Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 248-256
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511447

Hans汉斯

Cantor级数展开中极致例外集合的剩余性质

蔡彩丽，谢名杰

广东财经大学统计与数据科学学院，广东 广州

收稿日期：2026年10月19日；录用日期：2026年11月13日；发布日期：2026年11月19日

摘 要

设$Q=\{q_n\}_{n\geq 1}\ (q_n\geq 2)$是有界正整数序列。每个$x\in[0,1)$可唯一展开为Cantor级数，对应的迭代变换为$T_Q^n$。定义渐近逼近指数$v_Q(x)$为使得$T_Q^n(x)<(q_1\cdots q_n)^{-v}$对无穷多个$n$成立的非负实数$v$的上确界，同时，一致逼近指数$\hat{v}_Q(x)$为使得对任意充分大的$N$都存在$n\leq N$满足$T_Q^n(x)<(q_1\cdots q_N)^{-v}$的非负实数$v$的上确界。本文对极致例外集$E_Q(0,+\infty)=\{x\in[0,1):\hat{v}_Q(x)=0,v_Q(x)=+\infty\}$的剩余性质进行研究，证明了该集合在$[0,1)$中是剩余集。

关键词

Cantor级数展开，一致丢番图逼近，渐近丢番图逼近，极致例外集，剩余集

The Residual Property of the Extremely Exceptional Set in Cantor Series Expansions

Caili Cai, Mingjie Xie

School of Statistics and Data Science, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou Guangdong

Received: October 19, 2026; accepted: November 13, 2026; published: November 19, 2026

Abstract

Let $Q=\{q_n\}_{n\geq 1}$ be a bounded sequence of positive integers with $q_n\geq 2$. Every $x\in[0,1)$ admits a unique Cantor series expansion, with the associated iterated transformation T_Q^n. The asymptotic approximation exponent $v_Q(x)$ is defined as the supremum of all nonnegative real numbers v such that $T_Q^n(x)<(q_1\cdots q_n)^{-v}$ for infinitely many n, and the uniform approximation exponent

文章引用: 蔡彩丽, 谢名杰. Cantor 级数展开中极致例外集合的剩余性质[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 248-256.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511447

$\hat{v}_Q(x)$ is defined as the supremum of all nonnegative real numbers v such that for every sufficiently large N, there exists $n \le N$ satisfying $T_Q^n(x) < (q_1 \cdots q_N)^{-v}$. In this paper, we study the residual property of the extremely exceptional set $E_Q(0,+\infty) = \{x \in [0,1) : \hat{v}_Q(x) = 0, v_Q(x) = +\infty\}$ and prove that it is residual in $[0,1)$.

Keywords

Cantor Series Expansions, Uniform Diophantine Approximation, Asymptotic Diophantine Approximation, Extremely Exceptional Set, Residual Set

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

Cantor [1]于 1869 年引入了 Cantor 级数展开。令 $Q = \{q_n\}_{n\ge1}$ 为有界正整数序列，且对任意 $n \ge 1$ 有 $q_n \ge 2$。对任意 $n \ge 1$，定义变换 $T_{Q,n} : [0,1] \to [0,1)$ 与 $T_Q^n : [0,1] \to [0,1)$ 分别为：

$$T_{Q,n}(x) = q_n x - \lfloor q_n x \rfloor$$

以及

$$T_Q^n(x) = T_{Q,n} \circ \cdots \circ T_{Q,1}(x) = q_1 \cdots q_n x - \lfloor q_1 \cdots q_n x \rfloor,$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 为 x 的整数部分。则对任意 $x \in [0,1]$ 有展开式：

$$x = \frac{\epsilon_1(x)}{q_1} + \frac{\epsilon_2(x)}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{\epsilon_n(x)}{q_1 \cdots q_n} + \cdots,$$

其中

$$\epsilon_1(x) = \lfloor q_1 x \rfloor, \epsilon_n(x) = \left\lfloor q_n T_Q^{n-1}(x) \right\rfloor, n \ge 2.$$

且数字 $\epsilon_n(x) \in \{0,1,\cdots,q_n - 1\}$，并对无穷多个 n 有 $\epsilon_n(x) \ne q_n - 1$。我们称 $\epsilon_n(x)$ 为 x 的第 n 位数字，称 $\epsilon_Q(x) = (\epsilon_1(x), \cdots, \epsilon_n(x), \cdots)$ 为 x 的 Cantor 级数展开。当 Q 为大于 1 的常数列时，该展开退化为经典的 b 进制展开。由于迭代过程中各步映射未必一致，相应的动力系统是非自治的，更精确地说，进行第 n 步迭代时所对应的映射为 $T_Q^n(x)$。

近年来，关于 Cantor 级数展开的研究在收缩靶问题、非齐次逼近以及一致逼近等方向均取得了重要进展。Fishman 等[2]首先研究了非自治动力系统中收缩靶集的 Hausdorff 维数；Sun 和 Cao [3]建立了相应集合的 Lebesgue 测度二分律与 Hausdorff 测度理论；Shen 和 Zhang [4]系统研究了非齐次与联立丢番图逼近，建立了完整的 Lebesgue 测度 0-1 律与 Hausdorff 测度理论。上述工作均聚焦于上极限逼近集，即要求逼近在无穷多次迭代中成立。

与上极限逼近集相对应，一致丢番图逼近要求逼近在每一有限区间内均至少出现一次，其结构更为精细。为刻画轨道逼近的速率，引入以下两个指数。对任意 $x \in [0,1)$，渐近逼近指数 $v_Q(x)$ 定义为：

$$v_Q(x)=\sup\left\{v\geq 0: T_Q^n(x)<(q_1\cdots q_n)^{-v}\text{ 对无穷多个 } n\in\mathbb{N}\text{ 成立}\right\}.$$

一致逼近指数 $\hat{v}_Q(x)$ 定义为：

$$\hat{v}_Q(x)=\sup\left\{v\geq 0:\forall N\gg 1,\exists n\in[1,N],\text{使得 } T_Q^n(x)<(q_1\cdots q_N)^{-v}\right\}.$$

显然 $\hat{v}_Q(x)\leq v_Q(x)$。一致逼近指数要求逼近在每一段区间内一致地出现，条件更为严格。Han 和 Ma [5]在 Cantor 级数展开框架下研究了一致逼近指数，并证明了当 $0\leq\hat{v}\leq 1$ 时，有

$$\dim_{\mathrm{H}}\left\{x\in[0,1):\hat{v}_Q(x)\geq\hat{v}\right\}=\left(\frac{1-\hat{v}}{1+\hat{v}}\right)^2.$$

基于上述两个指数，考虑其极端情形，定义极致例外集为：

$$E_Q(0,+\infty)=\left\{x\in[0,1):\hat{v}_Q(x)=0, v_Q(x)=+\infty\right\}.$$

该集合是由一致逼近指数为 0 且渐近逼近指数为 $+\infty$ 的点组成。由 Shen 和 Zhang [4]的推论 1.3 可得 $\dim_{\mathrm{H}}E_Q(0,+\infty)=0$，即在度量意义下该集合是“极小”的。

在数论中，具有零 Lebesgue 测度的集合在拓扑意义下仍可能是“大”的，即剩余集。从拓扑角度研究例外集的剩余性，可为刻画集合“大小”提供另一类视角。近年来，剩余集性质的研究在多种动力系统中取得了重要进展。Zheng、Wu 和 Yuan [6]证明了 β-动力系统中游程函数极致例外集是剩余集，并确定其 Hausdorff 维数；吴梓滢和郑丽璇[7]将该结果推广到一般函数情形。在连分数展开中，Tan 和 Zhou [8]研究了连分数中均匀丢番图逼近与游程函数的关系，计算了均匀丢番图集合的 Hausdorff 维数。Chang 等[9]证明了连分数部分商相对增长率的集合 $E(\alpha,\beta)$ 是剩余集当且仅当 $\alpha=0$ 且 $\beta=\infty$ 时成立；Burgos 和 Pesin [10]综述了动力系统中不规则集的剩余性质，指出当线性余循环完全正则性失效时，不规则集呈现剩余性质。此外，在 Cantor 级数展开方面，Shen 和 Zhang [4]建立了 Cantor 级数展开中非齐次与联立逼近的完整度量理论；Shen [11]研究了对应非自治动力系统中的运动回复问题。

上述工作表明，从 Baire 纲角度研究动力系统中例外集的拓扑性质已成为一个活跃的研究方向。然而，Cantor 级数展开中极致例外集 $E_Q(0,+\infty)$ 的剩余性质尚未被研究。受此启发，本文研究该极致例外集的剩余性质。需要指出的是，本文的结论依赖于基序列的有界性假设，主要结果如下。

定理 1.1：设 $Q=\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界整数序列，即存在常数 $M\geq 2$ 使得对任意 $n\geq 1$ 有 $q_n\leq M$。则集合 $E_Q(0,+\infty)$ 在 $[0,1)$ 中是剩余集。

推论 1.2：集合 $\left\{x\in[0,1):\hat{v}_Q(x)=0\right\}$ 在 $[0,1)$ 中是剩余集。

推论 1.3：对任意 $0<\hat{v}\leq 1$，集合 $\left\{x\in[0,1):\hat{v}_Q(x)\geq\hat{v}\right\}$ 和 $\left\{x\in[0,1):\hat{v}_Q(x)=\hat{v}\right\}$ 均为第一纲集。

本文的结构安排如下：第 2 节回顾 Cantor 级数展开的相关定义、定理和基本性质；第 3 节给出定理 1.1 的详细证明；第 4 节给出推论 1.2 和推论 1.3 的证明；第 5 节讨论有界性假设及其推广。

2. 预备知识

本节主要回顾 Cantor 级数展开中柱集、可允许词、轨道值估计及 Baire 纲定理。关于 Cantor 级数展开的更多细节可参考文献[1]-[3]。

设 $Q=\{q_n\}_{n\geq 1}$ 为有界正整数序列，且对任意 $n\geq 1$ 有 $q_n\geq 2$。对任意 $n\geq 1$，记

$$\mathcal{A}^n=\left\{(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)\in\mathbb{N}^n: 0\leq\epsilon_k<q_k, 1\leq k\leq n\right\},$$

并记 $\mathcal{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}^n$。任意 $x\in[0,1)$ 的 Cantor 级数展开 $\epsilon_Q(x)$ 均属于 $\mathcal{A}$。若存在 $m\geq 1$ 使得 $\epsilon_m(x)\neq 0$ 且对所有 $n>m$ 有 $\epsilon_n(x)=0$，则称该展开是有限的。x 为有理数当且仅当其 Cantor 级数展开是有限的。

对 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in\mathcal{A}^n$，定义其对应的 n 阶柱集为：

$$I_n(\omega):=\{x\in[0,1):\epsilon_i(x)=\omega_i,1\leq i\leq n\}.$$

特别地，对任意 $x\in[0,1)$，$I_n(x):=I_n(\epsilon_1(x),\cdots,\epsilon_n(x))$ 被称为 x 的 n 阶柱集。

柱集 $I_n(\omega)$ 是左闭右开区间，其端点可显式表示为：

$$I_n(\omega)=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{q_1\cdots q_i},\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{q_1\cdots q_i}+\frac{1}{q_1\cdots q_n}\right).$$

因此柱集的长度为：

$$|I_n(\omega)|=\frac{1}{q_1q_2\cdots q_n}. \tag{2.1}$$

当 $m>n$ 时，$I_m\subseteq I_n$。由此，若 x,y 的前 n 位数字相同，则 $|x-y|\leq|I_n|$。所有柱集构成 $[0,1)$ 的一个可数拓扑基。若存在 $x\in[0,1)$ 使得 $\epsilon_i(x)=\omega_i$ 对所有 $1\leq i\leq n$ 成立，则称 ω 为可允许的。所有长度为 n 的可允许词记为 Σ_Q^n，所有有限可允许词的集合记为：

$$\Sigma_Q^*=\bigcup_{n\geq 1}\Sigma_Q^n.$$

与 β-展开不同，Cantor 级数中任意可允许前缀后可接任意长全零段，即若 $(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)\in\Sigma_Q^k$，则 $(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k,0^\ell)$ 仍可允许。这是因为数字 0 在任意位置均满足 $0<q_i$，且全零段不会导致从某项起恒取最大值 q_i-1 的退化情形，从而保证 x 的 Cantor 级数展开唯一。

设 $q_n\leq M$ $(M\geq 2)$。若从第 $n+1$ 位起连续出现 L 个零，则

$$T_Q^n(x)=\sum_{i=n+L+1}^{\infty}\frac{\epsilon_i(x)}{q_{n+1}\cdots q_i}\geq\frac{\epsilon_{n+L+1}(x)}{q_{n+1}\cdots q_{n+L+1}}\geq M^{-(L+1)}.$$

最后回顾一下 Baire 纲定理。在完备度量空间中，若一个集合的闭包不含内点，则称之为无处稠密集。可数个无处稠密集的并称为第一纲集，非第一纲集称为第二纲集。若一个集合的补集是第一纲集，则称之为剩余集；等价地，该集合包含一个稠密 G_δ 子集。Baire 纲定理断言完备度量空间中的剩余集是第二纲集且稠密。

3. 定理 1.1 的证明

由 Baire 纲定理，要证明 $E_Q(0,+\infty)$ 是剩余集，只需构造一个集合 $V\subset[0,1)$ 满足以下三个条件：

$$V\subseteq E_Q(0,+\infty)；$$

V 在 $[0,1)$ 中稠密；

V 是一个 G_δ 集。

以下我们逐项完成构造和证明。本文中集合 V 的构造方法借鉴了文献[12]。

首先选取两个严格递增的正整数序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$，满足

$$n_1>2,n_k<m_k<n_{k+1},\forall k\geq 1,$$

以及如下极限条件：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{m_k-n_k}{n_k}=+\infty, \tag{3.1}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{m_k-n_k}{n_{k+1}}=0. \tag{3.2}$$

这样的序列是存在的。例如，取

$$n_k=(2k)^{2k}, m_k=(k+1)(2k)^{2k}, n_{k+1}=k^2(2k)^{2k}+1.$$

可得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{m_k-n_k}{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)(2k)^{2k}-(2k)^{2k}}{(2k)^{2k}}=+\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{m_k-n_k}{n_{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k(2k)^{2k}}{k^2(2k)^{2k}+1}=0.$$

因此式(3.1) (3.2)成立。

对每个 $k\geq 1$，令 $d_k=m_k-n_k$。由 $n_k<m_k<n_{k+1}$，存在唯一的整数 $t_k\geq 1$ 和余数 p_k $(0\leq p_k<d_k)$，使得

$$n_{k+1}=d_k\cdot t_k+n_k+p_k.$$

对于任意可允许前缀 $(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)\in\Sigma_Q^k$，构造长度为 n_{k+1} 的有限词：

$$W_k(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)=\left(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k,0^{n_k-k},\left(1,0^{d_k-1}\right)^{t_k},0^{p_k}\right).$$

由第 2 节可知，可允许词后可接任意长全零段。数字 1 在 $q_i\geq 2$ 的条件下也可允许，上述有限词的每个位置都满足 $0\leq\epsilon_i<q_i$。因此 W_k 是可允许的，对应的柱集 $I_{n_{k+1}}(W_k(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k))$ 是非空的。

令

$$V:=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}\bigcup_{(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)\in\Sigma_k}\operatorname{int}\left(I_{n_{k+1}}(W_k(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k))\right).$$

由于柱集 $I_{n_{k+1}}(\cdot)$ 为左闭右开区间，取内部 $\operatorname{int}(\cdot)$ 可确保其转化为开集。因此，构造的集合 V 为可数个开集的交集，严格满足 G_δ 集的定义。接下来只需证明 $V\subseteq E_Q(0,+\infty)$ 以及 V 在 $[0,1)$ 中稠密。

引理 3.1： $V\subseteq E_Q(0,+\infty)$.

证明： 固定任意 $x\in V$。由 V 的定义可知，存在无穷多个 k 使得 x 的前 n_{k+1} 位数字等于构造的 $W_k(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)$。先证明 $v_Q(x)=+\infty$。

当 $n=n_k+1$ 时，由于从 n_k+2 到 m_k 位数字为零，轨道 $T_Q^{n_k+1}(x)$ 的第一个非零项分母为 $q_{n_k+2}\cdots q_{m_{k+1}}$。因此

$$T_Q^{n_k+1}(x)\leq\left(q_{n_k+2}q_{n_k+3}\cdots q_{m_k}\right)^{-1}.$$

利用有界性 $2\leq q_i\leq M$，有

$$\left(q_{n_k+2}q_{n_k+3}\cdots q_{m_k}\right)^{-1}\leq 2^{-(m_k-n_k-1)}=2^{-(d_k-1)},$$

$$q_1\cdots q_{n_k+1}\leq M^{n_k+1}.$$

对任意给定的 $v>0$，欲证

$$2^{-(d_k-1)} \le \left(q_1 \cdots q_{n_k+1}\right)^{-v}.$$

只需

$$2^{-(d_k-1)} \le M^{-v(n_k+1)}.$$

即需

$$\frac{d_k-1}{n_k+1} \ge \frac{v\log M}{\log 2}.$$

由式(3.1)知，当 k 充分大时上式成立。

则有

$$T_Q^{n_k+1}(x) \le \left(q_{n_k+2} \cdots q_{m_k}\right)^{-1} \le 2^{-(d_k-1)} \le M^{-v(n_k+1)} \le \left(q_1 \cdots q_{n_k+1}\right)^{-v}.$$

根据渐近逼近指数的定义和 $v>0$ 的任意性，得

$$v_Q(x) = +\infty.$$

现再利用反证法证明 $\hat{v}_Q(x)=0$。事实上，若 $\hat{v}_Q(x)>0$，则存在 $\epsilon>0$，我们取 $\epsilon = \min\left\{\hat{v}_Q(x)/2, 1\right\}$，这一界限保证了 ϵ 是有界小量，从而使得后续的幂次放缩得以严密进行。对任意足够大的整数 N，都存在某个 $n \le N$，满足

$$T_Q^n(x) < \left(q_1 q_2 \cdots q_N\right)^{-\epsilon}. \tag{3.3}$$

取 $N = n_{k+1}$，我们断言当 k 足够大时，对于所有 $1 \le n \le n_{k+1}$，都有

$$T_Q^n(x) > 2^{-\epsilon n_{k+1}}. \tag{3.4}$$

实际上，当 $n < n_k$ 时，n 位于序列的前 n_k 位之内。无论 n 处于前块 W_{k-1} 的哪个位置，还是跨块连向了后续构造，其后续连续零段的最大长度必然受限于后续构造块 W_k 的连续零段 0^{n_k-k} 的长度，因此此时最大连续零长度不超过 n_k。

结合 $q_i \le M$ 和非零数字不小于 1，有

$$T_Q^n(x) \ge M^{-n_k}.$$

由序列构造可知 $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{n_k}{n_{k+1}} = 0$，故当 k 足够大时，

$$n_k < \epsilon n_{k+1} \cdot \frac{\log 2}{\log M}.$$

因此

$$T_Q^n(x) \ge M^{-n_k} > M^{-\epsilon n_{k+1} \cdot \frac{\log 2}{\log M}} = 2^{-\epsilon n_{k+1}}.$$

当 $n_k \le n < n_{k+1}$ 时，n 落在第 k 个构造块 W_k 内。根据 W_k 的构造，该区间由交替模块 $\left(1, 0^{d_k-1}\right)$ 与尾部补零段 0^{p_k} 构成。由于连续零段被数字 1 隔断，且 $p_k < d_k$，在此区间内最大连续零长度不超过 $2d_k$，有

$$T_Q^n(x) \ge M^{-(2d_k+1)}.$$

由式(3.2)知，当 k 足够大时，

$$1+2d_k < \epsilon n_{k+1} \cdot \frac{\log 2}{\log M}.$$

则有

$$T_Q^n(x) \geq M^{-(2d_k+1)} > M^{-\epsilon n_{k+1} \cdot \frac{\log 2}{\log M}} = 2^{-\epsilon n_{k+1}}.$$

从而式(3.4)成立。

由于 $q_i \geq 2$ 对所有 i 成立，有

$$q_1 q_2 \cdots q_{n_{k+1}} \geq 2^{n_{k+1}}.$$

因此

$$\left(q_1 q_2 \cdots q_{n_{k+1}}\right)^{-\epsilon} \leq 2^{-\epsilon n_{k+1}}. \tag{3.5}$$

由式(3.4) (3.5)可得

$$T_Q^n(x) > 2^{-\epsilon n_{k+1}} \geq \left(q_1 q_2 \cdots q_{n_{k+1}}\right)^{-\epsilon},$$

与式(3.3)矛盾。

因此当 k 足够大时，对任意 $1 \leq n \leq n_{k+1}$ 都有式(3.4)成立。这与式(3.3)矛盾。因此 $\hat{v}_Q(x) = 0$。综上，$x \in E_Q(0,+\infty)$，即 $V \subseteq E_Q(0,+\infty)$。

引理 3.2： V 在 $[0,1)$ 中稠密。

证明： 任取 $z \in [0,1)$ 和半径 $r > 0$。只需要证明存在 $y \in V$ 使得 $|z-y| \leq r$。

设 z 的 Cantor 级数展开前 q 位为 $\left(\epsilon_1(z), \cdots, \epsilon_q(z)\right)$。由柱集长度公式(2.1)，当 q 足够大时，有

$$\left(q_1 q_2 \cdots q_q\right)^{-1} \leq r.$$

在 V 的定义中取 $k \geq q$，将自由前缀 $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k)$ 固定为

$$(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k) = \left(\epsilon_1(z), \cdots, \epsilon_q(z), 0, \cdots, 0\right).$$

令

$$y \in \operatorname{int}\left(I_{n_{k+1}}\left(W_k(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k)\right)\right).$$

由 V 的构造知 $y \in V$。注意到 y 和 z 前 q 个数字相同，故它们位于同一个 q 阶柱集 $I_q(z)$ 中，因此它们的距离小于该柱集的长度，即

$$|z-y| \leq \left(q_1 q_2 \cdots q_q\right)^{-1} \leq r.$$

故 V 在 $[0,1)$ 中稠密。

由引理 3.1 和引理 3.2，V 是稠密的 G_δ 集且 $V \subseteq E_Q(0,+\infty)$。由 Baire 纲定理，$E_Q(0,+\infty)$ 也包含稠密 G_δ 子集，则其为剩余集。定理 1.1 证毕。

4. 推论 1.2 和 1.3 的证明

推论 1.2 的证明： 由定理 1.1 可知，极致例外集 $E_Q(0,+\infty)$ 包含一个稠密 G_δ 子集 V。因为 $E_Q(0,+\infty) \subseteq \left\{x \in [0,1) : \hat{v}_Q(x) = 0\right\}$，所以 V 也包含于 $\left\{x \in [0,1) : \hat{v}_Q(x) = 0\right\}$ 中。一个包含稠密 G_δ 子集的集合必然也是剩余集，故 $\left\{x \in [0,1) : \hat{v}_Q(x) = 0\right\}$ 为剩余集。

推论 1.3 的证明：对任意 $0<\hat{v}\le 1$，记 $A=\left\{x\in[0,1):\hat{v}_Q(x)\ge\hat{v}\right\}$，$B=\left\{x\in[0,1):\hat{v}_Q(x)=\hat{v}\right\}$。由定理 1.1 可知，极致例外集 $E_Q(0,+\infty)$ 在 $[0,1)$ 中是剩余集。根据剩余集的拓扑定义，其补集 $E_Q(0,+\infty)^c$ 是一个第一纲集。注意到，对于任意 $x\in E_Q(0,+\infty)$，其一致逼近指数满足 $\hat{v}_Q(x)=0$。

给定 $0<\hat{v}\le 1$，显然有 $0<\hat{v}$，这意味着 $E_Q(0,+\infty)$ 中的点均不满足 $\hat{v}_Q(x)\ge\hat{v}$。换言之，集合 A 与 $E_Q(0,+\infty)$ 互不相交，即 $A\cap E_Q(0,+\infty)=\varnothing$。由此可得包含关系：$A\subseteq E_Q(0,+\infty)^c$。

由拓扑学中第一纲集的遗传性可知，第一纲集的任何子集仍为第一纲集。由于 A 是第一纲集 $E_Q(0,+\infty)^c$ 的子集，故集合 A 也是第一纲集。又因为集合 $B\subseteq A$，再次由第一纲集的遗传性可知，集合 B 也是第一纲集。

综上所述，对任意 $0<\hat{v}\le 1$，集合 $\left\{\hat{v}_Q(x)\ge\hat{v}\right\}$ 和 $\left\{\hat{v}_Q(x)=\hat{v}\right\}$ 均为第一纲集。

5. 讨论

本文定理 1.1 的证明严格依赖于基序列 $Q=\{q_n\}_{n\ge1}$ 的有界性假设，即存在常数 $M\ge2$ 使得对任意 $n\ge1$ 有 $q_n\le M$。该假设在构造稠密 G_δ 子集及后续的测度与极限估计中起到了核心的支撑作用。

在引理 3.1 对轨道值 $T_Q^n(x)$ 进行渐近估计时，有界性保证了对分母乘积的一致放缩。具体而言，当处理连续零段时，利用 $2\le q_i\le M$，分母的累积乘积被限制在 M 的幂次范围内，这使得轨道值的界能够被统一控制。在正向证明中，确立了关键上界 $2^{-(d_k-1)}$，以及反证法中确立轨道值的下界 M^{-n_k} 与 $M^{-(2d_k+1)}$。若序列无界，过长零块会导致分母乘积急剧膨胀，使得轨道值的衰减速率突破 M^{-n} 的框架。这种极端的不均匀衰减将使得基于柱集长度的覆盖引理失去一致收敛性，从而破坏引理 3.1 的证明结构。

在反证法推导矛盾的过程中，有界性同样确保了关键常数项的稳定性。推导过程中需比较轨道值下界与 $M^{-\epsilon n_{k+1}\frac{\log 2}{\log M}}$ 的量级。比值 $\dfrac{\log 2}{\log M}$ 作为一个仅依赖于上界 M 的正规常数(记为 $C>0$)，使得我们能够利用 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{n_k}{n_{k+1}}=0$ 和 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{d_k}{n_{k+1}}=0$ 的条件，在 k 充分大时自然导出不等式 $n_k<\epsilon n_{k+1}C$ 与 $1+2d_k<\epsilon n_{k+1}C$。若允许 q_n 无界，该比值将退化为一个随 n 波动的变量序列，原本基于极限保号性的严密推理将不再成立。

若尝试将本文的结论推广至无界情形，所面临的困难是本质性的。此时柱集长度的衰减呈现出极不均匀的分布，动力系统的轨道波动更为剧烈，均匀逼近指数的阶数将深刻依赖于 q_n 的发散速度。正如文献[4]所指出的，无界情形通常需要附加诸如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log q_n}{\log(q_1\cdots q_n)}=0$ 的控制条件，才能对柱集的长度进行有效的渐近估计。在缺乏统一上界 M 的框架下，本文基于恒长零块构造稠密 G_δ 子集的方法将不再适用，寻找适配的测度分配方案与精细的块结构将成为后续研究的重要挑战。本文在有界假设下建立的拓扑剩余性理论，为该类问题的无界推广提供了必要的分析基础与方法参考。

参考文献

[1] Cantor, G. (1869) Uber die einfachen Zahlensysteme. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **14**, 121-128.

[2] Fishman, L., Mance, B., Simmons, D. and Urbański, M. (2015) Shrinking Targets for Nonautonomous Dynamical Systems Corresponding to Cantor Series Expansions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **92**, 205-213. https://doi.org/10.1017/s0004972715000441

[3] Sun, Y. and Cao, C. (2017) Dichotomy Law for Shrinking Target Problems in a Nonautonomous Dynamical System: Cantor Series Expansion. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **145**, 2349-2359. https://doi.org/10.1090/proc/13420

[4] Shen, Z. and Zhang, B. (2025) Inhomogeneous and Simultaneous Diophantine Approximation in Cantor Series Expansions.

Journal of Mathematical Analysis and Applications, **550**, Article 129589. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.129589

[5] Han, Y. and Ma, C. (2021) Uniform Diophantine Approximation to Cantor Series Expansion. *Fractals*, **29**, Article ID: 2150206. https://doi.org/10.1142/s0218348x21502066

[6] Zheng, L., Wu, Z. and Yuan, N. (2025) Extremely Exceptional Sets on Run-Length Function for Reals in Beta-Dynamical System. *Axioms*, **14**, Article 631. https://doi.org/10.3390/axioms14080631

[7] 吴梓滢, 郑丽璇. 一般函数下 Beta-展式中极致例外集的剩余性质[J]. 应用数学进展, 2025, 14(8): 134-140. https://doi.org/10.12677/aam.2025.148377

[8] Tan, B. and Zhou, Q. (2024) Uniform Diophantine Approximation and Run-Length Function in Continued Fractions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **45**, 1246-1280. https://doi.org/10.1017/etds.2024.71

[9] Chang, X., Dong, Y., Liu, M. and Shang, L. (2024) Baire Category and the Relative Growth Rate for Partial Quotients in Continued Fractions. *Archiv der Mathematik*, **122**, 41-46. https://doi.org/10.1007/s00013-023-01914-6

[10] Burgos, S. and Pesin, Y. (2026) Irregular Sets in Dynamical Systems: A Survey. *Theory of Probability & Its Applications*, **70**, 659-664. https://doi.org/10.1137/s0040585x97t992690

[11] Shen, Z. (2025) Moving Recurrent Problems in the Nonautonomous Dynamical Systems Corresponding to Cantor Series Expansions. *Acta Mathematica Hungarica*, **175**, 433-451. https://doi.org/10.1007/s10474-025-01514-6

[12] Zheng, L. (2019) Diophantine Approximation and Run-Length Function on B-Expansions. *Journal of Number Theory*, **202**, 60-90. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2019.01.017