Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 187-200
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511442

Hans汉斯

先验不确定下零故障验证的贝叶斯稳健设计

张福原[1]，蒋昊良[2*]

[1]青岛科技大学数理学院，山东 青岛
[2]青岛科技大学信息科学技术学院，山东 青岛

收稿日期：2026年10月17日；录用日期：2026年11月12日；发布日期：2026年11月18日

摘　要

针对高可靠产品零故障验证中历史信息利用与先验设定不确定性并存的问题，本文提出一种贝叶斯稳健试验设计方法。基于Beta-二项模型，利用历史成功比例的Wilson区间刻画先验均值范围，以折扣有效样本量描述信息强度的不确定性，构造二维先验参数集合，并通过最坏情形后验可靠度超越概率约束确定最小试验次数。利用NIST Dataplot公开寿命数据开展数值分析，历史任务成功率为0.9717。当最低可接受可靠度为0.95、风险阈值为0.05时，经典零故障、固定先验贝叶斯和稳健贝叶斯方法所需试验次数分别为59、25和73；可靠度要求提高至0.99时，分别增至299、365和847。结果表明，历史信息并不必然节省试验量，其作用取决于先验与验证目标的相容性；稳健约束能够量化先验不确定性对应的额外试验需求。10万次Monte Carlo模拟所得通过频率与理论概率基本一致。研究为高可靠产品的试验资源配置与风险权衡提供了可解释的统计设计思路。

关键词

零故障试验，贝叶斯稳健设计，先验不确定性，Beta先验，Monte Carlo模拟

Robust Bayesian Design of Zero-Failure Reliability Demonstration under Prior Uncertainty

Fuyuan Zhang[1], Haoliang Jiang[2*]

[1]School of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao Shandong
[2]School of Information Science and Technology, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao Shandong

Received: October 17, 2026; accepted: November 12, 2026; published: November 18, 2026

*通讯作者。

文章引用: 张福原, 蒋昊良. 先验不确定下零故障验证的贝叶斯稳健设计[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 187-200.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511442

Abstract

To address the challenges of utilizing historical information while accounting for prior uncertainty in zero-failure reliability demonstration of highly reliable products, this study proposes a robust Bayesian test design method. Based on the Beta-binomial model, the Wilson confidence interval for the historical success proportion is used to characterize uncertainty in the prior mean, while the discounted effective sample size represents uncertainty in the strength of historical information. A two-dimensional set of prior parameters is constructed, and the minimum required sample size is determined by imposing a worst-case constraint on the posterior probability that reliability exceeds a specified threshold. Numerical analyses are conducted using publicly available lifetime data from NIST Dataplot, with a historical mission success rate of 0.9717. When the minimum acceptable reliability is 0.95 and the risk threshold is 0.05, the classical zero-failure, fixed-prior Bayesian, and robust Bayesian methods require 59, 25, and 73 tests, respectively. When the reliability requirement increases to 0.99, the corresponding sample sizes rise to 299, 365, and 847. The results indicate that historical information does not necessarily reduce testing requirements, as its effectiveness depends on its compatibility with the reliability target. The robust constraint quantifies the additional testing effort required to accommodate prior uncertainty. Monte Carlo simulations with 100,000 replications show close agreement between simulated acceptance frequencies and theoretical probabilities. This study provides an interpretable statistical design framework for balancing testing resources and risk in the reliability demonstration of highly reliable products.

Keywords

Zero-Failure Testing, Robust Bayesian Design, Prior Uncertainty, Beta Prior, Monte Carlo Simulation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

1.1. 研究背景与问题提出

可靠性验证试验是评价高可靠产品能否达到规定性能要求的重要手段，其核心是在有限试验资源和既定风险约束下，对产品可靠性作出统计判断。随着可靠度要求不断提高，传统验证方法面临试验周期长、样本消耗大及失效信息不足等问题，零故障验证因而受到广泛关注。相关研究表明，试验方案设计需要综合考虑可靠度下限、试验次数与风险要求[1]。

经典零故障方法判据明确，但在高可靠度要求下通常需要较大的试验量。贝叶斯方法能够利用历史数据减少部分试验负担，但历史产品与当前产品可能在设计、工艺及使用环境等方面存在差异，直接采用固定先验容易使推断结果受到先验设定的影响。因此，如何兼顾历史信息利用与先验不确定性控制，是零故障可靠性验证需要解决的重要问题。

1.2. 相关研究进展与不足

现有零故障可靠性验证研究主要包括经典方法与贝叶斯方法。李根成和祁岭分析了零故障定时截尾可靠性验证试验方案[1]。在贝叶斯研究方面，何基报和茆诗松研究了对数正态寿命分布下的无失效 Bayes

验证方案[2]；何婺晖和唐家银建立了 Weibull 型无故障数据的综合 Bayes 可靠性评估模型[3]；龙足腾等研究了无失效威布尔情形下的双修正多层 Bayes 评估方法[4]。此外，二项分布参数区间估计的比较研究为历史成功比例的不确定性刻画提供了统计学参考[5]。国外学者 Martz Jr 和 Waller 较早研究了贝叶斯零故障可靠性验证程序[6]。上述研究为无失效数据分析与试验设计提供了重要基础，但其寿命分布假设及统计模型各有差异。

随着相关研究深入，先验设定对贝叶斯可靠性推断的影响逐渐受到重视。已有研究从无失效条件下的贝叶斯验证、先验信息处理及可靠性分析等方面展开讨论，强调了样本信息有限时合理设定先验的重要性[7]-[9]。这些成果拓展了贝叶斯可靠性验证的研究思路，但历史信息可迁移程度难以准确确定时，固定先验模型仍可能面临参数设定偏差问题。

进一步而言，先验不确定性不仅体现在可靠度先验均值上，也体现在历史信息强度的确定过程中。当历史数据与当前验证任务缺乏充分可比性时，单一先验参数可能难以反映不同信息迁移程度下的后验风险。稳健贝叶斯相关研究为处理先验不确定性提供了方法基础[10] [11]，但如何将先验均值与信息强度的不确定性共同纳入零故障试验量设计，仍值得进一步研究。

1.3. 研究思路与主要贡献

针对上述问题，本文基于二项任务成功模型与 Beta 先验，采用均值－强度参数化刻画历史信息，利用 Wilson 区间确定先验均值的候选范围，并通过折扣有效样本量描述历史信息强度的不确定性。在此基础上，构造二维先验参数集合，以最不利先验下的后验可靠度超越概率为约束，确定满足可靠性要求的最小零故障试验量，并与经典方法和固定先验贝叶斯方法进行比较。

本文的主要贡献包括：一是联合刻画先验均值与信息强度的不确定性，构建具有明确统计解释的先验参数集合；二是将最坏情形后验概率约束引入零故障试验量设计，量化先验不确定性所需的试验裕度；三是利用公开可靠性数据开展数值比较与敏感性分析，并通过 Monte Carlo 模拟检验零故障接收概率的计算结果，为高可靠产品验证提供可计算的稳健设计思路。

2. 零故障可靠性验证问题与数据基础

2.1. 问题描述与基本假设

考虑某类产品在规定任务剖面和固定任务时长下的可靠性验证问题。令 X_i 表示第 i 次任务的结果，任务成功记为 1，任务失效记为 0。在研究周期内，假设各次任务的试验条件具有可比性，且在给定真实可靠度 R 的条件下，各次任务结果相互独立。因此，单次任务结果服从参数为 R 的伯努利分布，即

$$X_i \mid R \sim \text{Bernoulli}(R), i = 1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其中， R 表示产品在规定任务条件下的真实可靠度， n 表示当前试验次数。

零故障验证是指当前开展的 n 次试验均未观测到失效，即全部任务结果均为成功。需要强调的是，零故障仅描述当前试验样本的观测结果，并不意味着产品真实失效概率为零。本文以 R_L 表示最低可接受可靠度，以 γ 表示预先设定的风险阈值，并以 D_n 表示当前 n 次零故障试验所形成的数据。本文关注的核心问题是：当历史数据能够为可靠度推断提供先验依据，但历史信息向当前产品迁移的程度存在不确定性时，如何确定满足规定可靠性要求的最小试验次数。

对于固定先验贝叶斯方法，基本的后验可靠度要求为

$$\Pr(R \geq R_L \mid D_n) \geq 1-\gamma \tag{2}$$

式(2)表示，在观察到当前试验数据后，产品真实可靠度不低于最低可接受可靠度的后验概率应达到

预设要求。对于本文研究的稳健贝叶斯方法，还需要进一步考虑先验参数不确定集合中的最不利情形，使可靠性保证不依赖于某一个预先选定的先验参数组合。

为避免将方法假设与实测事实混淆，本文约定：当前零故障试验用于分析不同设计方法所要求的试验次数；历史数据仅用于构造和标定先验参数，不将其视为当前产品的直接试验结果；先验信息折扣范围、最低可接受可靠度及风险阈值均作为模型设定或设计参数，并在后续数值分析中考察其影响。全文涉及的主要数学符号及其含义见表 1。

Table 1. Main notations and their definitions
表 1. 主要符号及其含义

序号	符号	符号说明
1	R	产品在规定任务条件下的真实可靠度
2	R_L	最低可接受可靠度
3	n	当前零故障试验次数
4	γ	预设风险阈值
5	α,β	Beta 先验分布的两个形状参数
6	μ	Beta 先验的均值参数
7	κ	Beta 先验的信息强度参数
8	Θ	先验参数不确定集合
9	D_n	当前 n 次零故障试验数据
10	n_c	经典零故障方法所需的最小试验次数
11	n_B	固定先验贝叶斯方法所需的最小试验次数
12	n_{RB}	稳健贝叶斯方法所需的最小试验次数
13	$\Psi(n;R_L)$	先验不确定集合内的最坏情形后验可靠度超越概率

表 1 中的 μ 与 κ 采用均值－强度参数化方式描述 Beta 先验。具体而言，两个形状参数分别为 $\alpha=\mu\kappa$ 和 $\beta=(1-\mu)\kappa$。其中，μ 用于刻画先验分布的中心位置，κ 用于刻画先验信息强度。这种参数化有助于分别讨论历史成功率的不确定性与历史信息向当前验证任务迁移的程度，并为后续构造先验参数不确定集合提供统一的符号基础。

2.2. 公开历史数据及其处理

本文采用美国国家标准与技术研究院(NIST) Dataplot 数据库公开的 TOB159 晶体管寿命试验数据作为历史信息来源。该数据集记录了 600 个晶体管的寿命试验结果，试验观察时长为 1000 h，其中 17 个样本在 1000 h 之前观测到失效，另外 583 个样本在 1000 h 时仍存活并被右删失。需要说明的是，NIST 数据目录与 TOB159 原始文件对器件类型的表述存在差异，本文依据原始文件所载试验对象及记录进行数据整理。NIST 还提供了相应的失效时间信息，并注明数据来源为 Tobias 和 Trindade 的 Applied Reliability。本文选用该公开数据，旨在建立可追溯、可复现的历史信息标定过程，而非将其直接视为当前待验证产品的实测数据[12]。

考虑到本文采用规定任务时长下的二项成功－失效模型，需要将历史寿命数据转换为任务成败状态：

在 1000 h 之前发生失效的 17 个样本记为失败，在 1000 h 时仍存活的 583 个样本记为成功。由此，历史任务成功率为 $\hat{R}_H = \frac{583}{600} \approx 0.971667$，相应的历史任务失效率为 $\frac{17}{600} \approx 0.028333$。相关样本量、任务时长、失效情况及成功率汇总见表 2。

Table 2. Basic information on the public TOB159 historical dataset
表 2. TOB159 公开历史数据基本信息

序号	项目	数值
1	试验样本量	600
2	任务时长/h	1000
3	1000 h 前观测到的失效数	17
4	1000 h 时仍存活的样本数	583
5	历史任务成功率	0.971667
6	历史任务失效率	0.028333
7	最早观测失效时间/h	3.7
8	最晚观测失效时间/h	999.3

由表 2 可见，该数据具有历史任务成功率较高、失效样本占比较低等特点，能够用于展示历史信息参与高可靠产品零故障验证设计的过程。不过，历史样本来自特定器件及其试验条件，不能据此假定历史总体与当前产品总体完全相同。如果将 600 个历史样本全部作为当前产品的等价信息，就隐含了较强的总体可交换性假设，可能导致当前试验结果过度依赖历史数据。因此，本文保留历史成功率作为先验均值的参考依据，同时对历史信息强度进行折扣，以降低直接迁移全部历史样本所带来的潜在偏差。

在先验参数构造方面，本文采用历史成功比例的 95% Wilson 区间刻画先验均值的不确定范围，得到 $\mu \in [0.955096, 0.982236]$。该区间用于描述历史样本比例对先验中心位置所提供的统计信息，并非当前产品真实可靠度的最终置信区间。与此同时，考虑到历史器件与当前待验证产品之间可能存在设计、制造批次及任务环境差异，本文将历史样本量的 5%~20%作为可迁移有效信息量的建模范围，对应 $\kappa \in [30, 120]$。名义固定先验采用历史成功率作为先验均值，即 $\mu_0 = 0.971667$，并将历史样本量的 10%作为名义有效信息强度，即 $\kappa_0 = 60$。由此形成的先验参数设置及其用途见表 3 [13]。

Table 3. Prior parameter settings and their interpretation
表 3. 先验参数设置及其含义

序号	先验类型	先验均值 μ	信息强度 κ	Beta 参数	用途
1	名义固定先验	0.971667	60	$\mathrm{Beta}(58.30, 1.70)$	固定先验贝叶斯对照
2	稳健先验集合	$[0.955096, 0.982236]$	$[30, 120]$	$\mathrm{Beta}[\mu\kappa, (1-\mu)\kappa]$	本文稳健设计

需要说明的是，Wilson 区间由公开历史样本比例计算得到，而有效信息强度区间属于本文为刻画历史信息可迁移程度而作出的建模设定，并非 NIST 数据直接提供的物理参数。通过将先验均值与信息强度分别纳入不确定范围，本文能够在后续分析中考察不同先验设定对后验可靠度保证和最小试验次数的影响，从而避免将单一折扣比例或单一先验参数组合误认为唯一合理的选择。

3. 经典与固定先验贝叶斯零故障模型

3.1. 经典零故障验证基准

经典零故障可靠性验证以二项分布模型为基础，通过当前试验数据判断产品是否达到规定的可靠性要求。设产品在规定任务条件下的真实可靠度为 R，各次任务结果在给定 R 时相互独立，且连续进行 n 次试验均未观测到失效。根据独立伯努利试验的概率性质，零故障事件发生的概率为

$$\Pr\left(D_n \middle| R\right) = R^n \tag{3}$$

式(3)表明，在试验次数一定时，真实可靠度越高，获得零故障结果的概率越大。经典零故障方法采用频率学派的单侧置信思想：在真实可靠度不高于最低可接受值 R_L 的情形下，零故障结果发生的概率不超过 R_L^n。因此，若要求这一概率不大于预设风险阈值 γ，则应满足 $R_L^n \le \gamma$。由此得到经典零故障验证所需的最小试验次数：

$$n_C = \left\lceil \frac{\ln \gamma}{\ln R_L} \right\rceil \tag{4}$$

其中，$\lceil \bullet \rceil$ 表示向上取整运算，且 $0 < R_L < 1,\ 0 < \gamma < 1$。由式(4)可知，经典方法所需试验次数由最低可接受可靠度和风险阈值共同决定。当 R_L 逐渐接近 1，或风险阈值 γ 进一步减小时，所需试验次数将相应增加。该方法不依赖历史数据，统计判据明确，适合作为零故障验证的基准方案；但其无法直接利用已有历史可靠性信息，在高可靠度要求下可能产生较大的试验负担。

3.2. 固定先验贝叶斯模型

为利用历史可靠性信息，固定先验贝叶斯方法将产品真实可靠度 R 视为随机变量，并采用定义在区间 $(0,1)$ 上的 Beta 分布描述其先验不确定性。设 $R \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$，其中 $\alpha > 0,\ \beta > 0$，则先验概率密度函数为[6] [7]

$$\pi\left(R \middle| \alpha, \beta\right) = \frac{R^{\alpha-1}(1-R)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, 0 < R < 1 \tag{5}$$

式(5)中，$B(\alpha, \beta)$ 为 Beta 函数，α 和 β 为先验分布的形状参数。为提高参数的可解释性，本文采用均值－强度参数化方式，令 $\alpha = \mu\kappa,\ \beta = (1-\mu)\kappa$，其中 $0 < \mu < 1,\ \kappa > 0$。此时，先验均值满足 $E(R) = \mu$，而 $\kappa = \alpha + \beta$ 表征先验信息强度。对于给定的先验均值，κ 越大，先验分布通常越集中，历史信息对后验推断的影响也越明显。

在当前试验观测到 n 次成功、0 次失效的条件下，零故障数据的似然函数与 R^n 成正比。由于 Beta 分布与二项分布具有共轭关系，将该似然函数与式(5)中的先验密度相结合，可得到产品可靠度的后验分布：

$$R \middle| D_n, \alpha, \beta \sim \text{Beta}(\alpha + n, \beta) \tag{6}$$

式(6)表明，零故障观测使 Beta 分布的第一形状参数增加 n，而第二形状参数保持不变。随着成功试验次数增加，后验分布将逐渐向较高可靠度区域移动。与经典方法不同，贝叶斯验证直接利用后验概率评价可靠性要求是否得到满足，从而将历史信息与当前试验数据纳入统一的统计推断框架。

在固定先验参数已知的条件下，本文以可靠度不低于 R_L 的后验概率达到 $1-\gamma$ 作为验证接收准则，即

$$\Pr\left(R \ge R_L \middle| D_n, \alpha, \beta\right) \ge 1 - \gamma \tag{7}$$

式(7)中的 γ 表示允许的后验下尾概率阈值，与经典方法中用于控制零故障事件概率的风险约束具有不同的统计含义。记 $I_x(a,b)$ 为参数 a,b 对应的正则化不完全 Beta 函数，则由式(6)可将接收准则等价表示为

$I_{R_L}(\alpha+n,\beta)\le\gamma$。因此，固定先验贝叶斯方法所需的最小试验次数定义为

$$n_B=\min\left\{n\in\mathbb{Z}_{\ge0}:I_{R_L}(\alpha+n,\beta)\le\gamma\right\} \tag{8}$$

与仅由可靠度阈值和风险要求决定的经典方法相比，式(8)中的最小试验次数还受到先验均值 μ 和信息强度 κ 的共同影响。当先验均值明显高于目标可靠度且历史信息具有较强可信度时，固定先验贝叶斯方法可能减少当前试验次数；当目标可靠度接近或超过历史可靠性水平时，既有信息也可能使验证所需试验次数增加。因此，利用历史信息并不必然意味着减少试验量，其实际作用取决于先验分布与目标可靠度之间的关系。更重要的是，固定先验方法将先验参数视为确定值，尚未考虑历史信息可迁移程度及参数估计的不确定性。为解决这一问题，下一部分将在固定先验模型的基础上构造先验不确定集合，并建立最坏情形后验可靠度约束下的贝叶斯稳健试验设计方法。

4. 先验信息不确定条件下的贝叶斯稳健设计

4.1. 先验不确定集合

固定先验贝叶斯模型通常假设先验分布的形状参数已经确定，但这一假设在实际可靠性验证中未必能够充分成立。历史产品与当前产品之间可能存在制造批次、设计方案、运行环境及任务条件等差异，使历史可靠性信息的适用程度难以准确判断。若直接采用单一先验参数组合，可能低估参数设定误差对后验推断及试验量决策的影响。因此，本文在固定先验模型的基础上引入先验参数不确定集合，以刻画历史信息利用过程中可能存在的参数偏差[9] [10]。

采用第 2 章定义的均值–强度参数化方式，以 μ 表示先验均值，以 κ 表示先验信息强度。设两者分别在给定区间内变化，则二维先验参数不确定集合定义为

$$\Theta=\left\{(\mu,\kappa):\begin{matrix}\mu_L\le\mu\le\mu_U\\ \kappa_L\le\kappa\le\kappa_U\end{matrix}\right\} \tag{9}$$

式(9)中，μ_L 与 μ_U 分别表示先验均值的下限和上限，κ_L 与 κ_U 分别表示先验信息强度的下限和上限。对任意 $(\mu,\kappa)\in\Theta$，均对应一个形如 $R\sim\mathrm{Beta}\left[\mu\kappa,(1-\mu)\kappa\right]$ 的先验分布。与仅选择少数离散先验情形的方法相比，该表示能够将连续参数区间内的候选先验统一纳入分析，为后续最坏情形约束提供明确的参数范围。

4.2. 先验集合的构造依据与决策流程

先验不确定集合的合理性取决于参数区间的构造依据。对于先验均值，本文利用公开历史数据的任务成功比例及其 95% Wilson 区间确定候选范围。第 2 章已得到历史成功率 $\hat{R}_H=0.971667$，对应先验均值区间为 $\mu\in[0.955096,0.982236]$。需要指出，该区间源于历史样本比例的统计不确定性，并不意味着当前产品可靠度必然位于该区间内，而是作为历史先验中心位置的候选范围[13]。

对于先验信息强度，本文采用历史样本量折扣的方式描述历史信息向当前验证任务迁移的可信程度。设历史样本量为 $N_H=600$，折扣系数为 λ，则有效信息强度满足 $\kappa=\lambda N_H$。考虑 $\lambda\in[0.05,0.20]$，得到 $\kappa\in[30,120]$。这一范围属于可迁移程度的建模设定，而非由历史数据唯一识别的统计参数。名义固定先验则取 $\mu_0=0.971667$, $\kappa_0=60$，用于构造与稳健设计方法进行比较的基准方案[14]。

基于上述参数设置，本文的稳健决策过程依次包括历史信息整理、先验参数区间构造、零故障数据下的后验更新、最不利先验搜索和最小试验次数确定。其中，历史数据提供先验构造的参考依据，先验不确定集合描述参数设定的合理变化范围，当前试验数据则用于更新各候选先验下的可靠度判断。通过在整个集合中考察最不利后验结果，可以避免仅凭名义先验作出验证决策，并将历史信息的不确定性纳入试验量设计[14]。

4.3. 最坏情形后验可靠度超越概率

在当前试验观测到n次成功、0 次失效的条件下，根据第 3 章的 Beta-二项共轭关系，给定先验参数(μ,κ)时，产品可靠度的后验分布为$\mathrm{Beta}[\mu\kappa+n,(1-\mu)\kappa]$。因此，可靠度不低于最低可接受值$R_L$的后验超越概率可表示为

$$\Psi(n;R_L,\mu,\kappa)=1-I_{R_L}[\mu\kappa+n,(1-\mu)\kappa] \tag{10}$$

式(10)中，$I_x(a,b)$表示正则化不完全 Beta 函数。该函数反映给定先验参数与零故障试验次数下，后验分布对可靠度达到目标水平的支持程度。由于μ和κ存在不确定性，不同候选先验对应的后验超越概率可能存在差异。为保证试验设计不依赖于某一特定先验，本文进一步定义先验不确定集合上的最坏情形后验可靠度超越概率[9] [11]：

$$\underline{\Psi}(n;R_L)=\inf_{(\mu,\kappa)\in\Theta}\Psi(n;R_L,\mu,\kappa) \tag{11}$$

式(11)通过在先验不确定集合内取下确界，得到给定试验次数下最保守的后验可靠度保证水平。稳健设计要求该保证水平不低于预设的后验概率要求，即$\underline{\Psi}(n;R_L)\geq 1-\gamma$。据此，稳健贝叶斯方法所需的最小零故障试验次数定义为

$$n_{RB}=\min\left\{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}:\inf_{(\mu,\kappa)\in\Theta}\Psi(n;R_L,\mu,\kappa)\geq 1-\gamma\right\} \tag{12}$$

式(12)是本文稳健试验设计的核心准则。其含义并非假设最不利先验必然对应真实产品状态，而是在无法唯一确定先验参数时，要求设计方案对集合内所有候选先验均满足规定的后验可靠度保证。数值求解时，可对非负整数试验次数逐步搜索，并在每个候选次数下求解先验参数集合上的最小后验超越概率。由于信息强度的影响与先验均值、目标可靠度之间的关系有关，不能仅凭直觉预先固定最不利参数组合，应通过边界比较及必要的数值校验确认求解结果[10] [11]。

4.4. 先验不确定程度的尺度化表示

为进一步分析先验均值下界变化对试验量的影响，本文引入不确定尺度参数$\rho\in[0,1]$，以名义先验均值μ_0为参考点，逐步放宽先验均值的保守下界。考虑到本研究中较低的先验均值通常对应较弱的后验可靠度保证，采用如下单侧尺度化方式：

$$\mu_L(\rho)=\mu_0-\rho(\mu_0-\mu_L) \tag{13}$$

式(13)中，$\rho=0$时，先验均值下界为μ_0；$\rho=1$时，下界恢复为完整 Wilson 区间的下限μ_L。在这一分析中，先验均值上界保持为μ_U，先验信息强度范围仍为$[30,120]$。因此，该参数主要衡量向较低先验均值方向扩展不确定范围对稳健设计的影响，而不是对先验均值区间两端进行对称扩张。

随着ρ增大，稳健设计需要覆盖的低先验均值情形逐渐增多，最坏情形后验可靠度约束可能进一步收紧，并导致所需试验次数增加。通过比较不同尺度参数下的稳健最小试验量，可以量化先验均值下界不确定性所对应的额外试验需求，从而为历史信息可信程度不同的可靠性验证任务提供设计参考。下一章将在公开历史数据标定的先验参数基础上，通过数值试验和敏感性分析考察上述稳健设计准则的实际表现。

5. 数值试验设计与结果

5.1. 参数设置与计算原则

为考察先验信息不确定性对零故障可靠性验证试验量的影响，本文基于第 2 章构造的历史先验参数，

对经典零故障方法、固定先验贝叶斯方法和稳健贝叶斯方法开展数值比较。除特别说明外，风险阈值取 $\gamma = 0.05$，最低可接受可靠度分别取 0.90、0.93、0.95、0.97、0.98 和 0.99。固定先验贝叶斯方法采用名义参数 $\mu_0 = 0.971667, \kappa_0 = 60$；稳健贝叶斯方法采用先验均值区间 $[0.955096, 0.982236]$ 和信息强度区间 $[30,120]$，以保证三种方法在相同可靠度目标与风险条件下进行比较。

数值计算中，经典方法根据解析公式确定最小试验次数，固定先验贝叶斯方法通过 Beta 后验分布的下尾概率进行整数搜索，稳健贝叶斯方法则在每个候选试验次数下计算先验不确定集合中的最坏情形后验可靠度保证，并确定满足约束的最小整数试验量。需要说明的是，本文得到的试验次数属于统计模型的设计结果，而非当前产品已经完成的实际验证次数。不同可靠度要求下的计算结果见表 4。

Table 4. Minimum sample sizes of three methods under different reliability thresholds
表 4. 不同最低可接受可靠度下三种方法的最小试验量

序号	最低可接受可靠度 R_L	经典方法 n_C	固定先验贝叶斯 n_B	稳健贝叶斯 n_{RB}
1	0.90	29	0	6
2	0.93	42	0	23
3	0.95	59	25	73
4	0.97	99	81	202
5	0.98	149	152	363
6	0.99	299	365	847

由表 4 可见，三种方法的最小试验量均随最低可接受可靠度提高而呈非减趋势，但不同方案之间的差异具有明显的阶段性。当 $R_L = 0.90$ 或 0.93 时，名义先验本身已对产品可靠度达到目标水平提供较强支持，因此固定先验贝叶斯方法在零新增试验时即可满足后验概率判据。这是特定先验设定下的数学结果，并不意味着工程实践中可以无条件免除当前验证。相比之下，稳健贝叶斯方法在上述两个可靠度水平下分别需要 6 次和 23 次试验，说明先验参数不确定性可能显著改变仅依据名义先验得到的设计结论。三种方案随可靠度阈值变化的趋势如图 1 所示。

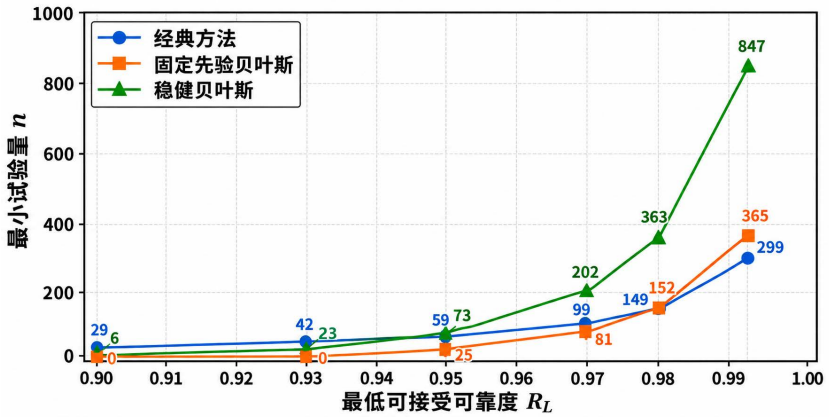


Figure 1. Minimum sample sizes of three methods under different reliability thresholds
图 1. 不同最低可接受可靠度下三种方法的最小试验量

图 1 进一步表明，历史信息能否减少当前试验量，取决于其与验证目标的相容程度。当 $R_L = 0.95$ 时，

经典方法需要 59 次零故障试验，固定先验贝叶斯方法仅需 25 次，减少 34 次；稳健贝叶斯方法需要 73 次，较经典方法增加 14 次，较固定先验方法增加 48 次。当 $R_L = 0.99$ 时，三种方法的试验次数分别增至 299、365 和 847 次。由于此时历史成功率 0.971667 低于目标可靠度，历史信息不再必然有利于减少试验量。这说明固定先验贝叶斯方法的资源优势具有条件性，而稳健设计增加的试验量反映了对先验参数偏差的防护要求。

5.2. 后验风险阈值敏感性

为分析风险要求变化对试验设计的影响，固定最低可接受可靠度 $R_L = 0.95$，将风险阈值 γ 分别设为 0.10、0.05、0.025 和 0.01，其余参数保持不变。需要说明的是，经典方法中的 γ 用于控制不满足可靠度要求时出现零故障结果的概率界限，而贝叶斯方法中的 γ 表示允许的后验下尾概率，两者具有不同的统计含义。本节通过比较相同数值阈值下的最小试验量，考察三种方法对风险要求变化的响应特征，结果见表 5。

Table 5. Minimum sample sizes of three methods under different risk thresholds
表 5. 不同风险阈值下三种方法的最小试验量

序号	风险阈值 γ	经典方法 n_C	固定先验贝叶斯 n_B	稳健贝叶斯 n_{RB}
1	0.100	45	9	49
2	0.050	59	25	73
3	0.025	72	40	94
4	0.010	90	60	121

由表 5 可知，随着风险阈值由 0.10 收紧至 0.01，经典方法的试验次数由 45 次增加至 90 次，固定先验贝叶斯方法由 9 次增加至 60 次，稳健贝叶斯方法由 49 次增加至 121 次，分别增加 45 次、51 次和 72 次。可见，更严格的风险要求均会增加三种方案的试验资源需求，其中稳健方法的绝对增量最大。这是因为稳健设计不仅需要满足规定的后验概率要求，还必须保证先验不确定集合中的不利参数情形同样满足该要求。不同风险阈值下三种方法的试验量变化如图 2 所示。

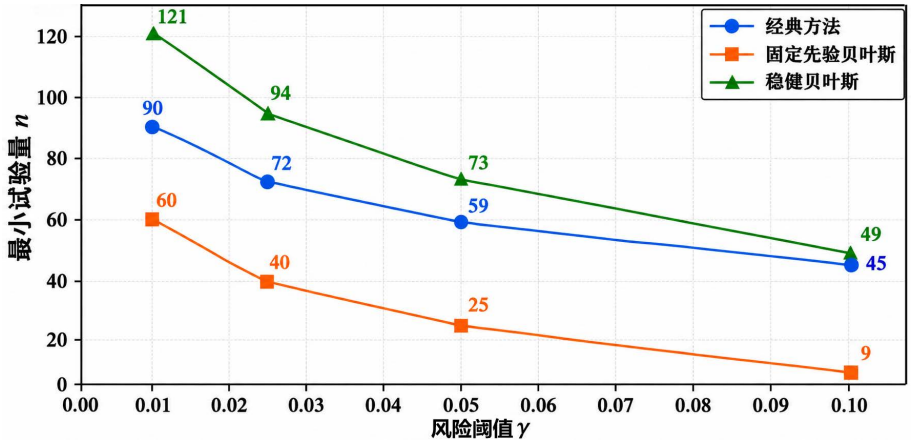


Figure 2. Minimum sample sizes of three methods under different risk thresholds
图 2. 不同风险阈值下三种方法的最小试验量

图 2 显示，在所考察的风险阈值范围内，固定先验贝叶斯方法的试验次数始终最少，而稳健贝叶斯方法的试验次数始终最多。然而，这种排序并不能直接等同于方法优劣的排序。固定先验方法的样本量优势依赖于名义先验的适用性，稳健方法则通过增加试验资源，将先验参数不确定性纳入可靠性保证。因此，评价不同验证方案时，应综合考虑试验资源成本、历史信息可信程度及相应的统计风险，而不能仅以最小试验次数作为判断依据。

5.3. 先验均值不确定程度的影响

为进一步考察先验均值不确定性对稳健试验量的影响，固定 $R_L=0.95,\gamma=0.05$ 及信息强度范围 $\kappa\in[30,120]$，按照第 4.4 节定义的尺度参数 ρ 逐步放宽先验均值下界。当 ρ 分别取 0、0.25、0.50、0.75 和 1.00 时，稳健最小试验次数依次为 25、33、45、59 和 73。随着尺度参数增大，先验集合逐渐包含更低的先验均值，最坏情形后验可靠度约束相应收紧，所需零故障试验次数随之增加。

上述结果表明，先验均值下界的不确定性具有可以量化的试验资源成本。当 ρ 从 0 增加至 1 时，稳健最小试验量由 25 次增加至 73 次，累计增加 48 次。在其他参数保持不变的条件下，允许历史先验均值向较低可靠度方向发生更大偏离，意味着需要更多当前成功试验才能维持相同的最坏情形后验保证。反之，如果能够通过产品一致性分析、制造过程记录或补充历史试验合理缩小先验参数范围，则可能降低稳健验证的资源需求。需要指出，本节考察的是先验均值下界的单侧扩张，其数值变化不能直接推广至其他形式的先验不确定性。

5.4. Monte Carlo 重复模拟验证

为检验零故障接收概率的理论计算与随机模拟程序的一致性，本文选取 $R_L=0.95,\gamma=0.05$ 条件下三种方法确定的最小试验次数，分别为经典方法 59 次、固定先验贝叶斯方法 25 次和稳健贝叶斯方法 73 次。进一步设定真实任务可靠度 R_{true} 分别为 0.940、0.950、0.970、0.990 和 0.995，在各可靠度水平下开展 100，000 次独立 Monte Carlo 重复模拟。模拟采用固定随机数种子 20260929，以提高实验结果的可复现性。

在每轮模拟中，根据给定真实可靠度生成相应次数的独立伯努利试验结果，只有全部成功时才判定该轮验证通过。根据第 3 章式(3)，给定真实可靠度 R_{true} 和试验次数 n 时，理论通过概率为 R_{true}^{n}。本文通过比较模拟通过频率与理论概率，检验零故障接收规则的程序实现是否正确。三种方案在不同真实可靠度水平下的模拟结果见表 6。

Table 6. Monte Carlo acceptance probabilities of three reliability demonstration plans
表 6. 三种验证方案的 Monte Carlo 模拟通过概率

序号	真实可靠度 R_{true}	经典方法 $n=59$	固定先验贝叶斯 $n=25$	稳健贝叶斯 $n=73$
1	0.940	0.02616	0.21089	0.01130
2	0.950	0.04779	0.27766	0.02339
3	0.970	0.16588	0.46780	0.10849
4	0.990	0.55558	0.77898	0.47877
5	0.995	0.74318	0.88149	0.69117

由表 6 可见，三种方案的模拟通过概率均随真实可靠度提高而增加。在相同真实可靠度下，固定先验贝叶斯方案由于试验次数最少，其零故障通过概率相对较高；稳健贝叶斯方案由于试验次数最多，通过概率相对较低。总体来看，模拟结果与相应理论概率具有较好的一致性，说明模拟程序能够合理再现

给定试验次数下的零故障接收特征。但需要强调，Monte Carlo 模拟验证的是接收概率的计算与实现，并不能单独证明先验参数范围适用于任何具体产品。稳健方案的工程适用性仍取决于先验不确定集合是否具有充分的统计依据和工程支持。

5.5. 风险分析与决策指导

零故障可靠性验证不仅需要关注后验可靠度保证，还应考察给定真实可靠度条件下的方案接收概率。操作特性(Operating Characteristic, OC)曲线能够描述零故障接收概率随真实可靠度变化的关系。设 R_0 为不合格可靠度水平，R_1 为合格可靠度水平，且满足 $R_0 < R_L < R_1$，则使用方接受不合格产品的概率为 R_0^n，生产方拒绝合格产品的概率为 $1-R_1^n$。因此，增加试验次数虽然能够降低低可靠产品通过验证的概率，但也可能提高合格产品因偶然失效而不能通过零故障验证的风险。

为直观比较三种验证方案的接收特征，本文根据各方法确定的最小试验次数绘制理论 OC 曲线，并将 Monte Carlo 模拟通过频率作为离散对照点。通过理论曲线与模拟结果的比较，可以同时观察真实可靠度、试验次数与方案通过概率之间的关系，以及随机模拟结果与理论概率的一致程度。三种验证方案的 OC 曲线及模拟结果如图 3 所示。

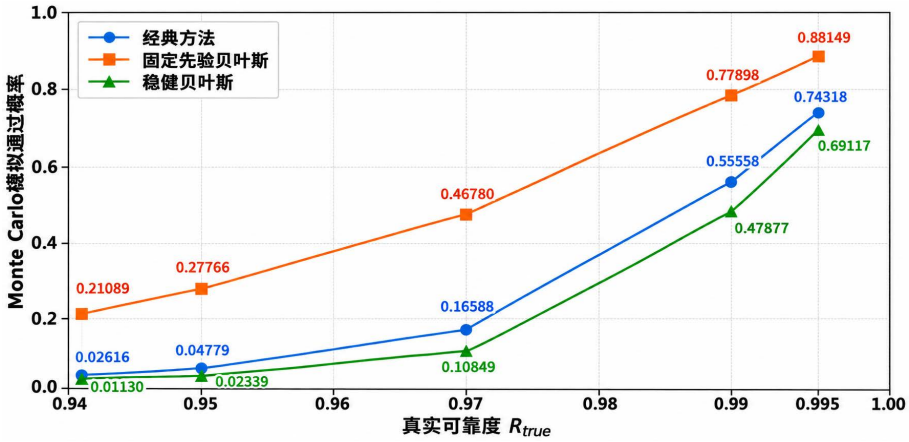


Figure 3. Operating characteristic curves and Monte Carlo simulation results of three reliability demonstration plans

图 3. 三种验证方案的 OC 曲线与 Monte Carlo 模拟结果

图 3 所反映的基本规律是，在相同真实可靠度下，试验次数越多，零故障接收概率越低。以 $R_{true} = 0.99$ 为例，固定先验贝叶斯方案的模拟通过概率为 0.77898，而稳健贝叶斯方案为 0.47877。这一差异并不表示稳健方案的后验可靠度保证较弱，而是反映出其采用了更严格的零故障试验次数要求。稳健设计的主要价值不是无条件提高产品通过率，而是在先验参数难以准确确定的条件下，使验证方案对更广泛的候选先验满足规定的后验可靠度要求。因此，实际决策应综合考虑历史信息可信程度、可靠性目标、试验资源以及生产方和使用方风险，避免仅以最小试验次数或最高通过概率评价方案优劣。

6. 讨论

6.1. 固定先验节省试验量的适用边界

固定先验贝叶斯方法的试验量优势取决于历史信息与验证目标的相容性。当先验均值高于最低可接受可靠度时，历史信息通常能够为后验判断提供有力支持，从而减少所需试验次数；随着可靠度要求提

高，这一优势逐渐减弱。当目标可靠度超过历史先验中心时，固定先验方法的试验量甚至可能高于经典方法。第 5 章的数值结果表明，历史信息并不必然降低试验负担，其作用受到先验均值、信息强度和目标可靠度的共同影响。

因此，固定先验方法的适用性不能仅依据样本量节约程度判断，还应考察历史产品与当前产品在设计、制造及运行条件方面的可比性，以及先验参数能否合理反映历史信息的可信程度。若直接采用过于集中的有利先验，虽然可能显著减少当前试验次数，却容易低估历史信息迁移的不确定性。因此，固定先验方案的应用应以充分的统计依据和工程证据为基础。

6.2. 稳健约束的统计解释

本文通过在先验参数不确定集合内引入最坏情形后验可靠度约束，将先验设定的不确定性纳入试验量设计。不同于先依据名义先验制定方案、再进行敏感性分析的处理方式，稳健设计要求集合内所有候选先验均满足规定的后验概率判据，使参数不确定性直接转化为额外试验需求。其主要意义在于降低验证结论对单一先验设定的依赖，而非单纯追求试验次数最少[9]-[11]。

需要指出，稳健性保证仅在预先构造的先验集合内成立，并不意味着能够抵御全部模型误差。先验集合过宽可能带来较高的试验成本，过窄则可能无法覆盖实际参数偏差。本文采用历史成功率的 Wilson 区间与折扣有效样本量确定参数范围，为集合构造提供了可解释的依据，但信息折扣范围仍包含建模判断。实际应用中应结合历史数据质量、产品一致性及任务条件合理确定参数区间[9] [10]。

6.3. 与实际可靠性验证工作的衔接

对于试验成本较高、样本获取困难的高可靠产品，本文方法可为零故障验证方案的前期论证与资源规划提供参考。实际应用时，可首先整理历史可靠性数据并评估其适用性，再依据历史成功率及信息可迁移程度构造先验集合，进而结合可靠度目标和风险要求确定稳健最小试验次数，最终综合试验成本、实施周期及安全要求制定工程验证计划。

但统计模型给出的最小试验次数并不等同于最终实施方案。本文零故障接收规则依赖任务结果条件独立、可靠度稳定及固定试验次数等假设，而实际试验可能受到批次差异、环境应力和试验相关性等因素影响。因此，工程应用前应核查模型假设与历史数据的适用程度；对于出现失效、需要动态调整样本量或采用序贯决策的情形，还需扩展相应的后验更新与接收规则，不能直接套用本文的固定样本零故障设计准则[8]。

6.4. 模型适用范围与研究局限性

本文采用 NIST 公开寿命数据构造历史先验，并将任务时点的存活状态转换为二元试验结果，以适配 Beta-二项模型。该处理便于计算，但未充分利用具体失效时间及右删失信息；同时，公开历史数据不能直接证明其与实际验证对象具有充分的可迁移性[12]。

此外，矩形先验集合尚未考虑先验均值与信息强度之间的依赖关系。未来可进一步引入含右删失信息的寿命模型、层次贝叶斯方法及序贯试验设计，以提高先验信息利用的适应性和工程验证效率[3] [4] [14]。

7. 结论

针对零故障可靠性验证中历史先验信息难以准确确定的问题，本文基于 Beta-二项模型，构造同时考虑先验均值与信息强度不确定性的先验参数集合，以最坏情形后验可靠度超越概率为约束，建立贝叶斯稳健试验设计方法，并通过数值分析与 Monte Carlo 模拟考察其性能。主要结论如下。

首先，历史信息的试验量节约效果取决于其与验证目标的相容性。当最低可接受可靠度为 0.95、风险阈值为 0.05 时，经典方法与固定先验贝叶斯方法分别需要 59 次和 25 次试验；当可靠度要求提高至 0.99 时，两者分别需要 299 次和 365 次。这表明历史信息并不必然减少验证试验量。

其次，稳健贝叶斯方法能够将先验不确定性转化为可量化的试验资源需求。当最低可接受可靠度为 0.95、风险阈值为 0.05 时，稳健方法需要 73 次试验，较固定先验方法增加 48 次，反映了既定先验集合下稳健性与试验经济性之间的权衡。

再次，随着先验均值下界降低或风险要求收紧，稳健试验量相应增加。100,000 次 Monte Carlo 重复模拟所得通过频率与理论概率基本一致，支持了零故障接收概率计算及模拟实现的正确性。

综上，本文为先验信息可信程度难以精确确定的零故障可靠性验证提供了一种可解释的稳健设计思路，可为试验资源配置与风险权衡提供参考。未来可进一步结合右删失寿命模型和序贯试验方法，拓展其在复杂工程条件下的适用范围。

参考文献

[1] 李根成, 祁岭. 零故障定时截尾可靠性验证试验方案分析[J]. 火炮发射与控制学报, 2026, 47(4): 112-119.

[2] 何基报, 茆诗松. 对数正态分布场合无失效的 BAYES 验证试验方案[J]. 应用概率统计, 2000, 16(3): 239-248.

[3] 何婺晖, 唐家银. Weibull 型无故障数据下综合 Bayes 置信可靠性评估模型[J]. 机械强度, 2020, 42(3): 610-616.

[4] 龙足腾, 郑波, 甯洋, 等. 无失效威布尔情形下基于双修正多层 Bayes 的可靠性评估[J]. 工程设计学报, 2024, 31(1): 59-66.

[5] 王成, 罗玉波. 二项分布参数区间估计——基于十三种方法的模拟比较[J]. 统计与管理, 2021, 36(3): 24-31.

[6] Martz Jr, H.F. and Waller, R.A. (1979) A Bayesian Zero-Failure (BAZE) Reliability Demonstration Testing Procedure. *Journal of Quality Technology*, **11**, 128-138. https://doi.org/10.1080/00224065.1979.11980894

[7] Coolen, F.P.A., Coolen-Schrijner, P. and Rahrouh, M. (2005) Bayesian Reliability Demonstration for Failure-Free Periods. *Reliability Engineering & System Safety*, **88**, 81-91. https://doi.org/10.1016/j.ress.2004.07.015

[8] Coolen, F.P.A. and Coolen-Schrijner, P. (2006) On Zero-Failure Testing for Bayesian High-Reliability Demonstration. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O*: *Journal of Risk and Reliability*, **220**, 35-44. https://doi.org/10.1243/1748006xjrr3

[9] Coolen, F.P.A. and Newby, M.J. (1994) Bayesian Reliability Analysis with Imprecise Prior Probabilities. *Reliability Engineering & System Safety*, **43**, 75-85. https://doi.org/10.1016/0951-8320(94)90096-5

[10] Berger, J.O., Moreno, E., Pericchi, L.R., Bayarri, M.J., Bernardo, J.M., Cano, J.A., *et al*. (1994) An Overview of Robust Bayesian Analysis. *Test*, **3**, 5-124. https://doi.org/10.1007/bf02562676

[11] Walter, G. and Coolen, F.P.A. (2018) Robust Bayesian Reliability for Complex Systems under Prior-Data Conflict. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A*: *Civil Engineering*, **4**, Article 04018025. https://doi.org/10.1061/ajrua6.0000974

[12] National Institute of Standards and Technology (2026) Dataplot: Datasets (Reliability/Tobias and Trindade, TOB159.DAT). https://www.itl.nist.gov/div898/software/dataplot/datasets.htm

[13] Wilson, E.B. (1927) Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference. *Journal of the American Statistical Association*, **22**, 209-212. https://doi.org/10.1080/01621459.1927.10502953

[14] Hobbs, B.P., Carlin, B.P., Mandrekar, S.J. and Sargent, D.J. (2011) Hierarchical Commensurate and Power Prior Models for Adaptive Incorporation of Historical Information in Clinical Trials. *Biometrics*, **67**, 1047-1056. https://doi.org/10.1111/j.1541-0420.2011.01564.x