Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 270-276
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511449

Hans汉斯

利用数学归纳法求一类余图的最小安全支配集

刘　悦

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2026年10月19日；录用日期：2026年11月13日；发布日期：2026年11月24日

摘　要

安全支配集是图控制理论中的重要研究对象。设集合 S 为图 G 的一个支配集。若对于 $V(G)\setminus S$ 中任意点 u，其在 S 中存在一邻点 v，使得 $(S\setminus\{v\})\cup\{u\}$ 是 G 的支配集，则称 S 是 G 的一个安全支配集。将 G 所有安全支配集中基数最小的安全支配集称作 G 的最小安全支配集，其基数称为 G 的安全支配数，记作 $\gamma_s(G)$。余图是不含 P_4 作为导出子图的图，连通余图也可表示为两个顶点不交余图的联图。已有文献对单点与不连通余图的联图的最小安全支配集的存在性做了研究。受现有研究启发，本文考虑单点与余图的联图，给出了这类图最小安全支配集的构成方式并利用数学归纳法对其进行证明。

关键词

安全支配集，余图，联图

Using Induction to Give a Minimum Secure Dominating Set of a Class of Cograph

Yue Liu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: October 19, 2026; accepted: November 13, 2026; published: November 24, 2026

Abstract

Secure dominating sets are important research objects in graph control theory. Let S be a dominating set of a graph G. If for any vertex $u\in V(G)\setminus S$, there exists a neighbor v of u in S such that $(S\setminus\{v\})\cup\{u\}$ is a dominating set of G, then S is called a secure dominating set of G. A minimum secure dominating set of G refers to the secure dominating set with the smallest

文章引用: 刘悦. 利用数学归纳法求一类余图的最小安全支配集[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 270-276.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511449

cardinality among all secure dominating sets of G, and its cardinality is termed the secure domination number of G, denoted by $\gamma_s(G)$. A cograph is a graph containing no P_4 as an induced subgraph, and a connected cograph can also be expressed as the join of two vertex-disjoint cographs. Existing literature has investigated the existence of minimum secure dominating sets for the join of a single vertex and a disconnected cograph. Inspired by those works, this paper considers the join of a single vertex and a cograph, characterizes the construction of minimum secure dominating sets for such graphs, and proves the results by mathematical induction.

Keywords

Secure Dominating Set, Cograph, Join Graph

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文只研究简单图。对于文中未定义的符号与术语，若无特别说明，请参照文献[1]。设G为一个图，且$S\subseteq V(G)$。本文用$G-S$和$G[S]$分别表示G的由顶点集$V(G)\setminus S$和S导出的子图。同时，$G-S$也用来代表顶点集$V(G)\setminus S$。记$|G|$为图G的阶。对于顶点$v\in V(G)$，定义$N_S(v)=\{u\in S\mid uv\in E(G)\}$，$d_S(v)=|N_S(v)|$；为简化书写，当$S=G$时，简记$N(v)=N_G(v)$，$d(v)=|N_G(v)|$。记$N[v]=N(v)\cup\{v\}$，$N[S]=N(S)\cup S$。用$w(G)$表示$G$中所有分支数。对于正整数$k$，规定$[k]=\{i:i\le 1\le k,i\text{为整数}\}$。

设顶点集$D\subseteq V(G)$，若G的每一个顶点属于D或与D中某个顶点相邻，则称D是G的一个支配集。在G的所有支配集中，基数最小的支配集称为G的最小支配集，其基数称为G的支配数，记作$\gamma(G)$。设D是G的一个支配集。对于D中的顶点u，定义$epn_G(u,D)=\{w\in G-D:N(w)\cap D=\{u\}\}$。在不产生歧义时，可简记为$epn(u,D)$。若对于$V(G)\setminus D$中任意点$u$，其在$D$中存在一邻点$v$，使得$(D\setminus\{v\})\cup\{u\}$是$G$的支配集，则称$D$是$G$的一个安全支配集(简记为 SDS)。读者可以借助“守卫模型”加以理解[2]：将图的顶点理解为需要守卫的位置，在支配集D的每个顶点上部署一名守卫。支配集的含义是：每一处位置，要么本身有守卫，要么被相邻顶点的守卫监视覆盖。而安全支配集增加了一层“应急防护”的要求：假设某位置u出现突发状况，需要派一名守卫前往u处置。我们从原本覆盖u的守卫里挑选一名守卫v，让守卫v移动到顶点u。守卫v离开原来位置移动到u之后，剩下所有守卫连同新到u的这名守卫，仍然可以监视全部位置。换句话说：任意一处地点发生扰动，总能选出一名覆盖该点的守卫前去支援；守卫调动之后，全图依旧保持被支配。在G的所有安全支配集中，基数最小的安全支配集称为G的最小安全支配集(简记为 $MSDS$)，其基数称为G的安全支配数，记作$\gamma_s(G)$。

设G_1和G_2是两个顶点不交的图。G_1和G_2的并图记作$G=G_1\cup G_2$，其顶点集$V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$，边集$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)$。G_1和G_2的联图记作$G_1\vee G_2$，其顶点集$V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$，边集$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv:u\in V(G_1),v\in V(G_2)\}$。

余图是不含P_4作为导出子图的图，它也可这样定义：图G是余图当且仅当下列条件之一成立：(1) $|G|=1$；(2) G_1和G_2是两个顶点不交的余图，且$G=G_1\cup G_2$；(3) G_1和G_2是两个顶点不交的余图，且$G=G_1\vee G_2$。

显然，G 是一个至少有 2 个点的连通余图当且仅当 G 是两个顶点不交的余图 G_1 和 G_2 的联图，即 $G=G_1\vee G_2$。

设 G 为一个图。定义 $Q(G)=\{u\in V(G):G-N[u]$ 是一个团$\}$。注意：若 G 是完全图，则 $Q(G)=\varnothing$。记 $D(G)$ 为 G 的一个最小支配集。显然，如果 G 是连通余图，则 $\gamma(G)=|D(G)|\le 2$。若 G 由分支 $H_1,\cdots,H_k$ 构成，$k=\omega(G)$，则记 $G=H_1\cup\cdots\cup H_k$，其中 $H_i\in G$，$i\in[k]$。设 $G=G_1\vee G_2$ 为余图，满足 $|G_1|=1$。记 $\mathcal{S}_1(G_2)=\{H\in G_2\mid \gamma_s(H)=1$ 或 $\gamma(H)=2$ 且 $q(H)=1\}$，$S_2(G_2)=\{H\in G_2\mid H\notin\mathcal{S}_1(G_2)\}$。

安全支配集概念最早由 Cockayne 等人提出[3]，随后 Cockayne 等人在图的保护框架下对安全支配等防御策略进行了系统研究[4]，为本文研究提供了基本概念框架。Haynes 等人在支配理论专著中系统介绍了私有邻点及其相关性质[5]。这一基础工具后来被广泛应用于安全支配集的证明中，为本文的论证提供了核心工具。Corneil 等人揭示了余图可以通过不交并和联图运算递归构造，并可由 cotree 描述其层次结构[6]。这一递归结构为本文采用数学归纳法，依据 G_2 的连通分支结构开展证明提供了启发。Jha 等人研究了余图上的安全支配问题，并利用 cotree 结构提出了计算安全支配数的线性时间算法。他们在引理 7 中讨论了单点图与不连通余图构成的联图，证明了最小安全支配集 S 的存在性，并证明了当分支满足性质 P^* 时，S 与分支顶点集之交的基数等于 $\gamma(H)-1$ [1]。在现有相关研究中，针对单点图与余图联图的讨论多聚焦于 G_2 为不连通余图的情形，相关工作更多关注最小安全支配集的存在性。在此基础上，本文进一步考察 $G=G_1\vee G_2$，$G_1=K_1$。其中本文将研究范围拓展至一般余图，允许 G_2 可以是连通图，也可以是不连通图。与文献[1]的研究对象不同，本文重点构造该类联图的最小安全支配集，进一步刻画其外部私有邻点的结构，并在 $\mathcal{S}_1(G_2)\neq\varnothing$ 时，得到关系式 $|S\cap V(H)|=\gamma(H)-1$。

受上述研究结果启发，本文得到主要结果如下：

定理 1. 设 $G=G_1\vee G_2$ 是一个阶至少为 2 的余图且 $V(G_1)=\{v\}$。则有以下结论：(1) 若 $\mathcal{S}_1(G_2)\neq\varnothing$，则对每个分支 $H\in\mathcal{S}_1(G_2)$，图 G 存在一个 *MSDS* $S=\left(\bigcup_{H'\in\mathcal{S}_1(G_2)\setminus\{H\}}D(H')\cup Q(H)\right)\cup\left(\bigcup_{H''\in\mathcal{S}_2(G_2)}D(H'')\right)\cup\{v\}$ 满足 $\varnothing\neq epn_G(v,S)\subseteq V(H)$ 和 $|S\cap V(H)|=\gamma(H)-1$。(2) 若 $\mathcal{S}_1(G_2)=\varnothing$，则图 G 存在一个 *MSDS* $S=\bigcup_{H\in\mathcal{S}_2(G_2)}D(H)\cup\{v\}$ 满足 $epn_G(v,S)=\varnothing$。

2. 预备知识

引理 1 [7] 设 G 是一个连通余图满足 $\gamma_s(G)=2$，且 S 是 G 的一个 *MSDS*，则对每个点 $u\in S$，有 $\{u\}=D(H)$ 或 $u\in Q(G)$。

性质 1 [7] G 为完全图当且仅当 $\gamma_s(G)=1$。

性质 2 [4] 设 S 是图 G 的一个 *SDS*，则对每个点 $u\in S$，导出子图 $G[epn(u,S)\cup\{u\}]$ 是一个团。

3. 定理 1 的证明

证明：本文对 G_2 的连通分支数作数学归纳法来证明该定理。假设 G_2 为连通图。设 $G_2\in\mathcal{S}_1(G_2)$。假设 G_2 是完全图。根据 $Q(G_2)$ 的定义，显然有 $Q(G_2)=\varnothing$。由于 G_2 是完全图，故 G 也是完全图。根据性质 1 可知 $\gamma_s(G)=1$。由安全控制集定义，容易验证 $S=\{v\}$ 是 G 的一个 *MSDS*。此时 G_2 中的顶点在 S 中的邻接点仅有 v，均属于 v 的外部私有邻点，从而 $epn_G(v,S)\neq\varnothing$。另外，由 G_2 为完全图可知其支配数 $\gamma(G_2)=1$。因为 $v\notin V(G_2)$，因此 $|S\cap V(G_2)|=0=\gamma(G_2)-1$。为了更直观地理解这一结论，图 1 给出了当 $G_2=K_4$ 时的一个具体示例。设 G_2 不是完全图，则 $\gamma_s(G)\ge 2$；进而，由于 $G_2\in\mathcal{S}_1(G_2)$ 且 G_2 不是完全图，可得

$\gamma(G_2)=2$。根据$\mathcal{S}_1(G_2)$的定义，$Q(G_2)\neq\varnothing$。设$u\in Q(G_2)$。由于G_2中每个点均与v相邻，故$S=\{u,v\}$是G的一个支配集；进而，$V(G_2)\setminus N_{G_2}(u)=epn_G(v,S)$，且由于$u\in Q(G_2)$，故$epn_G(u,S)=\varnothing$。因此$S$是$G$的一个$SDS$。又因为$G$不是完全图，$\gamma_s(G)\geq 2$，所以$S$是$G$的一个$MSDS$满足$|S\cap V(G_2)|=1=\gamma(G_2)-1$。具体示例如图 2 所示。假设$G_2\in\mathcal{S}_2(G_2)$，则$\min\{\gamma_s(G),\gamma_s(G_2)\}\geq 2$。设$S_1$是$G_2$的一个最小支配集。由于$G_2$中每个点均与$v$相邻，故$S=S_1\cup\{v\}$是$G$的一个$SDS$，满足对每个点$x\in S$都有$epn_G(x,S)=\varnothing$。由$|S_1|\leq 2$，本文可得$|S|\leq 3$，因此$\gamma_s(G)\leq 3$。显然，若$\gamma(G_2)=1$，则$|S|=2$，且$S$是$G$的一个$MSDS$，这与$\gamma_s(G)\geq 2$的结论相符。假设$\gamma(G_2)=2$，则$|S|=3$。本文断言$S$是$G$的一个$MSDS$。否则，由于$G$不是完全图，故$\gamma_s(G)=2$。假设$S'$是$G$的一个$MSDS$且$S'\subseteq V(G_2)$。显然，$|S'|=2$。由引理 1，$S'$中的点要么满足$\{u\}=D(G_2)$，要么属于$Q(G)$。若$S'$中所有点均满足$\{u\}=D(G_2)$，则说明单个点即可支配$G_2$，与$\gamma(G_2)=2$矛盾。因此，$u\in Q(G_2)$。故有$Q(G_2)\neq\varnothing$且$G_2\in\mathcal{S}_1(G_2)$，与$G_2\in\mathcal{S}_2(G_2)$产生矛盾。假设$S'=\{u,v\}$，则由$\gamma(G_2)=2$可得$epn_G(v,S')\neq\varnothing$。根据性质 2，对$v\in S'$，导出子图$G[epn(v,S')\cup\{v\}]$是一个团，显然其子图$G[epn(v,S')]$也是一个团。由于$S'$是支配集，图$G_2$中去除$u$及其邻点后剩余点恰好构成$epn(v,S')$。因此，剩余点导出的子图是一个团。由$Q(G_2)$的定义可知，$u\in Q(G_2)$。此时满足$\gamma(G_2)=2$且$q(G_2)=1$，因此$G_2\in\mathcal{S}_1(G_2)$，这与前提假设$G_2\in\mathcal{S}_2(G_2)$产生矛盾。具体示例如图 3 所示。于是，归纳法的基例成立。

设G_2含k个连通分支$H_1,\cdots,H_k$，其中$k\geq 2$。本文假设当$w(G_2)<k$时，定理成立。设$\mathcal{S}_1(G_2)=\varnothing$。则对每一个$i\in[k]$有$H_i\in\mathcal{S}_2(G_2)$。设$G_2'=\bigcup_{i=2}^{k}H_i$，$G'=G_1\vee G_2'$。由归纳假设可知，$G'$存在一个$MSDS$ S'满足$S'=\bigcup_{i=2}^{k}D(H_i)\cup\{v\}$。设$S_1$是$H_1$的一个最小支配集。并假设$S=S_1\cup S'$。由于$G_2$里的每个点都与$v$相邻，则对每个点$x\in S_1$有$epn_G(x,S)=\varnothing$。因此$S$是$G$的一个$SDS$满足$|S|=\sum_{i=1}^{k}\gamma(H_i)+1$。故只需证明$S$是$G$的一个$MSDS$。否则，存在$G$的一个$MSDS$ S''满足$|S|>|S''|$。假设$v\in S''$。由$|S|=\sum_{i=1}^{k}\gamma(H_i)+1$知，存在一个分支$H\in G_2$满足$|V(H)\cap S''|<\gamma(H)$。注意到$1\leq\gamma(H)\leq 2$。若$\gamma(H)=1$，则$V(H)\cap S''=\varnothing$且$epn_G(v,S'')=V(H)$。由性质 2 可知$G[V(H)\cup\{v\}]$是一个团，故子图$H$为完全图。因此$H\in\mathcal{S}_1(G_2)$，这与前提假设$G_2\in\mathcal{S}_2(G_2)$产生矛盾。假设$\gamma(H)=2$。则$|S''\cap V(H)|=1$。假设$u\in S''\cap V(H)$。则$\varnothing\neq epn_G(v,S'')=V(H)\setminus N_H(u)$。由性质 2 可知$u\in Q(H)$。此时$H$满足$\gamma(G_2)=2$且$q(G_2)=1$。由$\mathcal{S}_1(G_2)$的定义可知，$H\in\mathcal{S}_1(G_2)$，与$\mathcal{S}_1(G_2)=\varnothing$矛盾。假设$v\notin S''$，则$S''=\bigcup_{i=1}^{k}S(H_i)$是$G$的一个$MSDS$，因此$|S''|=\sum_{i=1}^{k}\gamma_s(H_i)$。由$|S''|<|S|=\sum_{i=1}^{k}\gamma(H_i)+1$，本文可得$\sum_{i=1}^{k}\gamma_s(H_i)\leq\sum_{i=1}^{k}\gamma(H_i)$。注意：对每个$i\in[k]$，有$1\leq D(H_i)\leq 2$。由$S_1(G_2)=\varnothing$，可得$\gamma_s(H_i)\geq 2$。因此$\sum_{i=1}^{k}\gamma_s(H_i)=\sum_{i=1}^{k}\gamma(H_i)$，进而对每个$i\in[k]$，都有$\gamma_s(H_i)=\gamma(H_i)=2$。根据引理 1，对每个$i\in[k]$，都有$Q(H_i)\neq\varnothing$，于是$H_i\in S_1(G_2)$，矛盾。故当$S_1(G_2)=\varnothing$时定理成立。为辅助理解，图 4 以$k=2$为例，展示$\mathcal{S}_1(G_2)=\varnothing$时的一个具体构造。

假设$\mathcal{S}_1(G_2)\neq\varnothing$。不失一般性，本文假设$H_1\in\mathcal{S}_1(G_2)$。设$G_2'=\bigcup_{i=1}^{k-1}H_i$，$G'=G_1\vee G_2'$。由归纳假设可知，$G'$存在一个$MSDS$ S'满足$S'=\bigcup_{\substack{1\leq j\leq k-1\\ j\neq 1}}D(H_j)\cup\{v\}\cup Q(H_1)$，$\varnothing\neq epn_G(v,S')\subseteq V(H_1)$和$|S'\cap V(H_1)|=\gamma(H_1)-1$。则$|S'|=\sum_{i=1}^{k-1}\gamma(H_i)$。设$S_k'$是$H_k$的一个最小支配集，且$S=S'\cup S_k'$。因为$G_2$里的每个点都与$v$相邻，所以$epn_G(v,S)=epn_G(v,S')$且$S$是$G$的一个$SDS$。进而，$|S|=\sum_{i=1}^{k}\gamma(H_i)$。本文断言$S$是$G$的一个$MSDS$。反之，$G$存在一个$MSDS$ S''满足$|S|>|S''|$。则$|S''|\leq\sum_{i=1}^{k}\gamma(H_i)-1$。假设$v\in S''$。则$G_2$里存在一个分支$H$满足$|S''\cap V(H)|\leq\gamma(H)-2$或$G_2$里至少存在两个分支$H_i$，$H_j$满足

$\left|S''\cap V\left(H_i\right)\right|\le\gamma\left(H_i\right)-1$和$\left|S''\cap V\left(H_j\right)\right|\le\gamma\left(H_j\right)-1$，其中$i,j\in[k]$，$i\ne j$。假设$H\in G_2$满足$\left|S''\cap V\left(H\right)\right|\le\gamma\left(H\right)-2$。由$1\le\gamma\left(H\right)\le 2$可得$\gamma\left(H\right)=2$且$S''\cap V\left(H\right)=\varnothing$。于是$H$是完全图，与$\gamma\left(H\right)=2$矛盾。设$G_2$中存在分支$H_i,H_j$，满足$\left|S''\cap V\left(H_i\right)\right|\le\gamma\left(H_i\right)-1$和$\left|S''\cap V\left(H_j\right)\right|\le\gamma\left(H_j\right)-1$，其中$i,j\in[k]$且$i\ne j$。则$epn_G\left(v,S''\right)\cap V\left(H_i\right)\ne\varnothing$，且$epn_G\left(v,S''\right)\cap V\left(H_j\right)\ne\varnothing$，这与性质2矛盾。假设$v\notin S''$。则$\bigcup_{i=1}^{k}S\left(H_i\right)$是$G$的一个*MSDS*，因此$\left|S''\right|=\sum_{i=1}^{k}\gamma_s\left(H_i\right)$。由$\left|S''\right|<\left|S\right|$以及$\left|S\right|=\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(H_i\right)$，可得$\sum_{i=1}^{k}\gamma_s\left(H_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(H_i\right)-1$。而对每个$i\in[k]$均有$\gamma_s\left(H_i\right)\ge\gamma\left(H_i\right)$，故推出矛盾。因此，$\gamma_s\left(G\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(H_i\right)$。进而$S$是$G$的一个*MSDS*，且满足$\varnothing\ne epn_G\left(v,S\right)\subset V\left(H_1\right)$和$\left|S\cap V\left(H_1\right)\right|=\gamma\left(H_1\right)-1$。由于构造所得的*MSDS*的基数等于所有连通分支支配数之和$\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(H_i\right)$，故其基数与特殊分支的具体选取无关。因此，类似地，若对某个i，$2\le i\le k-1$，有$H_i\in\mathcal{S}_1\left(G_2\right)$，则$G$存在一个*MSDS* S_i满足$\varnothing\ne epn_G\left(v,S_i\right)\subset V\left(H_i\right)$和$\left|S_i\cap V\left(H_i\right)\right|=\gamma\left(H_i\right)-1$。假设$H_k\in\mathcal{S}_1\left(G_2\right)$。设$G_2''=\bigcup_{i=2}^{k}H_i$，且$G''=G_1\vee G_2''$。对该情形应用上述论证，同样可得$G$存在一个*MSDS* S_k，满足$\varnothing\ne epn_G\left(v,S_k\right)\subset V\left(H_k\right)$和$\left|S_i\cap V\left(H_k\right)\right|=\gamma\left(H_k\right)-1$。为辅助理解，图5以$k=2$为例，展示$\mathcal{S}_1\left(G_2\right)\ne\varnothing$时，$H_1\in\mathcal{S}_1\left(G_2\right)$的一个具体构造。

为直观展示上述归纳证明中不同情形的结构，图1~5分别给出了各对应情形的具体示例。

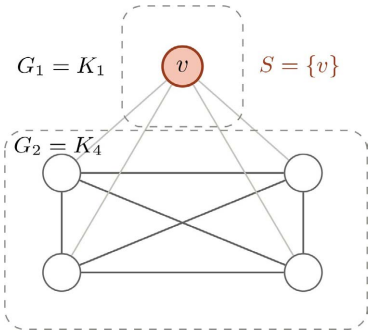


Figure 1. The connected graph $G_2\in\mathcal{S}_1\left(G_2\right)$ and is a complete graph. $S=\{v\}$ is a minimum secure dominating set

图1. 连通图$G_2\in\mathcal{S}_1\left(G_2\right)$且为完全图。$S=\{v\}$是最小安全支配集

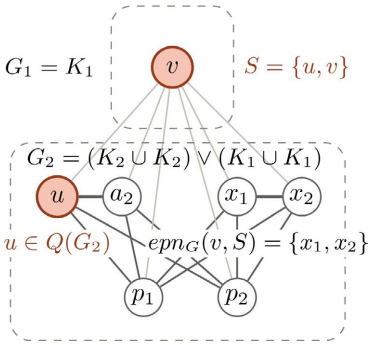


Figure 2. The connected graph $G_2\in\mathcal{S}_1\left(G_2\right)$ is not a complete graph, and $S=\{u,v\}$ is a minimum secure dominating set of G_2

图2. 连通图$G_2\in\mathcal{S}_1\left(G_2\right)$，且为非完全图。$S=\{u,v\}$是最小安全支配集

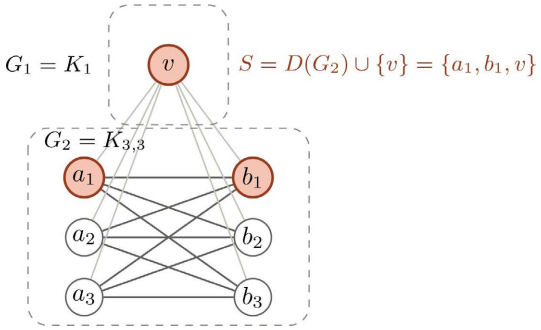


Figure 3. G_2 is a connected cograph with $G_2 \in \mathcal{S}_2(G_2)$, and $S = D(G_2) \cup \{v\} = \{a_1, b_1, v\}$ is a minimum secure dominating set

图 3. G_2 为连通余图且属于 $\mathcal{S}_2(G_2)$。$S = D(G_2) \cup \{v\} = \{a_1, b_1, v\}$ 是最小安全支配集

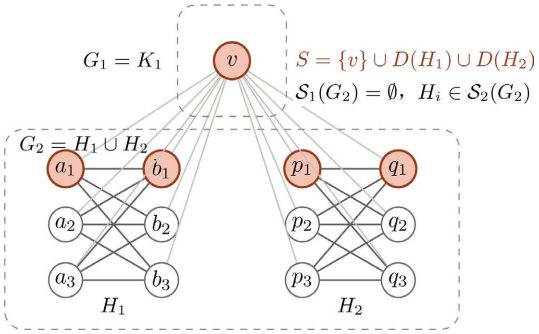


Figure 4. Every component $H_i \in \mathcal{S}_2(G_2)$. The set of red vertices $S = \{v\} \cup D(H_1) \cup D(H_2)$ is a minimum secure dominating set of G

图 4. 每个分支 $H_i \in \mathcal{S}_2(G_2)$，红色顶点构成 $S = \{v\} \cup D(H_1) \cup D(H_2)$ 是 G 的最小安全支配集

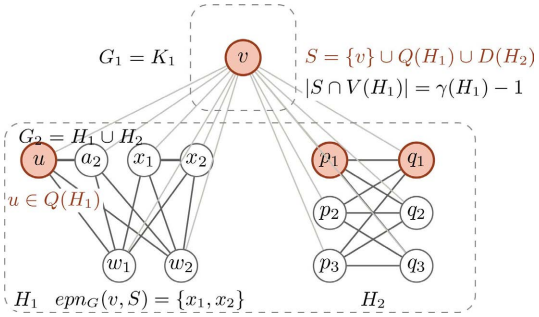


Figure 5. $H_1 \in \mathcal{S}_1(G_2)$ and the other components satisfy $H_i \in \mathcal{S}_2(G_2)$. The red vertex set $S = \{v, u, p_1, q_1\}$ is a minimum secure dominating set of G

图 5. $H_1 \in \mathcal{S}_1(G_2)$，其余分支 $H_i \in \mathcal{S}_2(G_2)$。红色顶点 $S = \{v, u, p_1, q_1\}$ 是 G 的最小安全支配集

4. 结论

本文研究一类特殊余图——$G = G_1 \vee G_2$，$G_1 = K_1$ 的最小安全支配集问题。利用对 G_2 连通分支数的数学归纳法，证明了该类联图最小安全支配集的存在性，并分情形给出最小安全支配集的显式构造。当

$\mathcal{S}_1(G_2)\neq\varnothing$时，对$\mathcal{S}_1(G_2)$中任意连通分支$H$，构造得到的最小安全支配集$S$满足外部私有邻点$epn_G(v,S)\neq\varnothing$和$epn_G(v,S)\subseteq V(H)$，并且$|S\cap V(H)|=\gamma(H)-1$；当$\mathcal{S}_1(G_2)=\varnothing$时，构造的最小安全支配集满足$epn_G(v,S)=\varnothing$。

与文献[1]等相关研究相比，本文扩大研究范围，讨论单点与一般余图的联图。本文的推广与创新之处在于：不仅证明了单点与余图联图的最小安全支配集的存在性，更重要的是给出了其显式构造方式。这在应用和算法设计上更具价值。由于余图可用余树来表示，本文给出的显式构造具有极强的局部性和递归特征。这意味着，我们可以基于余树的树形结构，设计一种自底向上的动态规划算法，在线性时间$O(|V|+|E|)$内高效地计算出此类联图的最小安全支配集及其安全支配数。

所得结果丰富了余图上最小安全支配集的研究成果，为联图的最小安全支配集研究提供构造思路。关于未来的研究方向：一方面，将G_1推广为K_t $(t\geq 2)$或一般余图，进一步讨论其最小安全支配集构造；另一方面，可进一步探讨如何将该显式构造与余树数据结构结合，将线性时间算法推广至更广泛的图类。

参考文献

[1] Jha, A., Pradhan, D. and Banerjee, S. (2019) The Secure Domination Problem in Cographs. *Information Processing Letters*, **145**, 30-38. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2019.01.005

[2] Haythorpe, M. and Newcombe, A. (2022) The Secure Domination Number of Cartesian Products of Small Graphs with Paths and Cycles. *Discrete Applied Mathematics*, **309**, 32-45. https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.11.008

[3] Cockayne, E.J., Favaron, O. and Mynhardt, C.M. (2003) Secure Domination, Weak Roman Domination and Forbidden Subgraphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*, **39**, 87-100.

[4] Cockayne, E.J., Grobler, P.J.P., Gründlingh, W.R., Munganga, J. and van Vuuren, J.H. (2005) Protection of a Graph. *Utilitas Mathematica*, **67**, 19-32.

[5] Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and Slater, P.J. (1998) Fundamentals of Domination in Graphs. Marcel Dekker.

[6] Corneil, D.G., Lerchs, H. and Burlingham, L.S. (1981) Complement Reducible Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **3**, 163-174. https://doi.org/10.1016/0166-218x(81)90013-5

[7] Araki, T. and Yamanaka, R. (2019) Secure Domination in Cographs. *Discrete Applied Mathematics*, **262**, 179-184. https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.02.043