Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 67-78
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511433

Hans汉斯

MPVC问题的Scholtes松弛方法收敛性研究

刘　婷

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2026年10月9日；录用日期：2026年11月2日；发布日期：2026年11月17日

摘　要

带消失约束的数学规划问题(MPVC)在工程设计、最优控制和路径规划等领域应用广泛。然而，因其可行集非凸，导致标准非线性规划问题中的多数约束规范失效，给MPVC问题的算法设计与收敛性分析带来困难。Scholtes松弛方法是求解该类问题最常用的松弛方法之一，已有收敛性结论在MPVC-MFCQ条件下保证收敛到T-稳定点，数值表现良好。本文基于Scholtes松弛方法，在MPVC-MFCQ假设下证明迭代序列收敛到更强的M-稳定点，并在更弱的MPVC-CCP约束规范下得到了相同的收敛结论。

关键词

带消失约束的数学规划问题，松弛方法，稳定点，约束规范

Convergence Research of the Scholtes Relaxation Method for MPVC

Ting Liu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: October 9, 2026; accepted: November 2, 2026; published: November 17, 2026

Abstract

Mathematical programs with vanishing constraints (MPVC) are widely applied in fields such as engineering design, optimal control, and path planning. However, due to the nonconvexity of their feasible sets, most constraint qualifications in standard nonlinear programming fail to hold, which poses difficulties for the algorithm design and convergence analysis of MPVC problems. The Scholtes relaxation method is one of the most commonly used regularization approaches for solving such problems. Existing convergence results guarantee convergence to T-stationary points under the MPVC-MFCQ condition, and the method performs well numerically. In this paper, based on the Scholtes relaxation method, we prove that the iterative sequence converges to the stronger M-stationary

文章引用: 刘婷. MPVC 问题的 Scholtes 松弛方法收敛性研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 67-78.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511433

points under the MPVC-MFCQ assumption, and we obtain the same convergence result under the weaker MPVC-CCP constraint qualification.

Keywords

Mathematical Programs with Vanishing Constraints, Relaxation Method, Stationary Point, Constraint Qualifications

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文主要研究带消失约束的数学规划问题[1] (Mathematical programs with vanishing constraints，简称MPVC)，具体形式如下

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{s.t. } & g_i(x) \le 0, \quad (i=1,\cdots,m), \\ & h_i(x) = 0, \quad (i=1,\cdots,p), \\ & H_i(x) \ge 0, \quad (i=1,\cdots,l), \\ & G_i(x) H_i(x) \le 0, \quad (i=1,\cdots,l). \end{aligned} \tag{1}$$

其中，函数 $f, g_i, h_i, H_i, G_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 均连续可微。该类问题在金融经济、最优控制和交通运输等众多领域具有重要应用。

由于消失约束的特殊结构，在其任意可行解处均不满足标准非线性规划(Nonlinear program，简称 NLP)问题中的大多约束规范[1]，进而 KKT 条件不再适用 MPVC 问题，这使得 MPVC 问题在理论分析与算法设计上都存在困难。因此，在过去的几十年里，人们提出了其他的稳定性条件，例如弱稳定性、T-稳定性、M-稳定性[2]以及 S-稳定性，与此同时，从 MPVC 的自身结构出发，研究 MPVC 的约束规范，例如：MPVC-LICQ、MPVC-MFCQ 以及更弱的 MPVC-CCP 等。

近年来，学者们针对 MPVC 问题开展了大量算法研究，其中松弛方法易于求解，是求解 MPVC 问题的主要方法之一。Scholtes [3]针对带均衡约束的数学规划(mathematical programs with equilibrium constraints，简称 MPEC)问题提出了 Scholtes 松弛方法。基于 MPEC 的 Scholtes 松弛法，2012 年 Achtziger 等人[4]将 Scholtes 松弛方法应用于求解 MPVC 中，并证明了在 MPVC-LICQ 条件下，松弛问题的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker)点列收敛到 T-稳定点。2012 年 Hoheisel 等人[5]将局部松弛方法应用于求解 MPVC 中。2012 年 Hoheisel 等人[6]提出了一种新的松弛方法，并证明了松弛问题的 KKT 点列收敛到 MPVC 的 M-稳定点。Dussault 等人[7]提出了新型蝴蝶松弛方法，并引入 MPVC-wGCQ 和 MPVC-CRSC 等约束规范，并证明了 MPVC-CRSC 条件下，松弛问题的 KKT 点列收敛到 MPVC 的 M-稳定点。

然而在实际数值计算过程中，松弛问题的 KKT 点通常难以求得，算法迭代仅能得到近似稳定点。针对非精确求解情形，2015 年 Kanzow 和 Schwartz [8]研究了 MPEC 问题的 Scholtes 松弛方法，并证明松弛问题的 ε_k -KKT 点列收敛到 C-稳定点。此外，Ramos [9]在 MPEC 问题中通过引入更弱的 MPEC-CCP 约束规范，证明了在 MPEC-CCP 约束规范和适当的假设条件下，松弛问题的 ε_k -KKT 点列收敛到 M-稳定点。基于 MPEC 问题中 Scholtes 松弛方法的非精确思想，Hoheisel 等人[10]研究了 MPVC 的 Scholtes 松

弛方法，并证明了在 MPVC-MFCQ 条件下，松弛问题的 ε_k -KKT 点列收敛到 T-稳定点。

本文研究了 Scholtes 松弛方法在 MPVC 问题中的非精确思想。在 MPVC-MFCQ 条件下，增加适当假设，证明松弛问题的 ε_k -KKT 点列收敛到更强的 M-稳定点，以及在更弱的 MPVC-CCP 条件下依然可收敛到 M-稳定点。

本文的结构安排如下：第 2 章介绍预备知识；第 3 章介绍 Scholtes 松弛方法收敛性分析；第 4 章给出结论。

2. 基础知识

本节介绍一些基础知识，这些知识在后文中起到重要作用。我们首先回顾 NLP 问题：

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &\text{s.t. } g_i(x) \le 0, \quad (i=1,\cdots,m), \\ &\quad h_i(x) = 0, \quad (i=1,\cdots,p). \end{aligned} \tag{2}$$

设 Z 为问题(2)的可行集，定义 $I_g(x^*) = \{i \mid g_i(x^*) = 0\}$。

定义 2.1 [10]设 $x^* \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \ge 0$。若存在乘子 $\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^p$ 使得

$$\left\| \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(x^*) \right\|_\infty \le \varepsilon,$$

其中，$g(x^*) \le \varepsilon, \lambda_i \ge -\varepsilon, |g_i(x^*)\lambda_i| \le \varepsilon, (i=1,\cdots,m), |h_i(x^*)| \le \varepsilon, (i=1,\cdots,p)$，则称 x^* 是问题(2)的 ε-稳定点。

为了介绍 MPVC 的稳定性条件，设 x^* 是问题(1)的可行点，引入下列指标集：

$$\begin{aligned} &I_g = \{i \mid g_i(x^*) = 0\}, \quad I_+ = \{i \mid H_i(x^*) > 0\}, \quad I_0 = \{i \mid H_i(x^*) = 0\}, \\ &I_{0+} = \{i \mid H_i(x^*) = 0, G_i(x^*) > 0\}, \quad I_{+0} = \{i \mid H_i(x^*) > 0, G_i(x^*) = 0\}, \\ &I_{0-} = \{i \mid H_i(x^*) = 0, G_i(x^*) < 0\}, \quad I_{+-} = \{i \mid H_i(x^*) > 0, G_i(x^*) < 0\}, \\ &I_{00} = \{i \mid H_i(x^*) = 0, G_i(x^*) = 0\}. \end{aligned}$$

定义 2.2 [10]设 x^* 是 MPVC 问题的可行点。

(a) 弱稳定点：称 x^* 是弱稳定点，若存在乘子 $\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^p, \eta^H, \eta^G \in \mathbb{R}^l$，使得

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(x^*) - \sum_{i=1}^{l} \eta_i^H \nabla H_i(x^*) + \sum_{i=1}^{l} \eta_i^G \nabla G_i(x^*) = 0, \\ &\lambda_i \ge 0 \, (i \in I_g), \quad \lambda_i = 0 \, (i \notin I_g), \\ &\eta_i^H = 0 \, (i \in I_+), \quad \eta_i^H \ge 0 \, (i \in I_{0-}), \quad \eta_i^H \text{无要求} \ (i \in I_{0+} \cup I_{00}), \\ &\eta_i^G = 0 \, (i \in I_{+-} \cup I_{0-} \cup I_{0+}), \quad \eta_i^G \ge 0 \, (i \in I_{+0} \cup I_{00}); \end{aligned}$$

(b) T-稳定点：若 x^* 是弱稳定点，且对任意 $i \in I_{00}$，成立 $\eta_i^G \eta_i^H \le 0$，则 x^* 是 T-稳定点。

(c) M-稳定点：若 x^* 是弱稳定点，且对任意 $i \in I_{00}$，成立 $\eta_i^G \eta_i^H = 0$，则 x^* 是 M-稳定点。

(d) S-稳定点：若 x^* 是弱稳定点，且对任意 $i \in I_{00}$，满足 $\eta_i^H \ge 0, \eta_i^G = 0$，则 x^* 是 S-稳定点。

以上稳定性强弱关系如下：

S-稳定点 $\Rightarrow$ M-稳定点 $\Rightarrow$ T-稳定点 $\Rightarrow$ 弱稳定点

并且 S-稳定点是 MPVC 的 KKT 点。

定义 2.4 (MPVC-MFCQ) [10]设 x^* 是 MPVC 问题的可行点，若梯度

$$\nabla g_i\left(x^*\right)\left(i\in I_g\right),\left(-\nabla H_i\left(x^*\right)\right)\left(i\in I_{0-}\right),\nabla G_i\left(x^*\right)\left(i\in I_{+0}\cup I_{00}\right)\text{ 且 }\nabla h_i\left(x^*\right)\left(i=1,\cdots,p\right),\nabla H_i\left(x^*\right)\left(i\in I_{0+}\cup I_{00}\right)$$

是正线性无关的，则称可行点 x^* 满足 MPVC-MFCQ。

定义 2.5 (MPVC-CCP) [7]设 x^* 是 MPVC 问题的可行点，构造集值映射 $x\rightrightarrows K_{\mathrm{MPVC}}(x)$ 且 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned}K_{\mathrm{MPVC}}(x)=\Bigg\{&\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g\nabla g_i(x)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^h\nabla h_j(x)+\sum_{i\in I_{+0}\cup I_{00}}\lambda_i^G\nabla G_i(x)\\&-\sum_{i\in I_{0+}\cup I_{00}\cup I_{0-}}\lambda_i^H\nabla H_i(x)\,|\,\lambda_i^g\ge 0\left(i\in I_g\right),\lambda_i^H\ge 0\left(i\in I_{0-}\right),\\&\lambda_i^G\ge 0\left(i\in I_{+0}\cup I_{00}\right),\lambda_i^G\lambda_i^H=0\left(i\in I_{00}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

在 x^* 处满足外半连续性：

$$\limsup_{x\to x^*}K_{\mathrm{MPVC}}(x)\subseteq K_{\mathrm{MPVC}}\left(x^*\right),$$

则称可行点 x^* 满足 MPVC-CCP。

引理 2.6 [7]设 $x^*\in Z$ 满足 MPVC-CCP。给定序列 $\left\{\delta^k\right\},\left\{x^k\right\}$ 使得 $\delta^k\to 0$, $x^k\to x^*$，对任意 $k\in\mathbb{N}$，有

$$-\nabla f\left(x^k\right)\in K_{\mathrm{MPVC}}\left(x^k\right)+B_{\delta^k}(0).$$

则 x^* 是 MPVC 问题的 M-稳定点。

3. Scholtes 松弛法收敛性分析

本章介绍 MPVC 问题 Scholtes 松弛方法，几何解释见图 1。该方法的核心思想是引入一个单调递减趋于 0 的正参数序列 t_k，将原问题中的消失约束 $H_i(x)G_i(x)\le 0$ 近似为 $H_i(x)G_i(x)\le t_k$。随着 t_k 逐步减小至零，松弛子问题的解逐渐逼近原问题的解。具体形式为，对于给定的 $t_k\downarrow 0$，构造光滑非线性规划子问题 $\mathrm{NLP}^s(t_k)$，

$$\begin{aligned}\min\ & f(x)\\ \text{s.t.}\ & g_i(x)\le 0,\quad (i=1,\cdots,m),\\ & h_i(x)=0,\quad (j=1,\cdots,p),\\ & H_i(x)\ge 0,\quad (i=1,\cdots,l),\\ & G_i(x)H_i(x)\le t_k,\quad (i=1,\cdots,l).\end{aligned}\tag{3}$$

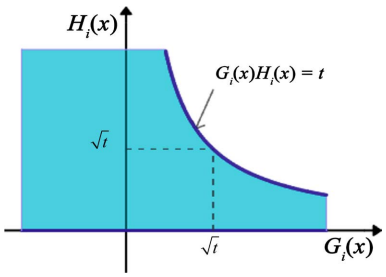


Figure 1. Geometric interpretation of the relaxation by Scholtes
图 1. Scholtes 松弛的几何解释

下面将讨论 Scholtes 松弛方法的收敛性分析，在 MPVC-MFCQ 条件下，增加适当假设，证明松弛问题的 ε_k -KKT 点列收敛到更强的 M-稳定点，以及在更弱的 MPVC-CCP 条件下依然可收敛到 M-稳定点。

定理 3.1 令 $\{t_k\}\downarrow 0$，$\{\varepsilon_k\}\downarrow 0$ 且 $\varepsilon_k = O(t_k)$，$\left\{x^k\right\}$ 是 $\mathrm{NLP}^s(t_k)$ 的 ε_k -稳定点序列，且 $x^k \to x^*$。假设 x^* 满足 MPVC-MFCQ，且存在常数 $c>0$，使得对充分大的 k 和所有的 $i \in I_{00}$，满足

$$\left(G_i\left(x^k\right), H_i\left(x^k\right)\right) \notin \left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : (1-c)t_k < ab < (1+c)t_k\right\},$$

则 x^* 是原 MPVC 问题的 M-稳定点。

证明：由于 x^k 是 $\mathrm{NLP}^s(t_k)$ 的 ε_k -稳定点，则存在乘子 $\left(\mu^k, \lambda^k, v^k, \delta^k\right)$ 满足

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla f\left(x^k\right) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i^k \nabla g_i\left(x^k\right) + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j^k \nabla h_j\left(x^k\right) - \sum_{i=1}^{l} v_i^k \nabla H_i\left(x^k\right)\right.\\ &\left. + \sum_{i=1}^{l}\left[\delta_i^k G_i\left(x^k\right)\nabla H_i\left(x^k\right) + \delta_i^k H_i\left(x^k\right)\nabla G_i\left(x^k\right)\right]\right\|_\infty \le \varepsilon_k,\end{aligned} \tag{4}$$

$$g_i\left(x^k\right) \le \varepsilon_k,\ \mu_i^k \ge -\varepsilon_k,\ \left|\mu_i^k g_i\left(x^k\right)\right| \le \varepsilon_k, (i=1,\cdots,m),\left|h_i\left(x^k\right)\right| \le \varepsilon_k,\ \ (j=1,\cdots,p), \tag{5}$$

$$H_i\left(x^k\right) \ge -\varepsilon_k,\ \ v_i^k \ge -\varepsilon_k,\ \left|v_i^k H_i\left(x^k\right)\right| \le \varepsilon_k,\ \ (i=1,\cdots,l), \tag{6}$$

$$\delta_i^k \ge -\varepsilon_k, G_i\left(x^k\right)H_i\left(x^k\right) - t_k \le \varepsilon_k,\ \left|\delta_i^k\left(H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right) - t_k\right)\right| \le \varepsilon_k,\ \ (i=1,\cdots,l). \tag{7}$$

首先，由 f, g_i, h_i, H_i, G_i 的连续性和 $t_k \downarrow 0$，$\varepsilon_k \downarrow 0$，可知极限点 x^* 是 MPVC 问题的可行点。对所有的 $i \in I_+$，有 $H_i\left(x^*\right) > 0$，由式(6)可得，对于充分大的 k，有 $v_i^k = 0$，因此 $\lim\limits_{k\to\infty} v_i^k = 0$。对所有的 $i \in I_0$，有 $\liminf\limits_{k\to\infty} v_i^k \ge 0$。对所有的 $i \in I_{+-}$，由 $G_i\left(x^*\right)H_i\left(x^*\right) < 0$ 和式(7)推出 $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_i^k = 0$。对所有的 $i \notin I_{+-}$，有 $\liminf\limits_{k\to\infty}\delta_i^k \ge 0$。

后续分析中将反复用到 $\left|\delta_i^k\right| \to \infty$。根据前文的讨论，可知 $i \notin I_{+-}$ 且 $\delta_i^k \to \infty$。对于充分大的 k，有 $\varepsilon_k > 0$，则由式(7)推出

$$\frac{1}{\varepsilon_k}\left|G_i\left(x^k\right)H_i\left(x^k\right) - t_k\right| \le \frac{1}{\delta_i^k} \to 0.$$

由 $\varepsilon_k = O(t_k)$ 得到

$$\frac{1}{\varepsilon_k}G_i\left(x^k\right)H_i\left(x^k\right) \not\to 0. \tag{8}$$

定义新乘子 $\eta_i^{G,k}, \eta_i^{H,k} \in \mathbb{R}^l$，

$$\eta_i^{G,k} = \begin{cases}\delta_i^k H_i\left(x^k\right), & i \in I_{00}\cup I_{+0},\\ 0, & i \in I_{0+}\cup I_{0-}\cup I_{+-},\end{cases} \qquad \eta_i^{H,k} = \begin{cases}v_i^k - \delta_i^k G_i\left(x^k\right), & i \in I_0,\\ v_i^k, & i \in I_+.\end{cases}$$

于是(4)式可以改写为如下形式，

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla f\left(x^k\right) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i^k \nabla g_i\left(x^k\right) + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j^k \nabla h_j\left(x^k\right) - \sum_{i=1}^{l}\eta_i^{H,k}\nabla H_i\left(x^k\right)\right.\\ &\left. + \sum_{i\in I_{+-}\cup I_{+0}}\left(\delta_i^k G_i\left(x^k\right)\right)\nabla H_i\left(x^k\right) + \sum_{i=1}^{l}\eta_i^{G,k}\nabla G_i\left(x^k\right) + \sum_{i\in I_{0+}\cup I_{0-}\cup I_{+-}}\left(\delta_i^k H_i\left(x^k\right)\right)\nabla G_i\left(x^k\right)\right\|_\infty \le \varepsilon_k.\end{aligned} \tag{9}$$

下面用反证法证明乘子序列$\left(\lambda^k,\mu^k,\eta^{G,k},\eta^{H,k},\delta_I^k\right)$有界。

定义$I=I_{0+}\cup I_{0-}\cup I_{+-}\cup I_{+0}$。若$\left\|\left(\lambda^k,\mu^k,\eta^{G,k},\eta^{H,k},\delta_I^k\right)\right\|\to\infty$，不妨设

$$\frac{\left(\lambda^k,\mu^k,\eta^{G,k},\eta^{H,k},\delta_I^k\right)}{\left\|\left(\lambda^k,\mu^k,\eta^{G,k},\eta^{H,k},\delta_I^k\right)\right\|}\to\left(\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\eta}^G,\bar{\eta}^H,\bar{\delta}_I\right)\neq 0\quad(k\to\infty).$$

由于对所有的$i\in I_{+0}$，有$G_i\left(x^k\right)\to 0$，对所有的$i\in I_{0+}\cup I_{0-}$，有$H_i\left(x^k\right)\to 0$，以及对所有的$i\in I_{+-}$，有$\delta_i^k\to 0$，对式(9)两边同除以$\frac{1}{\varepsilon_k}\left|G_i\left(x^k\right)H_i\left(x^k\right)\right|\le\left|G_i\left(x^k\right)\right|\to 0$，并取极限得到

$$0=\sum_{i=1}^{m}\bar{\mu}_i\nabla g_i\left(x^*\right)+\sum_{j=1}^{p}\bar{\lambda}_j\nabla h_j\left(x^*\right)-\sum_{i=1}^{l}\bar{\eta}_i^H\nabla H_i\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{l}\bar{\eta}_i^G\nabla G_i\left(x^*\right).$$

由定义可知$\bar{\mu}_i\ge 0(i=1,\cdots,m)$，若$\bar{\mu}_i>0$，则对于充分大的$k$，存在常数$b>0$，使得$\bar{\mu}_i>b>0$，又因$\left|\mu_i^k g_i\left(x^k\right)\right|\le\varepsilon_k$，则$\left|g_i\left(x^k\right)\right|\le\frac{\varepsilon_k}{\left|\mu_i^k\right|}<\frac{\varepsilon_k}{b}\to 0$，则$g_i\left(x^*\right)=0$，得到$\operatorname{supp}(\mu)\subseteq I_g\left(x^*\right)$。由于对所有的$i\in I_+$有，$\nu_i^k\to 0$，可得$\operatorname{supp}\left(\bar{\eta}^H\right)\subseteq I_{00}\cup I_{0+}\cup I_{0-}$，而且$\operatorname{supp}\left(\bar{\eta}^G\right)\subseteq I_{00}\cup I_{+0}$。因为MPVC-MFCQ在$x^*$处成立，因此还需要验证对所有的$i\in I_{+0}\cup I_{00}$，有$\bar{\eta}_i^G\ge 0$，以及对所有的$i\in I_{0-}$，有$\bar{\eta}_i^H\ge 0$。由式(6) (7)得对于充分大的$k$，有

$$i\in I_{0-}\Rightarrow\eta_i^{H,k}=\nu_i^k+\delta_i^k\left(-G_i\left(x^k\right)\right)\ge-\varepsilon_k\left(1-G_i\left(x^k\right)\right)\to 0\Rightarrow\bar{\eta}_i^H\ge 0,$$

$$i\in I_{+0}\Rightarrow\eta_i^{G,k}=\delta_i^k H_i\left(x^k\right)\ge-\varepsilon_k H_i\left(x^k\right)\to 0\Rightarrow\bar{\eta}_i^G\ge 0.$$

(反证法)假设对所有的$i\in I_{00}$，有$\bar{\eta}_i^G<0$，由$\eta_i^{G,k}=\delta_i^k H_i\left(x^k\right)$以及$H_i\left(x^k\right)\to 0$以及$\liminf_{k\to\infty}\delta_i^k\ge 0$，推出$\delta_i^k\to+\infty$，则对于充分大的$k$，有$H_i\left(x^k\right)<0$且$\varepsilon_k>0$。因此由式(6)可知$H_i\left(x^k\right)\in\left[-\varepsilon_k,0\right)$，则$\frac{1}{\varepsilon_k}\left|H_i\left(x^k\right)\right|\le 1$，因此

$$\frac{1}{\varepsilon_k}\left|G_i\left(x^k\right)H_i\left(x^k\right)\right|\le\left|G_i\left(x^k\right)\right|\to 0.$$

故与式(8)矛盾。因此$\bar{\lambda}=\bar{\mu}=\bar{\eta}^G=\bar{\eta}^H=0$，而$\left(\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\eta}^G,\bar{\eta}^H,\bar{\delta}_I\right)$是非零向量，从而$\bar{\delta}_I\neq 0$。由于对所有的$i\in I_{+-}$，有$\delta_i^k\to 0$，于是$\bar{\delta}_{I_{+-}}=0$。对所有的$i\in I_{+0}$，有$H_i\left(x^*\right)>0$且$\bar{\delta}_i H_i\left(x^*\right)=\bar{\eta}_i^G=0$，则$\bar{\delta}_{I_{+0}}=0$，因此，存在$i\in I_{0+}\cup I_{0-}$满足$\bar{\delta}_i\neq 0$，则$\bar{\delta}_i>0$。对于所有的$i\in I_{0-}$，有$\bar{\eta}_i^H=0$且$\eta_i^{H,k}=\nu_i^k-\delta_i^k G_i\left(x^k\right)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\nu_i^k}{\left\|\left(\lambda^k,\mu^k,\eta^{G,k},\eta^{H,k},\delta_I^k\right)\right\|}=\bar{\delta}_i G_i\left(x^*\right)<0,$$

这与式(6)矛盾。因此，仅存在$i\in I_{0+}$，有$\bar{\delta}_i>0$成立，由$\bar{\eta}_i^H=0$，则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\nu_i^k}{\left\|\left(\lambda^k,\mu^k,\eta^{G,k},\eta^{H,k},\delta_I^k\right)\right\|}=\bar{\delta}_i G_i\left(x^*\right)>0,$$

则$\nu_i^k\to\infty$，由式(6)有$\left|H_i\left(x^k\right)\right|\le\frac{\varepsilon_k}{\nu_i^k}\to 0$。对于充分大的$k$有$\varepsilon_k>0$，则

$$\frac{1}{\varepsilon_k}\left|G_i\left(x^k\right)H_i\left(x^k\right)\right|\le\left|G_i\left(x^k\right)\right|\frac{1}{\nu_i^k}\to 0,$$

这与式(8)矛盾。因此 $\bar{\delta}_I=0$，则 $\left(\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\eta}^G,\bar{\eta}^H,\bar{\delta}_I\right)$ 是零向量，与 $\left(\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\eta}^G,\bar{\eta}^H,\bar{\delta}_I\right)\neq 0$ 矛盾。因此，序列 $\left(\lambda^k,\mu^k,\eta^{G,k},\eta^{H,k},\delta_I^k\right)$ 有界。不失一般性地假设序列 $\left(\lambda^k,\mu^k,\eta^{G,k},\eta^{H,k},\delta_I^k\right)$ 收敛到 $\left(\lambda^*,\mu^*,\eta^{G,*},\eta^{H,*},\delta_I^*\right)$，对(9)式两边取极限，得到

$$\nabla f\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i^*\nabla g_i\left(x^*\right)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^*\nabla h_j\left(x^*\right)-\sum_{i=1}^{l}\eta_i^{H,*}\nabla H_i\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{l}\eta_i^{G,*}\nabla G_i\left(x^*\right)=0,$$

由上面的证明可知，该极限满足

$$\operatorname{supp}\left(\mu^*\right)\subseteq I^g\left(x^*\right),\ \operatorname{supp}\left(\eta^{G,*}\right)\subseteq I_{00}\cup I_{+0},\ \operatorname{supp}\left(\eta^{H,*}\right)\subseteq I_{00}\cup I_{0+}\cup I_{0-},$$

以及对所有的 $i\in I_g$ 有 $\mu_j^*\ge 0$，对所有的 $i\in I_{0-}$，有 $\eta_i^{H,*}\ge 0$，对所有的 $i\in I_{+0}\cup I_{00}$，有 $\eta_i^{G,*}\ge 0$。即 x^* 是弱稳定点。

下面用反证法证明 x^* 是 M-稳定点。

已知对所有的 $i\in I_{00}$ 有 $\eta_i^{G,*}\ge 0$，为了证明对所有的 $i\in I_{00}$ 有 $\eta_i^{G,*}\eta_i^{H,*}=0$，只需证明对所有的 $i\in I_{00}$，$\eta_i^{G,*}>0$ 时，有 $\eta_i^{H,*}=0$，则只需排除 $\eta_i^{G,*}>0$ 且 $\eta_i^{H,*}\neq 0$。

定义 $A=\eta_i^{G,*}>0$，$B=\eta_i^{H,*}\neq 0$。由乘子定义 $\eta_i^{G,k}=\delta_i^kH_i\left(x^k\right)$ 且极限 $\eta_i^{G,*}>0$，对所有的 $i\in I_{00}$ 有 $H_i\left(x^k\right)\to 0$，故 $\delta_i^k\to+\infty$。定义 $\rho_k=\delta_i^kH_i\left(x^k\right)-A$，则 $\rho_k\to 0$。对于充分大的 k 有 $\delta_i^k\neq 0$，于是

$$H_i\left(x^k\right)=\frac{A+\rho_k}{\delta_i^k}. \tag{10}$$

由式(7)以及对于充分大 k 有 $\delta_i^k>0$ 成立，得 $\left|H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right)-t_k\right|\le\frac{\varepsilon_k}{\delta_i^k}$，由 $\varepsilon_k=O(t_k)$，存在常数 $c>0$ 使得 $\varepsilon_k\le Ct_k$，代入得 $\left|H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right)-t_k\right|\le\frac{Ct_k}{\delta_i^k}$，即 $\frac{\left|H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right)-t_k\right|}{t_k}\le\frac{C}{\delta_i^k}$。

定义 $\sigma_k=H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right)-t_k$。于是 $H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right)=t_k\left(1+\frac{\sigma_k}{t_k}\right)$。由 $\delta_i^k\to+\infty$ 有 $\frac{\sigma_k}{t_k}\to 0$。将式(10)代入可得

$$\delta_i^kG_i\left(x^k\right)=\frac{\left(\delta_i^k\right)^2t_k}{A+\rho_k}\left(1+\frac{\sigma_k}{t_k}\right). \tag{11}$$

由式(6)得 $\left|\nu_i^k\right|\le\frac{\varepsilon_k}{\left|H_i\left(x^k\right)\right|}$。将(10)式与 $\varepsilon_k\le Ct_k$ 代入，有 $\left|\nu_i^k\right|\le\frac{Ct_k}{\left(A+\rho_k\right)/\delta_i^k}=Ct_k\delta_i^k\cdot\frac{1}{A+\rho_k}$，由于 $\rho_k\to 0$，对于充分大 k，有 $A+\rho_k>\frac{A}{2}$。取常数 $M=\frac{2C}{A}$，则对于充分大的 k 有

$$\left|\nu_i^k\right|\le Mt_k\delta_i^k \tag{12}$$

假设 $B>0$，由 $\eta_i^{H,k}=\nu_i^k-\delta_i^kG_i\left(x^k\right)$ 及 $\eta_i^{H,k}\to B$，结合式(11)可得

$$\nu_i^k=\frac{\left(\delta_i^k\right)^2t_k}{A+\rho_k}\left(1+\frac{\sigma_k}{t_k}\right)+B+\left(\eta_i^{H,k}-B\right).$$

由于 $\rho_k \to 0, \frac{\sigma_k}{t_k} \to 0, \eta_i^{H,k} - B \to 0$ 且 $B > 0$，对于充分大的 k，有 $v_i^k \geq \frac{\left(\delta_i^k\right)^2 t_k}{2A}$，结合式(12)可得 $\frac{\left(\delta_i^k\right)^2 t_k}{2A} \leq M t_k \delta_i^k$。对于充分大的 k，有 $t_k > 0$ 且 $\delta_i^k > 0$，两边同除以 $t_k \delta_i^k$，有 $\frac{\delta_i^k}{2A} \leq M$，即 $\delta_i^k \leq 2AM$，这与 $\delta_i^k \to +\infty$ 矛盾。

假设 $B < 0$，证明序列 $\left(\delta_i^k\right)^2 t_k$ 有界。若 $\left(\delta_i^k\right)^2 t_k \to +\infty$，则从式(11)可知 $\delta_i^k G_i\left(x^k\right) \to +\infty$。但由式(12)可知 $\left|v_i^k\right| \leq M t_k \delta_i^k$ 且 $\lim_{k\to\infty} \frac{M t_k \delta_i^k}{\left(\delta_i^k\right)^2 t_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{M}{\delta_i^k} = 0$，其增长阶数远小于 $\delta_i^k G_i\left(x^k\right)$。于是 $\eta_i^{H,k} = v_i^k - \delta_i^k G_i\left(x^k\right) \to -\infty$，这与 $\eta_i^{H,k} \to B$ 矛盾，故 $\left(\delta_i^k\right)^2 t_k$ 有界，则 $t_k \delta_i^k = \frac{\left(\delta_i^k\right)^2 t_k}{\delta_i^k} \to 0$。由式(12)得 $v_i^k \to 0$，则 $-\delta_i^k G_i\left(x^k\right) \to B$，即

$$\delta_i^k G_i\left(x^k\right) \to -B, \tag{13}$$

结合式(11)和式(13)，取极限得到

$$\left(\delta_i^k\right)^2 t_k \to A(-B) > 0. \tag{14}$$

现在考虑比值 $\frac{H_i\left(x^k\right) G_i\left(x^k\right)}{t_k} = \frac{\left(\delta_i^k H_i\left(x^k\right)\right)\left(\delta_i^k G_i\left(x^k\right)\right)}{\left(\delta_i^k\right)^2 t_k}$，由式(13)和式(14)知以及 $\delta_i^k H_i\left(x^k\right) \to A$。因此 $\frac{H_i\left(x^k\right) G_i\left(x^k\right)}{t_k} \to \frac{A \cdot (-B)}{A(-B)} = 1$。即存在正整数 K，使得当 $k > K$ 时，$\left|\frac{H_i\left(x^k\right) G_i\left(x^k\right)}{t_k} - 1\right| < c$，与假设矛盾。

因此，只要 $\eta_i^{G,*} > 0$，就不可能有 $\eta_i^{H,*} \neq 0$，只能有 $\eta_i^{H,*} = 0$，从而 $\eta_i^{G,*} \eta_i^{H,*} = 0$，若 $\eta_i^{G,*} = 0$，则乘积自然为 0。综上，对于所有 $i \in I_{00}$，都有 $\eta_i^{G,*} \eta_i^{H,*} = 0$，即 x^* 是 M-稳定点。

注：Ramos [9]在 MPEC 框架下针对 Scholtes 松弛方法中引入了该假设条件，用于排除迭代序列渐近贴近松弛子问题有效边界 $G_i\left(x^k\right) H_i\left(x^k\right) = t_k$ 的病态情形。本文将该条件迁移至 MPVC 问题，用于规避迭代点落入该带状邻域所引发的理论分析病态。从假设本身来看，该条件存在一定局限性，限制了定理的适用范围，且无法依靠原问题数据进行先验验证，但该假设本质上是对迭代路径的非退化要求，数值上可通过监测迭代点与松弛边界的接近程度来观察退化趋势，并辅以调整松弛参数或引入微小扰动等策略以降低退化风险。

定理 3.1 在 MPVC-MFCQ 条件下证明了 M-稳定性收敛结论，但该约束规范依赖梯度线性无关性，限制了退化场景的应用。下面将上述结果推广至更弱的 MPVC-CCP 约束规范，仍保证相同的收敛结论，从而拓展理论的适用范围。

定理 3.2 令 $\{t_k\} \downarrow 0$，$\{\varepsilon_k\} \downarrow 0$ 且 $\varepsilon_k = o(t_k)$，$\left\{x^k\right\}$ 是 $\mathrm{NLP}^s(t_k)$ 的 ε_k-稳定点序列，且 $x^k \to x^*$。假设存在乘子 $\left(\mu^k, \lambda^k, v^k, \delta^k\right) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$，满足 $\max\left\{\left|v_i^k H_i\left(x^k\right)\right|, \left|\delta_i^k\left(H_i\left(x^k\right) G_i\left(x^k\right) - t_k\right)\right| : i \in \{1, \cdots, l\}\right\} \leq \varepsilon_k$。假设 x^* 满足 MPVC-CCP，且存在常数 $c > 0$，使得对充分大的 k 和所有的 i，满足

$$\left(G_i\left(x^k\right), H_i\left(x^k\right)\right) \notin \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (1-c) t_k < ab < (1+c) t_k\right\},$$

则 x^* 是原 MPVC 问题的 M-稳定点。

证明：由于 x^k 是 $\mathrm{NLP}^s(t_k)$ 的 ε_k-稳定点，由定义，存在乘子 $\left(\mu^k,\lambda^k,v^k,\delta^k\right)$ 满足

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^k\nabla h_j(x^k)-\sum_{i=1}^{l}v_i^k\nabla H_i\left(x^k\right)\right.\\&\left.+\sum_{i=1}^{l}\left[\delta_i^k G_i\left(x^k\right)\nabla H_i\left(x^k\right)+\delta_i^k H_i\left(x^k\right)\nabla G_i\left(x^k\right)\right]\right\|_\infty\le\varepsilon_k,\end{aligned}\tag{15}$$

$$g_i\left(x^k\right)\le\varepsilon_k,\ \mu_i^k\ge-\varepsilon_k,\left|\mu_i^k g_i\left(x^k\right)\right|\le\varepsilon_k,(i=1,\cdots,m),\left|h_i\left(x^k\right)\right|\le\varepsilon_k,\ \ (j=1,\cdots,p),\tag{16}$$

$$H_i\left(x^k\right)\ge-\varepsilon_k,\ \ v_i^k\ge-\varepsilon_k,\ \left|v_i^k H_i\left(x^k\right)\right|\le\varepsilon_k,\ \ (i=1,\cdots,l),\tag{17}$$

$$\delta_i^k\ge-\varepsilon_k,\ G_i\left(x^k\right)H_i\left(x^k\right)-t_k\le\varepsilon_k,\ \left|\delta_i^k\left(H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right)-t_k\right)\right|\le\varepsilon_k,\ \ (i=1,\cdots,l).\tag{18}$$

定义新乘子 $\eta_i^{G,k},\eta_i^{H,k}$，

$$\eta_i^{G,k}=\begin{cases}\delta_i^k H_i\left(x^k\right), & i\in I_{00}\cup I_{+0},\\0, & i\in I_{0+}\cup I_{0-}\cup I_{+-},\end{cases}\qquad\eta_i^{H,k}=\begin{cases}v_i^k-\delta_i^k G_i\left(x^k\right), & i\in I_0,\\v_i^k, & i\in I_+.\end{cases}$$

将 $\eta_i^{H,k},\eta_i^{G,k}$ 代入式(15)为

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^{l}\eta_i^{H,k}\nabla H_i\left(x^k\right)\right.\\&\left.+\sum_{i\in I_{+-}\cup I_{+0}}\left(\delta_i^k G_i\left(x^k\right)\right)\nabla H_i\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{l}\eta_i^{G,k}\nabla G_i\left(x^k\right)+\sum_{i\in I_{0+}\cup I_{0-}\cup I_{+-}}\left(\delta_i^k H_i\left(x^k\right)\right)\nabla G_i\left(x^k\right)\right\|_\infty\le\varepsilon_k.\end{aligned}\tag{19}$$

由式(18)得 $\left|\delta_i^k\cdot t_k\cdot\left(\dfrac{H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right)}{t_k}-1\right)\right|\le\varepsilon_k$，由 $t_k>0$ 得

$$\left|\delta_i^k\right|\cdot\left|\frac{H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right)}{t_k}-1\right|\le\frac{\varepsilon_k}{t_k}.\tag{20}$$

结合 $\varepsilon_k=o(t_k)$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\varepsilon_k}{t_k}=0$。

(反证法)假设存在某个指标 i，使得 $\delta_i^k\not\to 0$，则 $\dfrac{H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right)}{t_k}\to 1$，这与 $\left((1-c)t_k<H_i\left(x^k\right)G_i\left(x^k\right)<(1+c)t_k\right)$ 矛盾。因此对于所有的 i，当 $k\to\infty$ 时，必有 $\delta_i^k\to 0$。

定义 R^k，

$$R^k=\sum_{i\in I_{+-}\cup I_{+0}}\left(\delta_i^k G_i\left(x^k\right)\right)\nabla H_i\left(x^k\right)+\sum_{i\in I_{0+}\cup I_{0-}\cup I_{+-}}\left(\delta_i^k H_i\left(x^k\right)\right)\nabla G_i\left(x^k\right).$$

由 $x^k\to x^*$，$\nabla H_i\left(x^k\right),\nabla G_i\left(x^k\right)$ 为连续函数，因此序列 $\left\{\nabla H_i\left(x^k\right)\right\},\left\{\nabla G_i\left(x^k\right)\right\}$ 有界，且 $\delta_i^k\to 0$，故 $\left\|R^k\right\|_\infty\to 0$。令 $\tilde{\varepsilon}^k=\varepsilon_k+\left\|R^k\right\|_\infty$，则 $\tilde{\varepsilon}^k\to 0$，且式(19)可以改写为

$$\left\|\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^{l}\eta_i^{H,k}\nabla H_i\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^{l}\eta_i^{G,k}\nabla G_i\left(x^k\right)\right\|_\infty\le\tilde{\varepsilon}_k,\tag{21}$$

对于所有的 i 都有 $\delta_i^k\to 0$，则 $\eta_i^{G,k}=\delta_i^k H_i\left(x^k\right)\to 0$ 且 $\eta_i^{H,k}=v_i^k-\delta_i^k G_i\left(x^k\right)\to v_i^k$，因此统一取 $\hat{\eta}_i^{G,k}=0$，

则当 $i\in I_{00}\cup I_{+0}$ 时，有 $\hat{\eta}_i^{G,k}\geq 0$，当 $i\in I_{00}$ 时，有 $\hat{\eta}_i^{H,k}\hat{\eta}_i^{G,k}=0$，当 $i\in I_{0-}$ 时，取 $\hat{\eta}_i^{H,k}=\max\left\{v_i^k,0\right\}$，则 $\hat{\eta}_i^{H,k}\geq 0$，对于其他指标集，取 $\hat{\eta}_i^{H,k}=\eta_i^{H,k}$。当 $i\in I_g$ 时，取 $\hat{\mu}_i^k=\max\left\{\mu_i^k,0\right\}$，则 $\hat{\mu}_i^k\geq 0$，对于其他指标集，取 $\hat{\mu}_i^k=\mu_i^k$。

因此，对所有的 i 都满足，

$$\left\|\mu_i^k-\hat{\mu}_i^k\right\|\to 0,\ \left\|\left(\eta_i^{H,k},\eta_i^{G,k}\right)-\left(\hat{\eta}_i^{H,k},\hat{\eta}_i^{G,k}\right)\right\|\to 0. \tag{22}$$

乘子 $\left(\hat{\eta}_i^{H,k},\hat{\eta}_i^{G,k}\right)$ 严格符合 $K_{\mathrm{MPVC}}\left(x^k\right)$ 内部全部乘子约束规则。

定义 $\gamma^k=\sum_{i=1}^m\hat{\mu}_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j=1}^p\lambda_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^l\hat{\eta}_i^{H,k}\nabla H_i\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^l\hat{\eta}_i^{G,k}\nabla G_i\left(x^k\right)$，则 $\gamma^k\in K_{\mathrm{MPVC}}\left(x^k\right)$。

由于序列 $\left\{\nabla g_i\left(x^k\right)\right\},\left\{\nabla H_i\left(x^k\right)\right\},\left\{\nabla G_i\left(x^k\right)\right\}$ 有界，定义

$$C=\max_{1\leq i\leq l}\sup_{k\geq 1}\left\{\left\|\nabla g_i\left(x^k\right)\right\|,\left\|\nabla H_i\left(x^k\right)\right\|,\left\|\nabla G_i\left(x^k\right)\right\|\right\}<+\infty.$$

定义邻域半径，

$$\rho^k=\tilde{\varepsilon}_k+C\sum_{i=1}^l\left\|\left(\eta_i^{H,k},\eta_i^{G,k}\right)-\left(\hat{\eta}_i^{H,k},\hat{\eta}_i^{G,k}\right)\right\|+C\sum_{i=1}^l\left\|\mu_i^k-\hat{\mu}_i^k\right\|. \tag{23}$$

结合 $\tilde{\varepsilon}^k\to 0$ 和式(22)，可得 $\rho^k\to 0$。

为了应用引理 2.6，改写下述表达式，

$$\begin{aligned}\nabla f\left(x^k\right)+\gamma^k=&\left[\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^m\mu_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j=1}^p\lambda_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^l\eta_i^{H,k}\nabla H_i\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^l\eta_i^{G,k}\nabla G_i\left(x^k\right)\right]\\&-\sum\left(\mu_i^k-\hat{\mu}_i^k\right)\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^l\left(\eta_i^{H,k}-\hat{\eta}_i^{H,k}\right)\nabla H_i\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^l\left(\eta_i^{G,k}-\hat{\eta}_i^{G,k}\right)\nabla G_i\left(x^k\right).\end{aligned}$$

由无穷范数的三角不等式有

$$\begin{aligned}\left\|\nabla f\left(x^k\right)+\gamma^k\right\|_\infty\leq&\left\|\nabla f\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^m\mu_i^k\nabla g_i\left(x^k\right)+\sum_{j=1}^p\lambda_j^k\nabla h_j\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^l\eta_i^{H,k}\nabla H_i\left(x^k\right)+\sum_{i=1}^l\eta_i^{G,k}\nabla G_i\left(x^k\right)\right\|_\infty\\&+\left\|\sum_{i=1}^m(\mu_i^k-\hat{\mu}_i^k)\nabla g_i\left(x^k\right)\right\|_\infty+\left\|\sum_{i=1}^l\left(\eta_i^{H,k}-\hat{\eta}_i^{H,k}\right)\nabla H_i\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^l\left(\eta_i^{G,k}-\hat{\eta}_i^{G,k}\right)\nabla G_i\left(x^k\right)\right\|_\infty.\end{aligned}$$

由式(21)得

$$\left\|\nabla f\left(x^k\right)+\gamma^k\right\|_\infty\leq\tilde{\varepsilon}_k+\left\|\sum_{i=1}^m\left(\mu_i^k-\hat{\mu}_i^k\right)\nabla g_i\left(x^k\right)\right\|_\infty+\left\|\sum_{i=1}^l\left(\eta_i^{H,k}-\hat{\eta}_i^{H,k}\right)\nabla H_i\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^l\left(\eta_i^{G,k}-\hat{\eta}_i^{G,k}\right)\nabla G_i\left(x^k\right)\right\|_\infty.$$

其中，我们对上式右边的第二项和第三项进行放缩得到，

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{i=1}^m\left(\mu_i^k-\hat{\mu}_i^k\right)\nabla g_i\left(x^k\right)\right\|_\infty+\left\|\sum_{i=1}^l\left(\eta_i^{H,k}-\hat{\eta}_i^{H,k}\right)\nabla H_i\left(x^k\right)-\sum_{i=1}^l\left(\eta_i^{G,k}-\hat{\eta}_i^{G,k}\right)\nabla G_i\left(x^k\right)\right\|_\infty\\&\leq\sum_{i=1}^l\left|\mu_i^k-\hat{\mu}_i^k\right|\cdot\left\|\nabla g_i\left(x^k\right)\right\|+\sum_{i=1}^l\left|\eta_i^{H,k}-\hat{\eta}_i^{H,k}\right|\cdot\left\|\nabla H_i\left(x^k\right)\right\|+\sum_{i=1}^l\left|\eta_i^{G,k}-\hat{\eta}_i^{G,k}\right|\cdot\left\|\nabla G_i\left(x^k\right)\right\|\\&\leq C\sum_{i=1}^l\left|\mu_i^k-\hat{\mu}_i^k\right|+C\sum_{i=1}^l\left(\left|\eta_i^{H,k}-\hat{\eta}_i^{H,k}\right|+\left|\eta_i^{G,k}-\hat{\eta}_i^{G,k}\right|\right)\\&\leq C\sum_{i=1}^l\left\|\mu_i^k-\hat{\mu}_i^k\right\|+C\sum_{i=1}^l\left\|\left(\eta_i^{H,k},\eta_i^{G,k}\right)-\left(\hat{\eta}_i^{H,k},\hat{\eta}_i^{G,k}\right)\right\|.\end{aligned}$$

则 $\left\|\nabla f\left(x^k\right)+\gamma^k\right\|_{\infty} \leq \tilde{\varepsilon}_k + C\sum_{i=1}^{l}\left\|\left(\eta_i^{H,k},\eta_i^{G,k}\right)-\left(\hat{\eta}_i^{H,k},\hat{\eta}_i^{G,k}\right)\right\| + C\sum_{i=1}^{l}\left\|\mu_i^k-\hat{\mu}_i^k\right\|$，由式(23)得 $\left\|\nabla f\left(x^k\right)+\gamma^k\right\|_{\infty} \leq \rho^k$，因此 $-\nabla f\left(x^k\right)=\gamma^k-\left(\nabla f\left(x^k\right)+\gamma^k\right)\in\gamma^k+B_{\rho^k}(0)$，又因为 $\gamma^k\in K_{\mathrm{MPVC}}\left(x^k\right)$，则

$$-\nabla f\left(x^k\right)\in K_{\mathrm{MPVC}}\left(x^k\right)+B_{\rho^k}(0),$$

由引理 2.6 可知，x^* 是原 MPVC 问题的 M-稳定点。

4. 数值实验

本章将选取两个 MPVC 算例进行求解，通过数值实验，验证算法的有效性。算例(a)展示了算法收敛到 M-稳定点而非 T-稳定点的优势，算例(b)验证了在 MPVC-MFCQ 失效，但 MPVC-CCP 成立的问题上算法的有效性。

例 4.1

$$\begin{aligned}\min\ & (x_1-1)^2+(x_2-2)^2\\ \text{s.t.}\ & x_1\geq 0,\\ & x_1x_2\leq 0.\end{aligned}$$

最优解为 $x^*=(0,2)$，最优值为 $f\left(x^*\right)=1$。在 $x^*=(0,2)$ 处是 M-稳定点，对应的唯一乘子为 $\eta_H=-2,\eta_G=0$。在 $x^*=(0,0)$ 是 T-稳定点，对应的唯一乘子为 $\eta_H=-2,\eta_G=4$，但 $\eta^H\eta^G\neq 0$，不是 M-稳定点。例 4.1 的数值结果表明，数值实验中有可能存在收敛至 T-稳定点但非 M-稳定点的伪稳定点，M-稳定点对候选点做进一步筛选，排除这类伪稳定点，更接近局部最优解。

例 4.2

$$\begin{aligned}\min\ & x_1^2+(x_2-1)^2\\ \text{s.t.}\ & x_1^3\geq 0,\\ & x_1^3x_2\leq 0.\end{aligned}$$

最优解为 $x^*=(0,1)$，最优值为 $f\left(x^*\right)=0$。

引入松弛参数 $t_k\downarrow 0$，Scholtes 松弛问题为

$$\begin{aligned}\min\ & x_1^2+(x_2-1)^2\\ \text{s.t.}\ & x_1^3\geq 0,\\ & x_1^3x_2\leq t_k.\end{aligned}$$

因此松弛问题最优解为 $x^*=(0,1)$，最优值为 $f\left(x^*\right)=0$。在 $x^*=(0,1)$ 处，$\nabla f\left(x^k\right)=(0,0)$，$\nabla H\left(x^*\right)=\left(3x_1^2,0\right)\big|_{(0,1)}=(0,0)$，由于 $\nabla H\left(x^*\right)$ 为零向量，因此 MPVC-MFCQ 在 x^* 处失效。在 $x^*=(0,1)$ 处 $K_{\mathrm{MPVC}}(x)=\left\{-\lambda^H\nabla H\right\}=\{(0,0)\}$，$\limsup_{x\to x^*}K_{\mathrm{MPVC}}(x)=\{(0,0)\}$，则 $\limsup_{x\to x^*}K_{\mathrm{MPVC}}(x)\subseteq K_{\mathrm{MPVC}}\left(x^*\right)$，MPVC-CCP 在 x^* 处成立。迭代序列 $x^k\to x^*=(0,1)$，取 $\rho_k=t_k\to 0$，则 $-\nabla f\left(x^k\right)=(0,0)\in K_{\mathrm{MPVC}}\left(x^k\right)+B_{\rho^k}(0)$。由引理 2.6 可知，极限点 $x^*=(0,1)$ 是原问题的 M-稳定点。例 4.2 的数值结果表明，在 MPVC-MFCQ 不成立 MPVC-CCP 成立时，也可达到 M-稳定点。

5. 结论

本文研究了带消失约束数学规划中 Scholtes 松弛方法的收敛性。在 MPVC-MFCQ 条件下证明松弛问

题的 ε_k -KKT 点列收敛到更强的 M-稳定点，并在更弱的 MPVC-CCP 约束规范下得到相同结论，为 MPVC 问题的数值求解提供了更完善的理论基础。未来可将分析框架推广至其他松弛方法，或在更弱的约束规范下开展进一步的收敛性研究。

参考文献

[1] Achtziger, W. and Kanzow, C. (2007) Mathematical Programs with Vanishing Constraints: Optimality Conditions and Constraint Qualifications. *Mathematical Programming*, **114**, 69-99. https://doi.org/10.1007/s10107-006-0083-3

[2] Hoheisel, T. and Kanzow, C. (2008) Stationary Conditions for Mathematical Programs with Vanishing Constraints Using Weak Constraint Qualifications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **337**, 292-310. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.087

[3] Scholtes, S. (2001) Convergence Properties of a Regularization Scheme for Mathematical Programs with Complementarity Constraints. *SIAM Journal on Optimization*, **11**, 918-936. https://doi.org/10.1137/s1052623499361233

[4] Achtziger, W., Kanzow, C. and Hoheisel, T. (2012) On a Relaxation Method for Mathematical Programs with Vanishing Constraints. *GAMM-Mitteilungen*, **35**, 110-130. https://doi.org/10.1002/gamm.201210009

[5] Hoheisel, T., Kanzow, C. and Schwartz, A. (2012) Convergence of a Local Regularization Approach for Mathematical Programmes with Complementarity or Vanishing Constraints. *Optimization Methods and Software*, **27**, 483-512. https://doi.org/10.1080/10556788.2010.535170

[6] Hoheisel, T., Kanzow, C. and Schwartz, A. (2012) Mathematical Programs with Vanishing Constraints: A New Regularization Approach with Strong Convergence Properties. *Optimization*, **61**, 619-636. https://doi.org/10.1080/02331934.2011.608164

[7] Dussault, J.-., Haddou, M. and Migot, T. (2019) Mathematical Programs with Vanishing Constraints: Constraint Qualifications, Their Applications, and a New Regularization Method. *Optimization*, **68**, 509-538. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1542531

[8] Kanzow, C. and Schwartz, A. (2015) The Price of Inexactness: Convergence Properties of Relaxation Methods for Mathematical Programs with Complementarity Constraints Revisited. *Mathematics of Operations Research*, **40**, 253-275. https://doi.org/10.1287/moor.2014.0667

[9] Ramos, A. (2021) Mathematical Programs with Equilibrium Constraints: A Sequential Optimality Condition, New Constraint Qualifications and Algorithmic Consequences. *Optimization Methods and Software*, **36**, 45-81. https://doi.org/10.1080/10556788.2019.1702661

[10] Hoheisel, T., Pablos, B., Pooladian, A., Schwartz, A. and Steverango, L. (2022) A Study of One-Parameter Regularization Methods for Mathematical Programs with Vanishing Constraints. *Optimization Methods and Software*, **37**, 503-545. https://doi.org/10.1080/10556788.2020.1797025