Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 167-175
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511440

Hans汉斯

关于奇数阶阿贝尔凯莱图与K_2乘积的稳定性

李静仪

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2026年10月11日；录用日期：2026年11月4日；发布日期：2026年11月17日

摘　要

在2021年，Morris证明了奇数阶交换凯莱图要么稳定，要么非平凡不稳定。以此为启发，本文考虑二倍奇数阶交换凯莱图的稳定性，主要刻画了奇数阶交换凯莱图在允许二阶完全图作为笛卡尔乘积因子或强乘积因子时的稳定性。通过考虑上述两种二倍奇数阶交换凯莱图的TF-自同构群性质，利用图的TF-自同构来研究图的稳定性，再根据上述图稳定的定义，可进一步得到研究的结论。

关键词

凯莱图，乘积，交换群

On the Stability of Odd-Order Abelian Cayley Graphs Producted with K_2

Jingyi Li

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: October 11, 2026; accepted: November 4, 2026; published: November 17, 2026

Abstract

In 2021, Morris proved that odd-order abelian Cayley graphs are either stable or nontrivially unstable. Inspired by this, this paper considers the stability of abelian Cayley graphs of twice odd order. It mainly characterizes the stability of odd-order abelian Cayley graphs when they allow the complete graph of order two as a Cartesian product factor or a strong product factor. By considering the TF-automorphism group properties of the above two types of abelian Cayley graphs of twice odd order, and using graph TF-automorphisms to study graph stability, according to the above definition of graph stability, the conclusions of the study can be further obtained.

Keywords

Cayley Graph, Product, Abelian Group

文章引用: 李静仪. 关于奇数阶阿贝尔凯莱图与 K_2 乘积的稳定性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 167-175.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511440

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

1.1. 选题背景及意义

若顶点间的置换 φ，使得对图 Γ 中任意相邻顶点 x,y，满足 $\varphi(x),\varphi(y)$ 仍然相邻，称 φ 为图 Γ 的一个自同构。易验证所有自同构构成一个群为自同构群，记作 $Aut(\Gamma)$。

凯莱图是图论中一类重要的图，其定义通常基于一个有限群 G 和一个连接集 S，其中 S 不包含单位元且关于逆元封闭。

设 Γ 和 Σ 是图，Γ 和 Σ 的直积图，记为 $\Gamma\times\Sigma$，是具有顶点集 $V(\Gamma)\times V(\Sigma)$ 的图，使得两个顶点 $(u,x),(v,y)\in V(\Gamma)\times V(\Sigma)$ 相邻当且仅当 u,v 在 Γ 中相邻，x,y 在 Σ 中相邻。

若 $Aut(\Gamma\times K_2)\cong Aut(\Gamma)\times\mathbb{Z}_2$，则图 Γ 称为稳定的，否则称为不稳定的。若 $Aut(\Gamma\times\Sigma)\cong Aut(\Gamma)\times Aut(\Sigma)$，则图对 (Γ,Σ) 称为稳定的，否则称为不稳定的。特别地，若图 (Γ,K_2) 是稳定的，则图 Γ 称为稳定的，否则称为不稳定的。由于图的稳定性问题仍具有许多未解决的方面，图的稳定性研究是图论中具有重要的意义且难度较大。2021 年，Morris [1]证明了奇数阶阿贝尔凯莱图要么稳定，要么非平凡不稳定。然而，二倍奇数阶阿贝尔凯莱图的稳定性尚未得到充分研究。本文基于以上背景，提出问题：两倍奇数阶交换群上的凯莱图是否是稳定的？

1.2. 国内外研究现状综述

稳定性概念在文献中常以不同形式出现。Kotlov 和 Lovász [2]通过矩阵的秩研究了图的二部双覆盖的性质，虽未直接定义稳定性，但其关于邻接矩阵秩的讨论为后续稳定性判定提供了代数工具。

早期，Marušič 等人[3]提出了如下概念：若 $\Gamma\times K_2$ 没有例外自同构，则称 Γ 是稳定的。若一个图中的任意两个顶点的邻域都不同，则称这个图是 R-thin 的，否则，称它是 R-thick 的。Surowski [4]较早明确提出了稳定性概念，并研究了弧传递图的稳定性，指出这类图的稳定性与其自同构群的扩张性质密切相关。Wilson [5]则系统构造了一系列不稳定图，揭示了对称图中隐藏的对称性，推动了该领域的发展。

循环图因其结构简单、对称性丰富而成为稳定性研究的理想对象。Qin、Xia 和 Zhou [6]对循环图的稳定性给出了完整刻画，证明了：连通循环图是稳定的当且仅当其连接集满足某种数论条件。这一结果将稳定性问题转化为关于整数环上子集的条件，为后续研究奠定了重要基础。

Hujdurović、Mitrović 和 Morris [7]进一步将研究拓展到度不超过 7 的循环图的双覆盖自同构，系统分析了小度情形下例外自同构的代数结构。他们发现，不稳定性往往与图的某种“乘积分解”或“覆盖关系”相关联。

Jiang 和 Zhang [8]则通过构造从二部图出发得到不稳定图的一般方法，推广了 Wilson 的构造思路。

图乘积是构造复杂图的重要工具，其自同构群通常可由因子自同构群组合得到。Hammack 和 Imrich [9]以及 Hammack、Imrich 和 Klavžar [10]的专著系统总结了图乘积的自同构理论。

稳定性与图乘积的联系体现在：某些不稳定图可表示为两个较小图的某种乘积或覆盖。Fernandez 和 Hujdurović [11]研究了循环图的典范双覆盖，证明了这类覆盖的自同构群具有丰富的乘积结构。Hujdurović、Mitrović 和 Morris [12]进一步将乘积结构推广至更一般的 Cayley 图。

1.3. 主要图类的稳定性刻画

循环图是研究最透彻的一类。Qin、Xia 和 Zhou [6]证明了：对于连通循环图 $Cay(G,S)$，其稳定性完全由连接集 S 的算术性质决定。这一结果将稳定性判定简化为数论问题，易于算法实现。

Hujdurović、Mitrović 和 Morris [7]专门研究了度不超过 7 的循环图的典范双覆盖的自同构，系统分类了所有可能出现额外自同构的情形。这一工作为低度图的稳定性研究提供了完整的数据，并揭示了不稳定性与图的小度性质之间的微妙关系。

Jiang 和 Zhang [8]提出了一种从二部图构造不稳定图的一般方法。他们证明：给定一个具有某种对称性的二部图，通过添加特定边可得到不稳定图。

基于国内外对循环图稳定性的研究，可见循环图的自同构群对图的稳定性的判定和验证具有重要意义，故本文沿用该思路利用图的自同构群对奇数阶阿贝尔凯莱图与 K_2 乘积的稳定性进行验证。

2. 正文

本文中的群均为有限群，涉及的图均为有限、无向、简单图。设 Γ 为有限、无向、简单图。自同构群 $Aut(\Gamma)$ 刻画了 Γ 的对称性，是代数图论的核心对象。

设 G 为群，其单位元记为 1。若群 G 含有有限个元素，则称为有限群。群 G 中元素的个数称为 G 的阶，记为 $|G|$。若对任意 $x,y\in G$，都有 $xy=yx$，则称群 G 为阿贝尔群(或交换群)。

设 G 为有限群，集合 $S\subseteq G\setminus\{1\}$ 满足 $S^{-1}=S$。以 G 为顶点集，且对任意 $x,y\in G$，都有 $x\sim y\Leftrightarrow yx^{-1}\in S$ 的图称为群 G 关 G 于连接集 S 的凯莱图，记为 $Cay(G,S)$。特别地，若 G 为加法群，则条件 $yx^{-1}\in S$ 可改写为 $y-x\in S$。若 G 为阿贝尔群，则该凯莱图称为阿贝尔凯莱图。特别地，若 $G\cong\mathbb{Z}_n$，则该凯莱图同构于 $\mathbb{Z}_n$ 的凯莱图。

本文关注二倍奇数阶阿贝尔凯莱图。具体地，设 G 为奇数阶阿贝尔群，$\Gamma=Cay(G,S)$ 为 G 上的凯莱图。我们考虑笛卡尔积 $\Gamma\square K_2$ 和强积 $\Gamma\boxtimes K_2$。由于 $|G|$ 为奇数，$\Gamma\square K_2$ 和 $\Gamma\boxtimes K_2$ 的阶均为 $2|G|$，即二倍奇数。我们的目标是确定这些乘积图的稳定性。

主要结果如下：

定理 1.1 设 G 为奇数阶阿贝尔群，Γ 为 G 上的凯莱图。若 Γ 稳定且 $\Sigma=K_2$，则 $\Gamma\square K_2$ 稳定。

定理 1.2 设 G 为奇数阶阿贝尔群，Γ 为 G 上的凯莱图。若 Γ 稳定且 $\Sigma=K_2$，则 $\Gamma\boxtimes K_2$ 稳定。

对于验证上述凯莱图的稳定性，主要思路如下：

该问题通过分析 Morris 的证明思路，以及利用图的 TF-自同构的定义和特点，将其运用到所研究的凯莱图上，从而观察其对图上的点的作用效果。为叙述方便，假设给定的两倍奇数阶交换群上凯莱图为 $\Gamma=Cay(G\times\mathbb{Z}_2,S)$，$G$ 是奇数阶交换群，S 为 Γ 的连接集，且 S 不包含单位元且关于逆元封闭，由于完全图 K_2 是 $\mathbb{Z}_2$ 上的凯莱图，故 Γ 与 K_2 的笛卡尔积 $\Gamma\square K_2$ 和强直积 $\Gamma\boxtimes K_2$ 也是一个凯莱图。

要证明 $\Gamma\square K_2$ 和 $\Gamma\boxtimes K_2$ 是稳定的，关键是证明 $Aut(\Gamma\square K_2)\times\mathbb{Z}_2\supseteq Aut(\Gamma\square K_2\times K_2)$ 和 $Aut(\Gamma\boxtimes K_2)\times\mathbb{Z}_2\supseteq Aut(\Gamma\boxtimes K_2\times K_2)$。通过分析笛卡尔积 $\Gamma\square K_2$ 和强直积 $\Gamma\boxtimes K_2$ 的特点，分别分析 $Aut(\Gamma\square K_2\times K_2)$ 和 $Aut(\Gamma\boxtimes K_2\times K_2)$ 上任意元素 φ_1 和 φ_2 的类型。由于他们有 4 个部集，故需要对元素 φ_1 和 φ_2 的具体情况进行分类讨论，若最终能够证得 $\varphi_1\in Aut(\Gamma\square K_2)\times\mathbb{Z}_2$ 和 $\varphi_2\in Aut(\Gamma\boxtimes K_2)\times\mathbb{Z}_2$，则可以得到结论 $\Gamma\square K_2$ 和 $\Gamma\boxtimes K_2$ 是稳定的；否则，是不稳定的。

2.1. 预备知识

对图 Γ，用 $V(\Gamma)$ 和 $E(\Gamma)$ 分别表示其顶点集和边集，简记为 $\Gamma=(V,E)$。对图 Γ 中两个顶点 u 和 v，

若 Γ 中存在连接 u 和 v 的边，则称 u 和 v 在 Γ 中相邻，记为 $u\sim v$，并用 $\{u,v\}$ 表示 u 和 v 之间的边，有时也记为 $e:=\{u,v\}$。

设图 $\Gamma=(V,E)$，$X\subseteq V$。若 X 中任意两个顶点均不相邻，则称 X 为 Γ 的独立集。若成立 $V=X\cup Y$，$X\cap Y=\varnothing$，且 X 中任意两个顶点均不相邻，Y 中任意两个顶点均不相邻，则称 Γ 为二部图，记为 $\Gamma[X,Y]$；X 和 Y 称为二部图 Γ 的两个部集。若简单图中任意两个不同顶点均相邻，则称其为完全图。若 X 中每个顶点均与 Y 中每个顶点相邻，则称图 Γ 为完全二部图。

设 G 和 H 为两个群。若映射 $\sigma:G\to H$ 满足 $(ab)^{\sigma}=a^{\sigma}b^{\sigma},\forall a,b\in G$ 则称 σ 为从 G 到 H 的同态。特别地，若 σ 为双射，则称 σ 为从 G 到 H 的同构。此时称 G 与 H 同构，记为 $G\cong H$。从群 G 到自身的同构称为 G 的自同构。群 G 的所有自同构构成一个群，记为 $Aut(G)$。若对子集 $X\subseteq G$，其在自同构 σ 下的像仍为集合 X，则称自同构 σ 稳定集合 X，记为 $X^{\sigma}=X$

若 σ 是从图 Γ 的顶点集到图 Σ 的顶点集的一一映射，使得对图 Γ 中任意两个相邻顶 x 和 y，x^{σ} 和 y^{σ} 仍相邻，即 $x\sim_{\Gamma}y\Leftrightarrow x^{\sigma}\sim_{\Sigma}y^{\sigma}$，则称 σ 为从图 Γ 到图 Σ 的同构，并称图 Γ 与 Σ 同构，记为 $\Gamma\cong\Sigma$。若 σ 是从图 Γ 到自身的同构，则称 σ 为图 Γ 的自同构。容易验证，图 Γ 的所有自同构构成一个群，称为自同构群，记为 $Aut(\Gamma)$。

设 Γ 为顶点集 V 上的图，α 和 β 为 V 上的两个置换。若 $u\sim_{\Gamma}v$ 蕴含 $u^{\alpha}\sim_{\Gamma}v^{\beta}$，对任意 $u,v\in V$ 成立，则称 (α,β) 为 Γ 的两重自同构(简称 TF-自同构)。若对每个 $u,v\in V$ 有 $u^{\alpha}\sim_{\Gamma}v^{\beta}$，且对任意 $u,v\in V$，$u\sim_{\Gamma}v$ 蕴含 $u^{\alpha}\sim_{\Gamma}v^{\beta}$ 或 $u^{\alpha}=v^{\beta}$，则称 (α,β) 为 Γ 的两重半自同构(简称 TFS-自同构)。显然，(α,α) 是 Γ 的 TF-自同构当且仅当 $\alpha\in Aut(\Gamma)$。若一个 TF-自同构 (α,β) 满足 $\alpha\neq\beta$，则称其为非平凡的。

两个图 Γ 和 Σ 的直积 $\Gamma\times\Sigma$ 是以 $V(\Gamma)\times V(\Sigma)$ 为顶点集的图，使得对任意两个顶点 $(a,x),(b,y)\in V(\Gamma\times\Sigma)$，$(a,x)\sim_{\Gamma\times\Sigma}(b,y)$ 当且仅当 $a\sim_{\Gamma}b$ 且 $x\sim_{\Sigma}y$。

两个图 Γ 和 Σ 的笛卡尔积 $\Gamma\square K_2$ 是以 $V(\Gamma)\times V(\Sigma)$ 为顶点集的图，使得对任意两个顶点 $(a,x),(b,y)\in V(\Gamma\square\Sigma)$，$(a,x)\sim_{\Gamma\square\Sigma}(b,y)$ 当且仅当 $a=b$ 且 $x\sim_{\Sigma}y$，或 $a\sim_{\Gamma}b$ 且 $x=y$。

两个图 Γ 和 Σ 的强积 $\Gamma\boxtimes K_2$ 是 $V(\Gamma)\times V(\Sigma)$ 为顶点集的图，使得对任意两个顶点 $(a,x),(b,y)\in V(\Gamma\boxtimes\Sigma)$，$(a,x)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,y)$ 当且仅当 $a=b$ 且 $x\sim_{\Sigma}y$，或 $a\sim_{\Gamma}b$ 且 $x\sim_{\Sigma}y$，或 $a\sim_{\Gamma}b$ 且 $x=y$。

2.2. 定理 1.1 和 1.2 的证明

2.2.1. 定理 1.1 的证明

设 Γ 是群 G 关于连接集 S 的凯莱图，$\Sigma=K_2$。因此 $\Gamma=Cay(G;S)$。则 $\Gamma\square\Sigma=Cay(G\times\mathbb{Z}_2;S_1)$，其中 $S_1=\{(s,0),(0,1)\mid s\in S\}$。令 $\Lambda:=(\Gamma\square\Sigma)\times K_2$。则 $\Lambda=Cay(G\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2;T)$，其中 $T=\{(s,0,1),(0,1,1)\mid s\in S\}$。

设 Λ 的四个部集为 $\Lambda_{00},\Lambda_{01},\Lambda_{10},\Lambda_{11}$，其中

$$V(\Lambda_{00})=\{(g,0,0)\mid g\in G\},V(\Lambda_{01})=\{(g,0,1)\mid g\in G\},$$

$$V(\Lambda_{10})=\{(g,1,0)\mid g\in G\},V(\Lambda_{11})=\{(g,1,1)\mid g\in G\}。$$

记 $V_{00}=V(\Lambda_{00}),V_{01}=V(\Lambda_{01}),V_{10}=V(\Lambda_{10}),V_{11}=V(\Lambda_{11})$。设 φ 为 Λ 的任意自同构，故对 $G\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 的任意顶点 (g,i,j)，有

$$(g,i,j)^{\varphi}=\left((g,i)^{\varphi_j},j\right)\text{或}(g,i,j)^{\varphi}=\left((g,i)^{\varphi_j},j+1\right),$$

其中 $i\in\mathbb{Z}_2,j\in\mathbb{Z}_2$。设 $\varphi_1,\varphi_2\in Aut\left(Cay(G\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,T)\right)$，且

$$(g,i,j)^{\varphi_1}=\left((g,i)^{\varphi_{j1}},j+1\right),(g,i,j)^{\varphi_2}=\left((g,i)^{\varphi_{j2}},j+1\right),$$

则$(g,i,j)^{\varphi_1\cdot\varphi_2}=\left((g,i)^{\varphi_{j1}\cdot\varphi_{j2}},j\right)$，其中$i\in\mathbb{Z}_2,j\in\mathbb{Z}_2$。因此，只需考虑$(g,i,j)^{\varphi}=\left((g,i)^{\varphi_j},j\right)$的情形，其中$i\in\mathbb{Z}_2,j\in\mathbb{Z}_2$。于是$\varphi$有如下四种情形。

情形 1：

$$(g,i,j)^{\varphi}=\begin{cases}\left(g^{\varphi_0^*},i,j\right), & \text{若 } j=0;\\ \left(g^{\varphi_1^*},i,j\right), & \text{若 } j=1.\end{cases}$$

对图Λ的任意两个相邻顶点$(a,x,0)$和$(b,y,1)$，有

$$(a,x,0)\sim_{\Lambda}(b,y,1)\Leftrightarrow(a,x,0)^{\varphi}\sim_{\Lambda}(b,y,1)^{\varphi}$$

$$\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x,0\right)\sim_{\Lambda}\left(b^{\varphi_1^*},y,1\right)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x\right)\sim_{\Gamma\square\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y\right),$$

由于$(a,x,0)\sim_{\Lambda}(b,y,1)\Leftrightarrow(a,x)\sim_{\Gamma\square\Sigma}(b,y)$，可得

$$(a,x)\sim_{\Gamma\square\Sigma}(b,y)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x\right)\sim_{\Gamma\square\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y\right).$$

因此$a\sim_{\Gamma}b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma}b^{\varphi_1^*}$且$a=b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}=b^{\varphi_1^*}$。由于$\Gamma$稳定，故$\varphi_0^*=\varphi_1^*$。

情形 2：

$$(g,i,j)^{\varphi}=\begin{cases}\left(g^{\varphi_0^*},i,j\right), & \text{若 } j=0;\\ \left(g^{\varphi_1^*},i+1,j\right), & \text{若 } j=1.\end{cases}$$

考虑图Λ的任意两个相邻顶点$(a,0,0)$和$(b,0,0)$。有

$$(a,0,0)\sim_{\Lambda}(b,0,1)\Leftrightarrow(a,0,0)^{\varphi}\sim_{\Lambda}(b,0,1)^{\varphi}\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},0,0\right)\sim_{\Lambda}\left(b^{\varphi_1^*},1,1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},0\right)\sim_{\Gamma\square\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},1\right)\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}=b^{\varphi_1^*},$$

由于$(a,0,0)\sim_{\Lambda}(b,0,1)\Leftrightarrow(a,0)\sim_{\Gamma\square\Sigma}(b,0)\Leftrightarrow a\sim_{\Gamma}b$，可得$a\sim_{\Gamma}b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}=b^{\varphi_1^*}$，这与$\Gamma$稳定的条件相矛盾，因此，情形 2 这样的$\varphi$不存在。

情形 3：

$$(g,i,j)^{\varphi}=\begin{cases}\left(g^{\varphi_0^*},i+1,j\right), & \text{若 } j=0;\\ \left(g^{\varphi_1^*},i,j\right), & \text{若 } j=1.\end{cases}$$

证明过程与情形 2 类似，因此，情形 3 这样的φ不存在。

情形 4：

$$(g,i,j)^{\varphi}=\begin{cases}\left(g^{\varphi_0^*},i+1,j\right), & \text{若 } j=0;\\ \left(g^{\varphi_1^*},i+1,j\right), & \text{若 } j=1.\end{cases}$$

对图Λ的任意两个相邻顶点$(a,x,0)$和$(b,y,1)$，有

$$(a,x,0)\sim_{\Lambda}(b,y,1)\Leftrightarrow(a,x,0)^{\varphi}\sim_{\Lambda}(b,y,1)^{\varphi}\Leftrightarrow$$

$$\left(a^{\varphi_0^*},x+1,0\right)\sim_{\Lambda}\left(b^{\varphi_1^*},y+1,1\right)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x+1\right)\sim_{\Gamma\square\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y+1\right),$$

由于$(a,x,0)\sim_{\Lambda}(b,y,1)\Leftrightarrow(a,x)\sim_{\Gamma\square\Sigma}(b,y)$，可得

$$(a,x)\sim_{\Gamma\square\Sigma}(b,y)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x+1\right)\sim_{\Gamma\square\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y+1\right)$$

因此$a\sim_{\Gamma}b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma}b^{\varphi_1^*}$且$a=b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}=b^{\varphi_1^*}$。由于$\Gamma$稳定，故$\varphi_0^*=\varphi_1^*$。

综上，$\Gamma\square\Sigma$稳定。

2.2.2. 定理 1.2 的证明

设Γ是群G关于连接集S的凯莱图，$\Sigma=K_2$，因此，$\Gamma=Cay(G;S)$，则$\Gamma\boxtimes\Sigma=Cay(G\times\mathbb{Z}_2;S_1)$，其中$S_1=\{(s,0),(s,1),(0,1)\mid s\in S\}$。令$\Lambda:=(\Gamma\boxtimes\Sigma)\times K_2$，则$\Lambda=Cay(G\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2;T)$，其中$T=\{(s,0,1),(s,1,1),(0,1,1)\mid s\in S\}$。

设Λ的四个部集为$\Lambda_{00},\Lambda_{01},\Lambda_{10},\Lambda_{11}$，其中

$$V(\Lambda_{00})=\{(g,0,0)\mid g\in G\},V(\Lambda_{01})=\{(g,0,1)\mid g\in G\},$$

$$V(\Lambda_{10})=\{(g,1,0)\mid g\in G\},V(\Lambda_{11})=\{(g,1,1)\mid g\in G\}。$$

记$V_{00}=V(\Lambda_{00}),V_{01}=V(\Lambda_{01}),V_{10}=V(\Lambda_{10}),V_{11}=V(\Lambda_{11})$。设$\varphi$为$\Lambda$的任意自同构，则对$G\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$的任意顶点$(g,i,j)$，有

$$(g,i,j)^{\varphi}=\left((g,i)^{\varphi_j},j\right)或(g,i,j)^{\varphi}=\left((g,i)^{\varphi_j},j+1\right),$$

其中$i\in\mathbb{Z}_2,j\in\mathbb{Z}_2$。设$\varphi_1,\varphi_2\in Aut(Cay(G\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,T))$，且

$$(g,i,j)^{\varphi_1}=\left((g,i)^{\varphi_{j1}},j+1\right),(g,i,j)^{\varphi_2}=\left((g,i)^{\varphi_{j2}},j+1\right),$$

则$(g,i,j)^{\varphi_1\cdot\varphi_2}=\left((g,i)^{\varphi_{j1}\cdot\varphi_{j2}},j\right)$，其中$i\in\mathbb{Z}_2,j\in\mathbb{Z}_2$。因此，只需考虑$(g,i,j)^{\varphi}=\left((g,i)^{\varphi_j},j\right)$的情形，其中$i\in\mathbb{Z}_2,j\in\mathbb{Z}_2$。于是$\varphi$有如下四种情形。

情形 1：

$$(g,i,j)^{\varphi}=\begin{cases}\left(g^{\varphi_0^*},i,j\right), & 若\ j=0;\\ \left(g^{\varphi_1^*},i,j\right), & 若\ j=1.\end{cases}$$

对图Λ的任意两个相邻顶点$(a,x,0)$和$(b,y,1)$，有

$$(a,x,0)\sim_{\Lambda}(b,y,1)\Leftrightarrow(a,x,0)^{\varphi}\sim_{\Lambda}(b,y,1)^{\varphi}\Leftrightarrow$$

$$\left(a^{\varphi_0^*},x,0\right)\sim_{\Lambda}\left(b^{\varphi_1^*},y,1\right)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y\right),$$

由于$(a,x,0)\sim_{\Lambda}(b,y,1)\Leftrightarrow(a,x)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,y)$，则

$$(a,x)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,y)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y\right),$$

因此，讨论以下三种情形。

若 $a\sim_{\Gamma} b, x=y$，则 $(a,x)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,x)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},x\right)$，故

$$a\sim_{\Gamma} b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma} b^{\varphi_1^*}。$$

若 $a=b, x\sim_{\Sigma} y$，则 $(a,x)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(a,y)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(a^{\varphi_1^*},y\right)$，故 $a^{\varphi_0^*}=a^{\varphi_1^*}$，或 $a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma} a^{\varphi_1^*}$。

若 $a\sim_{\Gamma} b, x\sim_{\Sigma} y$，则 $(a,x)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,y)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y\right)$，故

$$a\sim_{\Gamma} b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}=b^{\varphi_1^*}，或 a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma} b^{\varphi_1^*}。$$

若 $\left(\varphi_0^*,\varphi_1^*\right)$ 是图 Γ 的 TFS-自同构，则第一种情形不满足 TFS-自同构的定义，故该情况不成立。因此，是 $\left(\varphi_0^*,\varphi_1^*\right)$ 图 Γ 的 TF-自同构。

情形 2：

$$(g,i,j)^{\varphi}=\begin{cases}\left(g^{\varphi_0^*},i,j\right), & 若\ j=0;\\ \left(g^{\varphi_1^*},i+1,j\right), & 若\ j=1.\end{cases}$$

对图 Λ 的任意两个相邻顶点 $(a,x,0)$ 和 $(b,y,1)$，有

$$(a,x,0)\sim_{\Lambda}(b,y,1)\Leftrightarrow(a,x,0)^{\varphi}\sim_{\Lambda}(b,y,1)^{\varphi}\Leftrightarrow$$

$$\left(a^{\varphi_0^*},x,0\right)\sim_{\Lambda}\left(b^{\varphi_1^*},y+1,1\right)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y+1\right)$$

由于 $(a,x,0)\sim_{\Lambda}(b,y,1)\Leftrightarrow(a,x)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,y)$，则

$$(a,x)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,y)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y+1\right)。$$

因此，讨论以下三种情形。

若 $a\sim_{\Gamma} b, x=y$，不妨设 $x=y=0$，则 $(a,0)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,0)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},0\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},1\right)$，故 $a\sim_{\Gamma} b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}=b^{\varphi_1^*}$，或 $a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma} b^{\varphi_1^*}$。

若 $a=b, x\sim_{\Sigma} y$，不妨设 $x=0, y=1$，则 $(a,0)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(a,1)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},0\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(a^{\varphi_1^*},0\right)$，故 $a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma} a^{\varphi_1^*}$。

若 $a\sim_{\Gamma} b, x\sim_{\Sigma} y$，不妨设 $x=0, y=1$，则 $(a,0)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,1)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},0\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},0\right)$，故 $a\sim_{\Gamma} b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma} b^{\varphi_1^*}$。

若 $\left(\varphi_0^*,\varphi_1^*\right)$ 是图 Γ 的 TFS-自同构，则第三种情形不满足 TFS-自同构的定义，故该情况不成立。若 $\left(\varphi_0^*,\varphi_1^*\right)$ 是图 Γ 的 TF-自同构，则第二种情形不满足 TF-自同构的定义，故该情况不成立。因此，情形 2 这样的 φ 不存在。

情形 3：

$$(g,i,j)^{\varphi}=\begin{cases}\left(g^{\varphi_0^*},i+1,j\right), & 若\ j=0;\\ \left(g^{\varphi_1^*},i,j\right), & 若\ j=1.\end{cases}$$

与情形 2 类似，因此，情形 3 这样的 φ 不存在。

情形 4：

$$(g,i,j)^{\varphi}=\begin{cases}\left(g^{\varphi_0^*},i+1,j\right), & 若\ j=0;\\ \left(g^{\varphi_1^*},i+1,j\right), & 若\ j=1.\end{cases}$$

对图 Λ 的任意两个相邻顶点 $(a,x,0)$ 和 $(b,y,1)$，有

$$(a,x,0)\sim_{\Lambda}(b,y,1)\Leftrightarrow(a,x,0)^{\varphi}\sim_{\Lambda}(b,y,1)^{\varphi}\Leftrightarrow$$

$$\left(a^{\varphi_0^*},x+1,0\right)\sim_{\Lambda}\left(b^{\varphi_1^*},y+1,1\right)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x+1\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y+1\right)$$

由于 $(a,x,0)\sim_{\Lambda}(b,y,1)\Leftrightarrow(a,x)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,y)$，则

$$(a,x)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,y)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},x+1\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},y+1\right)。$$

因此，讨论以下三种情形。

若 $a\sim_{\Gamma}b,x=y$，不妨设 $x=y=0$，则 $(a,0)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,0)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},1\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},1\right)$，故 $a\sim_{\Gamma}b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma}b^{\varphi_1^*}$。

若 $a=b,x\sim_{\Sigma}y$，不妨设 $x=0,y=1$，则 $(a,0)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(a,1)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},1\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(a^{\varphi_1^*},0\right)$，故 $a^{\varphi_0^*}=a^{\varphi_1^*}$，或 $a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma}a^{\varphi_1^*}$。

若 $a\sim_{\Gamma}b,x\sim_{\Sigma}y$，不妨设 $x=0,y=1$，则 $(a,0)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}(b,1)\Leftrightarrow\left(a^{\varphi_0^*},1\right)\sim_{\Gamma\boxtimes\Sigma}\left(b^{\varphi_1^*},0\right)$，故 $a\sim_{\Gamma}b\Leftrightarrow a^{\varphi_0^*}=b^{\varphi_1^*}$，或 $a^{\varphi_0^*}\sim_{\Gamma}b^{\varphi_1^*}$。

若 $\left(\varphi_0^*,\varphi_1^*\right)$ 是图 Γ 的 TFS-自同构，则第一种情形不满足 TFS-自同构的定义，故该情况不成立。因此，$\left(\varphi_0^*,\varphi_1^*\right)$ 是图 Γ 的 TF-自同构。综上，$\left(\varphi_0^*,\varphi_1^*\right)$ 是图 Γ 的 TF-自同构。由于 Γ 稳定，故 $\varphi_0^*=\varphi_1^*$，因此，$\Gamma\boxtimes\Sigma$ 稳定。

2.3. 结论

经验证得到以下两个结论：

(1) 设 G 为奇数阶阿贝尔群，Γ 为 G 上的凯莱图。若 Γ 稳定且 $\Sigma=K_2$，则 $\Gamma\square K_2$ 稳定。

(2) 设 G 为奇数阶阿贝尔群，Γ 为 G 上的凯莱图。若 Γ 稳定且 $\Sigma=K_2$，则 $\Gamma\boxtimes K_2$ 稳定。

例 3.1 取 $G=\mathbb{Z}_3$，$S=\{1,2\}$，则 $\Gamma\square K_2$，$\Gamma\boxtimes K_2$ 都是稳定的二倍奇数阶交换凯莱图。

证明：因为 $G=\mathbb{Z}_3$，$S=\{1,2\}$，且 Γ 为 G 上的凯莱图，故 G 是奇数阶交换群，且 $\Gamma=K_3$ 是稳定的凯莱图。记 $K_2=\{a,b\}$，故 $\Gamma\square K_2$，$\Gamma\boxtimes K_2$ 都有 6 个顶点：

$$(0,a),(1,a),(2,a),(0,b),(1,b),(2,b)$$

通过分析 $\Gamma\square K_2$，$\Gamma\boxtimes K_2$ 中边的关系，得到 $\Gamma\square K_2$ 的图像可以看作一个“三棱柱”，$\Gamma\boxtimes K_2$ 的图像可以看作在“三棱柱”的每个“四边形”上加上“对角线”。因此，$\Gamma\square K_2$，$\Gamma\boxtimes K_2$ 都是稳定的二倍奇数阶交换凯莱图。

参考文献

[1] Morris, D.W. (2021) On Automorphisms of Direct Products of Cayley Graphs on Abelian Groups. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **28**, 1-10. https://doi.org/10.37236/9940

[2] Kotlov, A. and Lovász, L. (1996) The Rank and Size of Graphs. *Journal of Graph Theory*, **23**, 185-189. https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0118(199610)23:2<185::aid-jgt9>3.3.co;2-x

[3] Marušič, D., Scapellato, R. and Salvi, N.Z. (1992) Generalized Cayley Graphs. *Discrete Mathematics*, **102**, 279-285. https://doi.org/10.1016/0012-365x(92)90121-u

[4] Surowski, D.B. (2001) Stability of Arc-Transitive Graphs. *Journal of Graph Theory*, **38**, 95-110. https://doi.org/10.1002/jgt.1026

[5] Wilson, S. (2008) Unexpected Symmetries in Unstable Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **98**, 359-383. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2007.08.001

[6] Qin, Y., Xia, B. and Zhou, S. (2019) Stability of Circulant Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **136**, 154-169. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2018.10.004

[7] Hujdurović, A., Mitrović, Đ. and Witte Morris, D. (2023) Automorphisms of the Double Cover of a Circulant Graph of Valency at Most 7. *Algebraic Combinatorics*, **6**, 1235-1271. https://doi.org/10.5802/alco.303

[8] Jiang, H. and Zhang, J. (2025) Constructing Unstable Graphs from Bipartite Graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **48**, Article No. 134. https://doi.org/10.1007/s40840-025-01913-6

[9] Hammack, R.H. and Imrich, W. (2009) On Cartesian Skeletons of Graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*, **2**, 191-205. https://doi.org/10.26493/1855-3974.114.4bb

[10] Hammack, R., Imrich, W. and Klavžar, S. (2011) Handbook of Product Graphs. 2nd Edition, CRC Press.

[11] Fernandez, B. and Hujdurović, A. (2022) Canonical Double Covers of Circulants. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **154**, 49-59. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2021.12.005

[12] Hujdurović, A., Mitrović, Đ. and Morris, D.W. (2021) On Automorphisms of the Double Cover of a Circulant Graph. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **28**, 1-25. https://doi.org/10.37236/10655