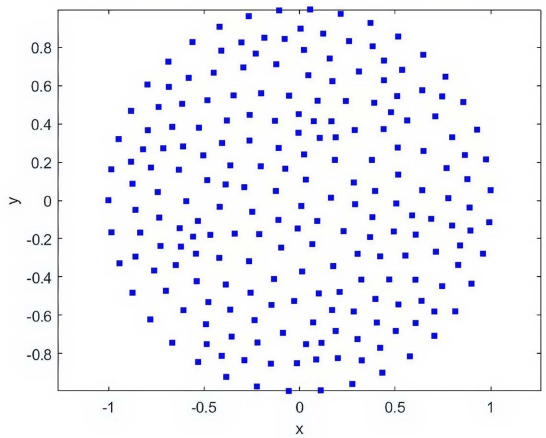



**Figure 1.** Distribution diagram of an 214-node circular domain under Dirichlet boundary conditions
**图 1.** Dirichlet 边界条件下 214 节点圆域分布图

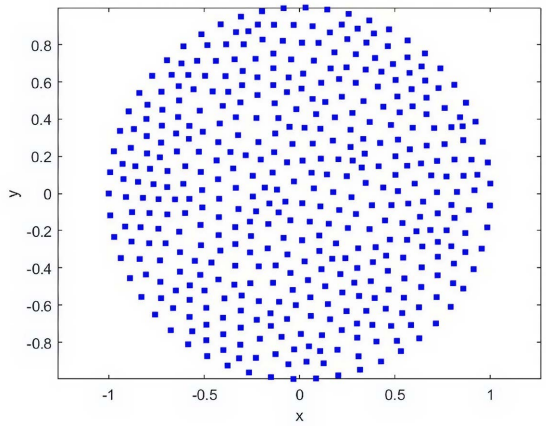



**Figure 2.** Distribution diagram of an 421-node circular domain under Dirichlet boundary conditions
**图 2.** Dirichlet 边界条件下 421 节点圆域分布图

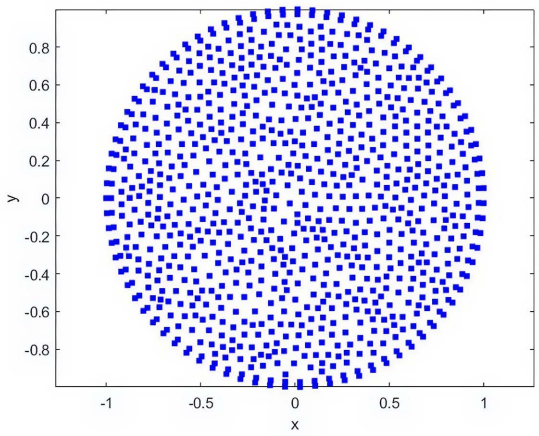



**Figure 3.** Distribution diagram of an 873-node circular domain under Dirichlet boundary conditions
**图 3.** Dirichlet 边界条件下 873 节点圆域分布图

而作为本文的第一个算例，三个节点数对应的数值解如图 4~6 所示。

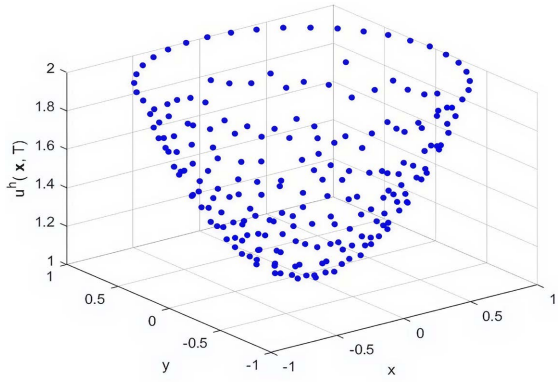



**Figure 4.** Approximate solution for a 214-node circular domain under Dirichlet boundary conditions
**图 4.** Dirichlet 边界条件下 214 节点圆域的近似解

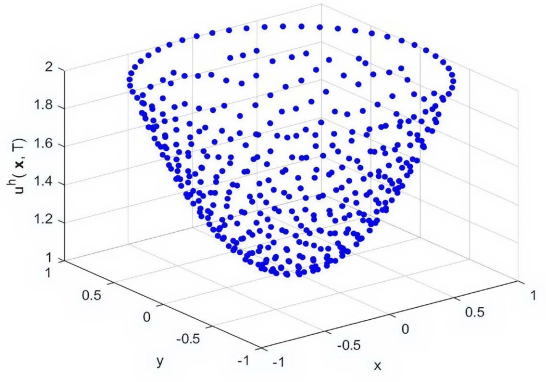



**Figure 5.** Approximate solution for a 412-node circular domain under Dirichlet boundary conditions
**图 5.** Dirichlet 边界条件下 412 节点圆域的近似解

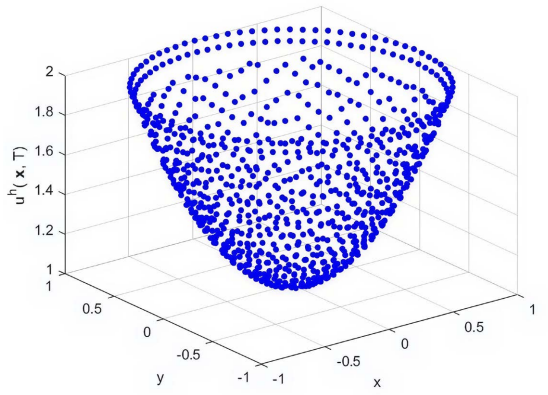



**Figure 6.** Approximate solution for a 873-node circular domain under Dirichlet boundary conditions
**图 6.** Dirichlet 边界条件下 873 节点圆域近似解

同时，三种数量节点下的绝对误差如图 7~9 所示。

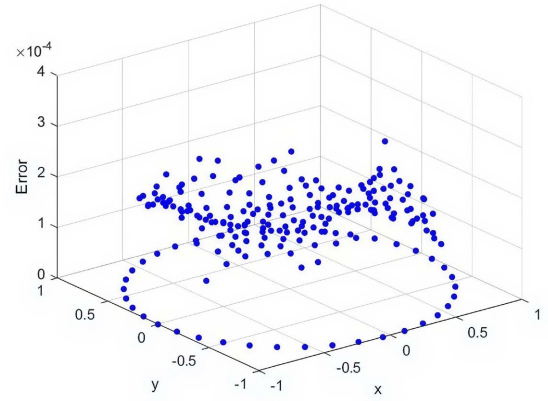



**Figure 7.** Absolute error for an 214-node circular domain under Dirichlet boundary conditions
**图 7.** Dirichlet 边界条件下 214 节点圆域绝对误差

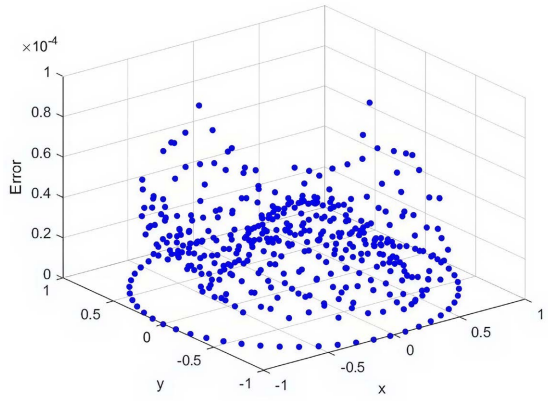



**Figure 8.** Absolute error for an 421-node circular domain under Dirichlet boundary conditions
**图 8.** Dirichlet 边界条件下 421 节点圆域绝对误差

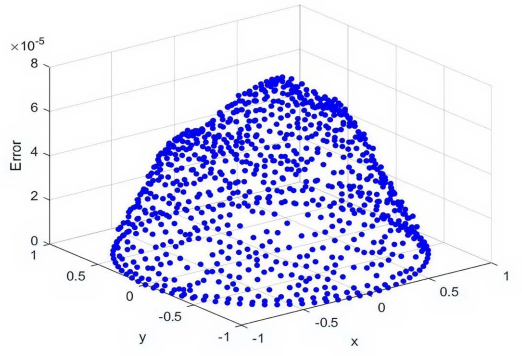



**Figure 9.** Absolute error for an 873-node circular domain under Dirichlet boundary conditions
**图 9.** Dirichlet 边界条件下 873 节点圆域绝对误差

由图可知，在 Dirichlet 边界条件下，采用本文的 RBF 方法所得到的近似解与精确解均良好吻合，因此可以得出结论，当前局部 RBF-DQ 方法能够以良好的精度给出变阶时间分数阶对流－扩散问题的数值解。

为了定量研究 RBF-DQ 的精度，下表显示了在变阶函数 $\alpha(x,y,t)$ 下的两种边界条件的三种误差精度数据。

**Table 1.** Table of node error accuracy for three types of nodes under Dirichlet boundary conditions
**表 1.** Dirichlet 边界下三种节点误差精度数据表

| | $L_2$ | $L_\infty$ | RMS |
|---|---|---|---|
| 214 节点 | 9.207052e−05 | 3.612642e−04 | 1.453617e−04 |
| 421 节点 | 1.776798e−05 | 8.436204e−05 | 8.436204e−05 |
| 873 节点 | 2.304432e−05 | 7.031569e−05 | 3.630021e−05 |

在表 1 中，三种圆域的误差分别列出。由表 1 知，当前局部 RBF-DQ 方法在三种节点数下的定量误差略有差异。其中，节点数越多，整体误差越小。因此可以得出结论，对于 Dirichlet 边界下的区域，当前方法的确可以能够以良好的精度给出方程的数值解，并且节点数越高，精度越高。

### 5.1.2. Neumann 边界条件下不同节点数计算

本算例考察所提方法在单位圆域上 Neumann 边界条件下不同节点数的处理能力。计算中采用三种节点数的圆域进行对比，其余设置完全一致，源项由上述精确解反推得到。在三种节点数下的点分布如图 10~12 所示。

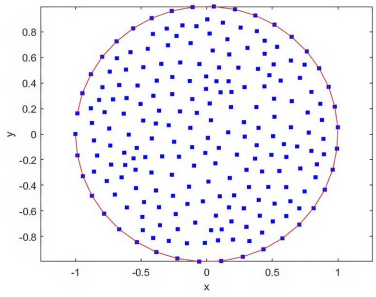



**Figure 10.** Distribution diagram of an 214-node circular domain under Neumann boundary conditions
**图 10.** Neumann 边界条件下 214 节点圆域分布图

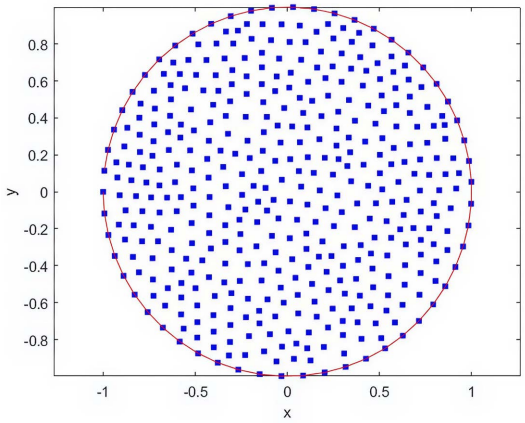



**Figure 11.** Distribution diagram of an 421-node circular domain under Neumann boundary conditions
**图 11.** Neumann 边界条件下 421 节点圆域分布图

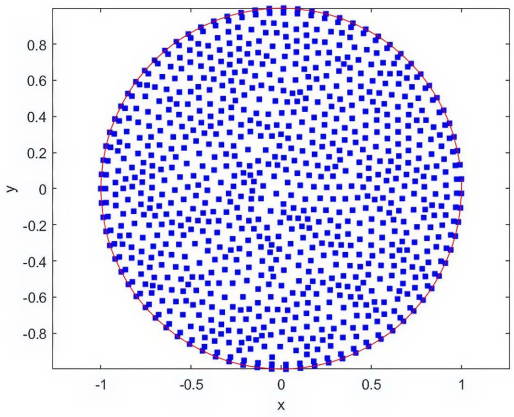



**Figure 12.** Distribution diagram of an 873-node circular domain under Neumann boundary conditions
**图 12.** Neumann 边界条件下 873 节点圆域分布图

三种节点数的圆域在 Neumann 边界条件下的近似解如图 13~15 所示。

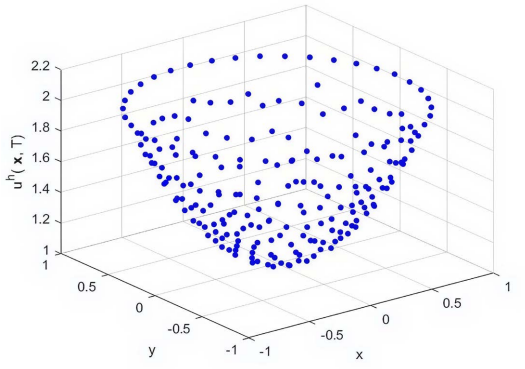



**Figure 13.** Approximate solution for a 214-node circular domain under Neumann boundary conditions
**图 13.** Neumann 边界条件下 214 节点圆域的近似解

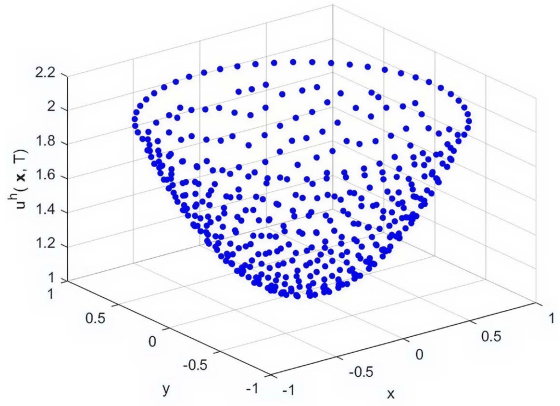



**Figure 14.** Approximate solution for a 421-node circular domain under Neumann boundary conditions
**图 14.** Neumann 边界条件下 421 节点圆域的近似解

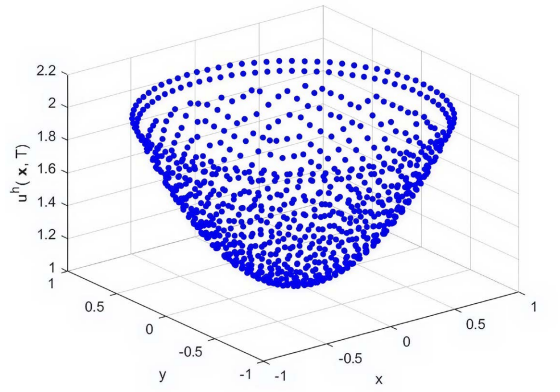



**Figure 15.** Approximate solution for a 873-node circular domain under Neumann boundary conditions
**图 15.** Neumann 边界条件下 873 节点圆域近似解

同时，三种节点数在 Neumann 边界条件下的绝对误差如图 16~18 所示。

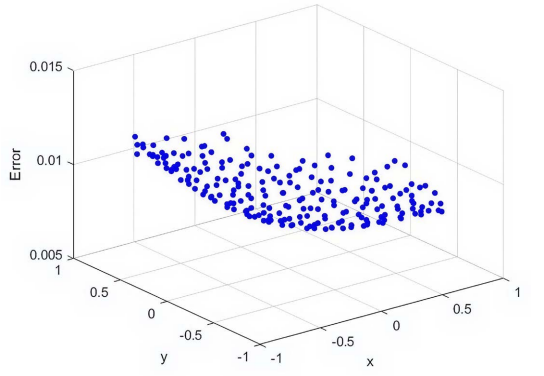



**Figure 16.** Absolute error for a 214-node circular domain under Neumann boundary conditions
**图 16.** Neumann 边界条件下 214 节点圆域绝对误差

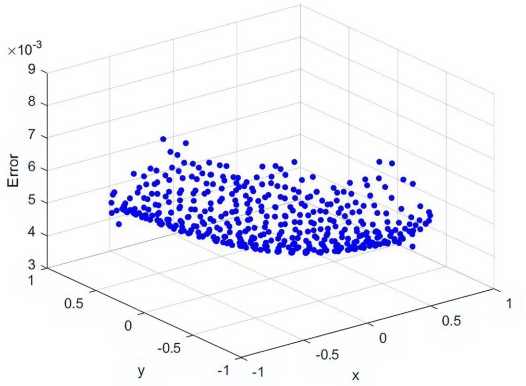



**Figure 17.** Absolute error for a 421-node circular domain under Neumann boundary conditions
**图 17.** Neumann 边界条件下 421 节点圆域绝对误差

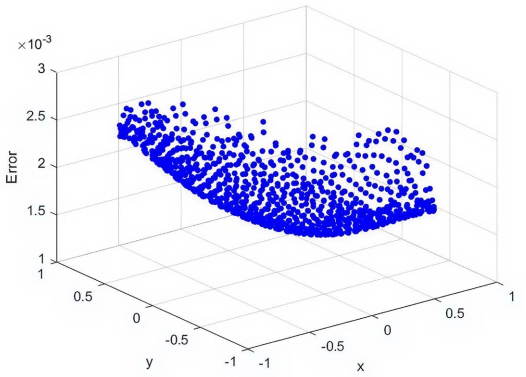



**Figure 18.** Absolute error for an 873-node circular domain under Neumann boundary conditions
**图 18.** Neumann 边界条件下 873 节点圆域绝对误差

由图可知，在 Neumann 边界条件下，采用本文的 RBF 方法所得到的近似解与精确解均良好吻合，因此可以得出结论，当前局部 RBF-DQ 方法能够以良好的精度给出变阶时间分数阶对流－扩散问题的数值解。为了定量研究在不同节点数下的精确度的差距，下表显示了在变阶函数 $\alpha(x,y,t)$ 下，不同节点数的圆域在两种边界条件下的三种误差精度数据。

**Table 2.** Table of node error accuracy for three types of nodes under Neumann boundary conditions
**表 2.** Neumann 边界下三种节点误差精度数据表

| | $L_2$ | $L_\infty$ | RMS |
|---|---|---|---|
| 214 节点 | 5.934291e−03 | 1.453306e−02 | 8.577190e−03 |
| 421 节点 | 3.192222e−03 | 8.626898e−03 | 4.995797e−03 |
| 873 节点 | 1.938020e−03 | 2.998520e−03 | 1.230306e−03 |

在表 2 中，三种圆域的结果分别列出。可以看到，本文局部 RBF-DQ 方法在变阶时间分数阶对流－扩散方程上，对于 Neumann 边界条件，随着节点数的增加，误差值随之减少。由此可以得出结论，随着

节点数的增加，精确度也随之提升。

### 5.2. 复杂几何区域下 Dirichlet 与 Neumann 边界条件的计算

实际工程问题中，计算区域常包含复杂边界。本算例选用五角星形区域，该区域边界含多个内凹/外凸角点，具有典型的几何奇性，可有效检验无网格方法的适应能力。实验中依然分别采用 Dirichlet、Neumann 两种边界设置，以系统考察本文方法在复杂几何条件下的数值行为。

五角星域在该两种条件下的点分布如图 19，图 20 所示。

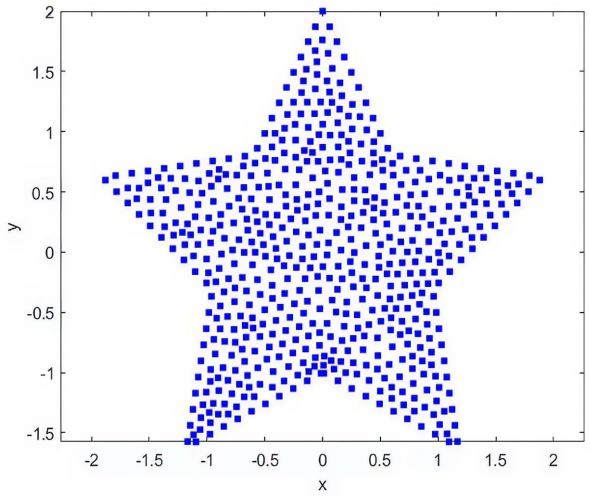



**Figure 19.** Node distribution diagram of a five-pointed star domain under Dirichlet boundary conditions
**图 19.** Dirichlet 边界条件下五角星节点分布图

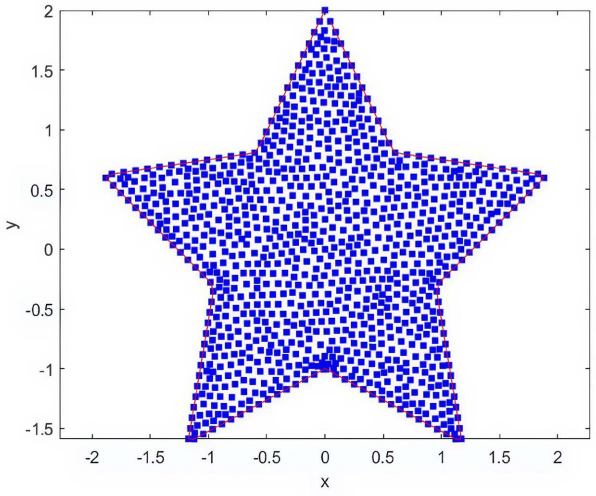



**Figure 20.** Node distribution diagram of a five-pointed star domain under Neumann boundary conditions
**图 20.** Neumann 边界条件下五角星节点分布图

而作为复杂边界问题的计算案例，其近似解如图 21，图 22 所示。

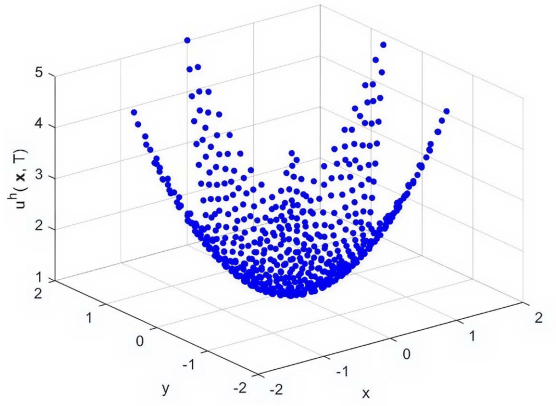



**Figure 21.** Approximate solution for a five-pointed star domain under Dirichlet boundary conditions
**图 21.** Dirichlet 边界条件下五角星区域近似解

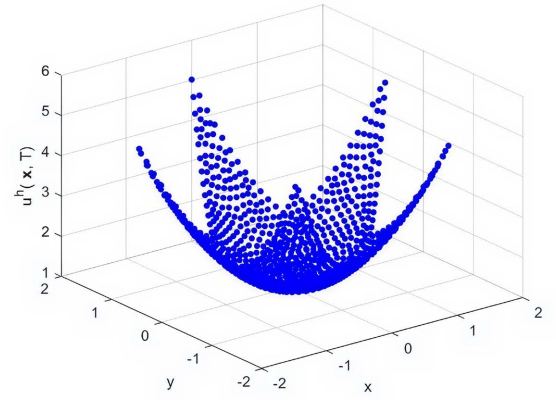



**Figure 22.** Approximate solution for a five-pointed star domain under Neumann boundary conditions
**图 22.** Neumann 边界条件下五角星区域近似解

同时，在两种边界下的绝对误差如图 23，图 24 所示。

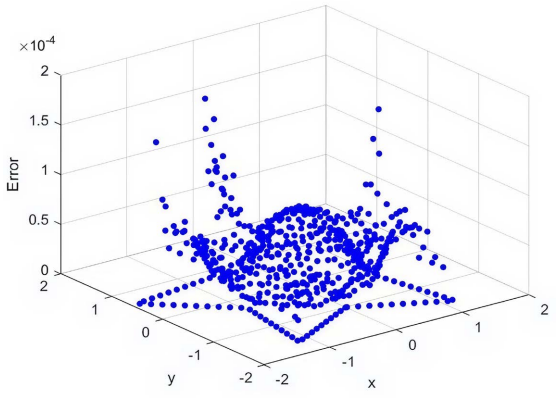



**Figure 23.** Exact error for a five-pointed star domain under Dirichlet boundary conditions
**图 23.** Dirichlet 边界条件下五角星区域精确误差

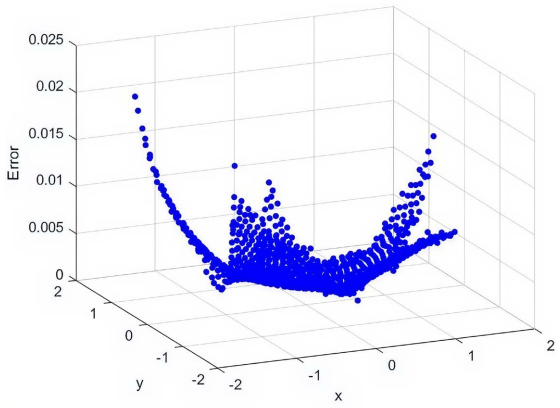



**Figure 24.** Exact error for a five-pointed star domain under Neumann boundary conditions
**图 24.** Neumann 边界条件下五角星区域精确误差

由图可知，在两种边界条件下，RBF 方法所得到的近似解与精确解在五角星区域下均良好吻合，相较于上一个算例，当前局部 RBF-DQ 方法仍然能够以良好的精度给出变阶时间分数阶对流–扩散问题的数值解。继续定量研究 RBF-DQ 的精度，下表显示了在变阶函数 $\alpha(x,y,t)$ 下的两种边界条件的三种误差精度数据(表 3)。

**Table 3.** Accuracy data table for three types of errors in the five-pointed star domain
**表 3.** 五角星区域下三种误差精度数据表

| | Dirichlet 边界 | Neumann 边界 |
|---|---|---|
| $L_2$ | 1.670722e−05 | 2.374231e−03 |
| $L_\infty$ | 1.605235e−04 | 2.271530e−02 |
| RMS | 3.990013e−05 | 5.701706e−03 |

在表中，两种边界的结果分别列出。可以看到，本文局部 RBF-DQ 方法在变阶时间分数阶对流–扩散方程上，对于复杂边界条件依然表现出很好的精度。

## 5.3. 参数敏感性分析

本节专门讨论局部 RBF-DQ 方法中的关键参数——MQ 基函数形状参数 $c$ 对数值解精度的影响。为了便于比较，参数敏感性分析统一在单位圆域、Dirichlet 边界条件下进行，节点数取 214 和 421，时间步长取 $\tau=1/800$，最终时刻取 $T=1$，变阶函数和精确解均与前述算例相同。误差指标仍采用式(29)定义的相对误差 $L_2$、最大误差 $L_\infty$ 和 RMS 误差。

### 5.3.1. 214 节点数下 $c$ 的影响

本文的 MQ 基函数可写为：

$$\phi_j(x)=\sqrt{r_j^2+c^2},\quad r_j=\left\|x-x_j\right\|_2$$

其中形状参数 $c$ 控制基函数的平坦程度。为考察 $c$ 的影响，固定局部支持域为两层最近邻点，分别取 $c$ 为：0.5，0.8，1，5，10，20。

并计算对应的数值解误差。误差变化如表 4 所示，误差随 $c$ 的变化趋势如图 25 所示。

**Table 4.** Error accuracy data table for different parameters $c$ under 214 nodes
**表 4.** 214 节点数下不同参数 $c$ 的误差精度数据表

| $c$ | $L_2$ | $L_\infty$ | RMS |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 5.041760e−03 | 1.578414e−02 | 7.959973e−03 |
| 0.8 | 2.298123e−03 | 7.309341e−03 | 3.628297e−03 |
| 1 | 1.522377e−03 | 4.895271e−03 | 2.403542e−03 |
| 5 | 9.207052e−05 | 3.612642e−04 | 1.453617e−04 |
| 10 | 1.231169e−04 | 3.091854e−04 | 1.943781e−04 |
| 20 | 1.256146e−04 | 3.399875e−04 | 1.983213e−04 |

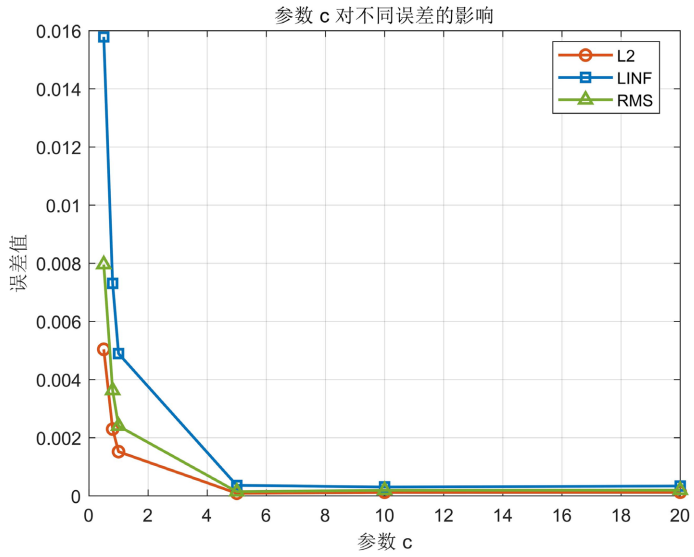



**Figure 25.** Effect of parameter $c$ on the error under the 214th node
**图 25.** 214 节点下参数 $c$ 对误差的影响

从图 25 可以看出，当 $c$ 过小时，局部近似容易过拟合，误差相对较大；随着 $c$ 增大，RBF-DQ 权系数的近似能力增强，误差逐渐下降并达到一个较优区间。但当 $c$ 继续增大时，基函数趋于平坦，RBF-DQ 局部权系数矩阵的条件数明显增大，数值稳定性下降，误差反而上升。因此，形状参数 $c$ 不宜过大或过小。在本节的测试条件下，较优的形状参数为 5，后续计算可优先取之。

### 5.3.2. 412 节点数下 $c$ 的影响

对于 412 节点数下的圆域，采用与前文相同的方法与取值进行计算，以进一步验证参数 $c$ 对误差的影响程度。

依然取 $c$ 为：0.5，0.8，1，5，10，20，计算对应的误差数值，如表 5 所示，趋势图如图 26 所示：

从图 26 可以看出，参数 $c$ 对于三种误差数据的影响与 214 节点几乎相同。因此，形状参数 $c$ 较优的取值为 5，该案例印证了前文取值的正确性，由此可以得出，参数 $c$ 取 5 时，对误差的影响最小。

**Table 5.** Error accuracy data table for different parameters $c$ under 412 nodes
**表 5.** 412 节点数下不同参数 $c$ 的误差精度数据表

| $c$ | $L_2$ | $L_\infty$ | RMS |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 7.061053e−03 | 2.072565e−02 | 1.105048e−02 |
| 0.8 | 3.354323e−03 | 9.877173e−03 | 5.249482e−03 |
| 1 | 2.288356e−03 | 6.754878e−03 | 3.581254e−03 |
| 5 | 1.776798e−05 | 8.436204e−05 | 2.780672e−05 |
| 10 | 9.192703e−05 | 2.425790e−04 | 1.438649e−04 |
| 20 | 1.147882e−04 | 3.145022e−04 | 1.796425e−04 |

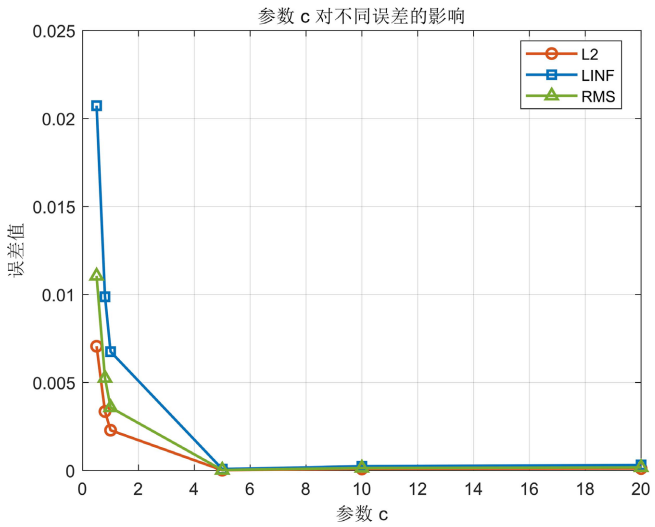



**Figure 26.** Effect of parameter $c$ on the error under the 412th node
**图 26.** 412 节点下参数 $c$ 对误差的影响

## 6. 结论

本文提出了一种基于局部无网格 RBF 的微分求积法，用于模拟二维变阶时间分数阶对流–扩散方程。该方法成功应用于具有 Dirichlet 和 Neumann 边界条件的二维任意区域数值算例。算例为变阶时间分数阶对流–扩散方程。为检验该方法对不规则区域的适用性，测试了复杂几何形状，并展示了该方法求解不规则区域问题的稳健性。数值结果表明，本文方法能够有效处理复杂几何区域上具有 Dirichlet 和 Neumann 边界条件的二维变阶时间分数阶对流–扩散方程。

## 致　谢

衷心感谢导师刘剑明教授对我的悉心指导，在他的指导下，我得以顺利完成论文的选题、研究、撰写工作，同时感谢刘教授提供的部分单时间分数阶代码。

## 参考文献

[1] Uchaikin, V.V. (2013) Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Higher Education Press.

[2] Chen, W., Sun, H. and Li, X. (2010) Fractional Derivative Modeling for Mechanical and Engineering Problems. Science Press.

[3] Liu, F., Zhuang, P. and Liu, Q. (2015) Numerical Method of Fractional Partial Differential Equation and Its Application.

Science Press.

[4] Lorenzo, C.F. and Hartley, T.T. (2002) Variable Order and Distributed Order Fractional Operators. *Nonlinear Dynamics*, **29**, 57-98. https://doi.org/10.1023/a:1016586905654

[5] Ramirez, L.E.S. and Coimbra, C.F.M. (2011) On the Variable Order Dynamics of the Nonlinear Wake Caused by a Sedimenting Particle. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **240**, 1111-1118. https://doi.org/10.1016/j.physd.2011.04.001

[6] Sun, H., Chen, W. and Chen, Y. (2009) Variable-Order Fractional Differential Operators in Anomalous Diffusion Modeling. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **388**, 4586-4592. https://doi.org/10.1016/j.physa.2009.07.024

[7] Meerschaert, M.M. and Tadjeran, C. (2004) Finite Difference Approximations for Fractional Advection-Dispersion Flow Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **172**, 65-77. https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.01.033

[8] Shen, S., Liu, F., Chen, J., Turner, I. and Anh, V. (2012) Numerical Techniques for the Variable Order Time Fractional Diffusion Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 10861-10870. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.04.047

[9] Zayernouri, M. and Karniadakis, G.E. (2015) Fractional Spectral Collocation Methods for Linear and Nonlinear Variable Order Fpdes. *Journal of Computational Physics*, **293**, 312-338. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.12.001

[10] Bhrawy, A.H. and Zaky, M.A. (2016) Numerical Algorithm for the Variable-Order Caputo Fractional Functional Differential Equation. *Nonlinear Dynamics*, **85**, 1815-1823. https://doi.org/10.1007/s11071-016-2797-y

[11] Tayebi, A., Shekari, Y. and Heydari, M.H. (2017) A Meshless Method for Solving Two-Dimensional Variable-Order Time Fractional Advection-Diffusion Equation. *Journal of Computational Physics*, **340**, 655-669. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.03.061

[12] Chen, R., Liu, F. and Anh, V. (2019) Numerical Methods and Analysis for a Multi-Term Time-Space Variable-Order Fractional Advection-Diffusion Equations and Applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **352**, 437-452. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.12.027

[13] Dwivedi, K.D., Rajeev, Das, S. and Gomez-Aguilar, J.F. (2021) Finite Difference/Collocation Method to Solve Multi Term Variable-Order Fractional Reaction-Advection-Diffusion Equation in Heterogeneous Medium. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **37**, 2031-2045. https://doi.org/10.1002/num.22648

[14] Hussain, M. and Haq, S. (2019) Weighted Meshless Spectral Method for the Solutions of Multi-Term Time Fractional Advection-Diffusion Problems Arising in Heat and Mass Transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **129**, 1305-1316. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.10.039

[15] Tian, X., Reutskiy, S.Y. and Fu, Z.J. (2022) A Novel Meshless Collocation Solver for Solving Multi-Term Variable-Order Time Fractional PDEs. *Engineering with Computers*, **38**, 1527-1538. https://doi.org/10.1007/s00366-021-01298-7

[16] Schumer, R., Benson, D.A., Meerschaert, M.M. and Baeumer, B. (2003) Fractal Mobile/Immobile Solute Transport. *Water Resources Research*, **39**, 1296-1307. https://doi.org/10.1029/2003wr002141

[17] Zhao, L., Liu, F. and Anh, V.V. (2017) Numerical Methods for the Two-Dimensional Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **74**, 2253-2268. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.07.008

[18] Liu, G.R. and Gu, Y.T. (2005) An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming. Springer.

[19] Fasshauer, G.E. (2007) Meshfree Approximation Methods with MATLAB. World Scientific. https://doi.org/10.1142/6437

[20] Franke, R. (1982) Scattered Data Interpolation: Tests of Some Methods. *Mathematics of Computation*, **38**, 181-200. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1982-0637296-4

[21] Shu, C., Ding, H. and Yeo, K.S. (2003) Local Radial Basis Function-Based Differential Quadrature Method and Its Application to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**, 941-954. https://doi.org/10.1016/s0045-7825(02)00618-7

[22] Shu, C., Ding, H., Chen, H.Q. and Wang, T.G. (2005) An Upwind Local RBF-DQ Method for Simulation of Inviscid Compressible Flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 2001-2017. https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.07.008

[23] Liu, J., Li, X. and Hu, X. (2019) A RBF-Based Differential Quadrature Method for Solving Two-Dimensional Variable-Order Time Fractional Advection-Diffusion Equation. *Journal of Computational Physics*, **384**, 222-238. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.12.043