Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 213-222
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511444

Hans汉斯

高对比度椭圆界面的随机特征配点方法

王嘉伟

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2026年10月17日；录用日期：2026年11月12日；发布日期：2026年11月18日

摘　要

针对具有分片材料系数和给定界面跳跃条件的高对比度$\mathbf{H}(\mathbf{div})$型椭圆界面问题，研究共享输出系数的随机特征配点方法及其高对比度离散误差。引入取值为-1和1的分类变量，使同一组随机特征能够表示界面两侧不同的向量场，并统一离散区域方程、法向边界条件及两类界面跳跃。进一步引入辅助变量$\mathbf{p}=\alpha\nabla\cdot\mathbf{u}$，构造一阶混合配点形式，并依据能量尺度对辅助关系残差施加$\sqrt{\alpha}$权重。二维数值结果表明，在$\rho=10^{6}$时，基本混合形式的相对L^{2}误差中位数为7.30×10^{-6}，约为增广单网络二阶形式的$1/61$；但双网络二阶形式仍达到1.89×10^{-6}。通量增强可显著降低原始界面通量残差，却会增大场误差。结果说明，方程改写的效果依赖于分片表示、残差权重和随机特征尺度，不能推广为所有高对比度问题的统一优势。

关键词

$\mathbf{H}(\mathbf{div})$型界面问题，随机特征，极限学习机，分类变量增广，高系数对比度

Random Feature Collocation for High-Contrast Elliptic Interface Problems

Jiawei Wang

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science & Technology, Changsha Hunan

Received: October 17, 2026; accepted: November 12, 2026; published: November 18, 2026

Abstract

This paper studies random feature collocation with shared output coefficients for high-contrast $\mathbf{H}(\mathbf{div})$-type elliptic interface problems with piecewise material coefficients and prescribed interface jumps, and analyzes its discretization error at high contrast. A categorical variable taking the values

文章引用: 王嘉伟. 高对比度椭圆界面的随机特征配点方法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 213-222.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511444

−1 and 1 is introduced so that one set of random features can represent different vector fields on the two sides of the interface; the subdomain equations, the normal boundary condition and the two interface jumps are then discretized in a unified way. An auxiliary variable $\mathbf{p}=\alpha\nabla\cdot\mathbf{u}$ is introduced to construct a first-order mixed collocation formulation, and the residual of the auxiliary relation is weighted by $\sqrt{\alpha}$ according to the energy scale. Two-dimensional results show that, at $\rho=10^{6}$, the median relative L^2 error of the basic mixed formulation is 7.30×10^{-6}, about 1/61 of that of the augmented single-network second-order formulation, whereas the two-network second-order formulation still reaches 1.89×10^{-6}. Flux enhancement substantially reduces the original interface flux residual but increases the field error. These results indicate that the effect of the equation reformulation depends on the piecewise representation, the residual weight and the random feature scale, and cannot be generalized into a uniform advantage for all high-contrast problems.

Keywords

$H(\mathrm{div})$-Type Interface Problem, Random Feature, Extreme Learning Machine, Categorical-Variable Augmentation, High Coefficient Contrast

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

椭圆界面问题用于描述复合材料、传热、渗流和电磁介质中的分区场。界面两侧的材料系数可能相差多个数量级，解的法向分量或加权散度也可能具有给定跳跃，因此数值方法需要同时处理分片表示、界面迹和系数尺度。对于 $H(\mathrm{div})$ 型模型，未知量是向量场，梯度–散度算子将多个分量耦合在一起；当界面法向跳跃不为零时，解自然属于分片 $H(\mathrm{div})$ 空间，而非整个区域上的单一光滑函数。有限元方法已经形成了较完整的 $H(\mathrm{div})$ 离散框架，但贴体网格和界面处理会增加几何实现成本，非贴体方法则需要额外的重构、惩罚或弱式设计[1]-[4]。

随机特征方法固定隐藏层参数，仅对输出系数进行线性求解，适合线性偏微分方程的强形式配点[5]-[8]。局部极限学习机、深度网络和分区网络已经用于界面问题，但不同子区域的函数分支通常通过独立网络或界面损失连接[9] [10]。分类变量增广提供了另一种表示方式：把区域类别作为输入，同一组随机特征在不同类别取值下产生不同的单边迹[11] [12]。已有工作主要围绕标量界面问题或一般随机特征框架展开，针对向量值 $H(\mathrm{div})$ 型梯度–散度问题，还需要说明共享输出系数如何参与两类界面条件，以及高对比度下方程形式和表示方式各自带来的影响。

本文研究具有分片常系数和非齐次界面跳跃的 $H(\mathrm{div})$ 型椭圆界面问题，重点回答两个问题：分类变量能否在共享输出系数下形成可用的分片向量场表示；引入辅助变量的一阶混合改写能否缓解高对比度下二阶随机特征配点的误差增长。本文的工作包括：构造分类变量增广的向量值单网络离散；依据加权能量尺度设置辅助关系残差权重，并直接比较辅助变量跳跃与原始加权散度跳跃；通过二维、三维制造解以及多随机种子实验区分表示能力、方程形式和随机参数范围的作用。

2. 问题模型与方法

2.1. 分片 $H(\mathrm{div})$ 型界面模型

设 $\Omega\subset R^{d}$ ($d=2$ 或 3)为有界区域，光滑闭界面 Γ 将其分为内部区域 Ω^{-} 和外部区域 Ω^{+}。界面法向

n_Γ 由 Ω^- 指向 Ω^+，跳跃统一定义为负侧减正侧。设 $\alpha^\pm$、$\beta^\pm$ 为正常数，在两个子区域内求解

$$-\nabla\left(\alpha^\varepsilon\nabla\cdot u^\varepsilon\right)+\beta^\varepsilon u^\varepsilon=f^\varepsilon,\quad x\in\Omega^\varepsilon,\quad \varepsilon\in\{-,+\}。\tag{1}$$

外边界条件和界面条件分别取为

$$u\cdot n=g\left(x\in\partial\Omega\right),\quad \left[\!\left[\alpha\nabla\cdot u\right]\!\right]_\Gamma=\psi,\quad \left[\!\left[u\cdot n\right]\!\right]_\Gamma=\chi。\tag{2}$$

本文实验固定 $\beta^-=\beta^+=1$，以 $\rho=\max\left(\alpha^-,\alpha^+\right)/\min\left(\alpha^-,\alpha^+\right)$ 表示系数 α 的对比度。加权能量范数为

$$\|v\|_\alpha^2=\Sigma_\varepsilon\left[\alpha^\varepsilon\|\nabla\cdot v\|_{0,\Omega\varepsilon}^2+\beta^\varepsilon\|v\|_{0,\Omega\varepsilon}^2\right]。\tag{3}$$

该范数中的散度项带有 α，因此它既是误差指标的尺度依据，也是后文辅助关系残差加权的依据。数值方法采用强形式配点，不将离散系统解释为弱形式的有限元投影。

在分片空间中，法向迹可以在界面两侧分别评价。对于光滑制造解，区域方程、边界数据和界面数据均由同一精确解解析生成；对于非齐次跳跃，跳跃符号始终采用负侧减正侧并沿同一界面法向评价。这样的约定使区域方程与界面条件在离散时具有确定的符号，也避免把法向量方向的变化误认为材料对比度造成的误差。本文所有误差均在界面两侧分别使用相应的分类变量进行评价。

2.2. 分类变量增广的分片表示

令分类变量 γ 在 Ω^- 和 Ω^+ 中分别取−1 和 1。对第 j 个隐藏节点，定义增广随机特征

$$\varphi_j^{aug}\left(x,\gamma\right)=\tanh\left(\left(\omega_j^x\right)\cdot x+\omega_j^\gamma\gamma+b_j\right)。\tag{4}$$

向量值近似采用共享输出系数

$$U_N\left(x,\gamma\right)=\Sigma_j\theta_j\varphi_j^{aug}\left(x,\gamma\right),\quad u_N\left(x\right)=U_N\left(x,\gamma\left(x\right)\right)。\tag{5}$$

在界面同一点分别取 $\gamma=-1$ 和 $\gamma=1$，即可得到 u_N^- 与 u_N^+ 两个单边评价。由于 γ 在每个子区域内保持常值，物理空间导数只作用于 x。由此，区域方程、外边界法向条件、加权散度跳跃和法向分量跳跃都关于同一个输出系数向量 θ 线性。作为负对照，标准 ELM 令两侧使用相同的物理输入；作为表示对照，双网络在两侧使用独立随机特征和独立输出系数。

若将向量输出系数按分量排列为 $\theta=\left(\theta^{[1]},\cdots,\theta^{[d]}\right)^{\mathrm{T}}$，则每个区域方程分量都包含多个 $\theta^{[s]}$ 的导数矩阵。对 $\eta\in\{-,+\}$，记 D^η、D_r^η 和 D_{rs}^η 分别为特征值、一阶导数和二阶导数在 Ω^η 内部配点上的评价矩阵。二阶区域块可写成 $A_{rs}^\eta=-\alpha^\eta D_{rs}^\eta+\delta_{rs}\beta^\eta D^\eta$；界面通量块由 $\alpha^-D_{\Gamma,r}^--\alpha^+D_{\Gamma,r}^+$ 组成；法向分量跳跃块由界面两侧的函数值差组成。将这些块按行堆叠后得到 $A_{\mathrm{sec}}\theta\approx b_{\mathrm{sec}}$。这个写法同时适用于二维和三维，并明确保留了梯度–散度算子中的交叉导数。

2.3. 二阶与一阶混合配点系统

在二阶形式中，区域矩阵含有 $\alpha^\eta D_{rs}^\eta$，界面通量矩阵含有 $\alpha^-D_{\Gamma,s}^--\alpha^+D_{\Gamma,s}^+$。高对比度时，同一组共享输出系数需要同时拟合两个尺度不同的区域方程和界面方程。为降低随机特征的最高求导阶数，引入辅助变量

$$p=\alpha\nabla\cdot u。\tag{6}$$

控制方程改写为

$$-\nabla p+\beta u=f,\quad \nabla\cdot u-\alpha^{-1}p=0。\tag{7}$$

此时区域方程只需要随机特征的一阶导数。对辅助关系残差乘以 α^{s}，本文主要取 $s=1/2$，即采用 $\sqrt{\alpha}$ 权重。该选择使辅助关系残差的平方项与能量范数中的 $\alpha\|\nabla\cdot u\|^{2}$ 处于相同的系数尺度，但它不是对比度无关稳定性证明。混合系统在界面直接施加 $[\![p]\!]_{\Gamma}=\psi$；同时从 u_N 后处理得到 $[\![\alpha\nabla\cdot u]\!]_{\Gamma}$ 的残差 $R_{\psi,u}$。两者之间存在离散误差项，因此辅助变量跳跃较小并不自动意味着原始界面通量跳跃较小。

所有形式最终都写成超定线性最小二乘问题 $\min_{\theta}\|A\theta-b\|_{2}^{2}$。二维主实验中二阶形式和基本混合形式均控制 1200 个线性未知量；三维相应控制 3000 个线性未知量。等未知量只表示近似空间自由度相近，并不意味着方程行数或计算成本相同。

矩阵装配时，区域行按分量排列，界面行同时评价 $\gamma=-1$ 和 $\gamma=1$ 的单边迹。法向边界行只使用外侧子区域的特征值；界面法向分量行使用两侧函数值的差；加权散度行使用两侧一阶导数的差并分别乘以 α^{-} 和 α^{+}。这种统一装配方式适用于非零 ψ 和 χ，不需要把界面条件预先改写成齐次条件。对于标准 ELM，若两侧使用相同物理输入，界面两侧的函数值和导数行会退化为相同的评价，这正是负对照中分片表示失败的代数原因。

列缩放只用于改善线性求解时不同特征列的数值尺度，不能消除高对比度方程行之间的物理尺度差异。本文将列缩放与辅助关系的 α^{s} 权重分开处理：前者作用于未知量列，后者作用于残差行。二者均不改变连续制造解，但会改变有限特征空间中最小二乘问题的几何。这个区分对于解释双网络、混合形式和通量增强形式的结果是必要的。

为说明权重如何影响离散系统，记动量方程块为 M、辅助关系块为 A_p。对辅助关系中位于 x_i 的每一行乘以 $\alpha(x_i)^{s}$，其他行的权重保持为 1，记行缩放矩阵为 D_s。这样，等权最小二乘目标 $\|A\theta-b\|_{2}^{2}$ 变为 $\|D_s(A\theta-b)\|_{2}^{2}$，正规方程为 $A^{T}D_s^{2}A\theta=A^{T}D_s^{2}b$。由于 D_s 的对角元均为正，相容系统的解不变；对超定且不相容的系统，权重会改变动量方程块与辅助关系块在残差中的相对贡献。为比较两块的尺度，可用 $\chi_s=\|D_{\alpha,s}A_p\|_{F}^{2}/\|M\|_{F}^{2}$ 作参照，其中 $D_{\alpha,s}$ 仅包含辅助关系行的局部权重，$\|\cdot\|_{F}$ 为 Frobenius 范数。能量范数(3)中散度项按 α 加权，而辅助关系行的平方权重按 α^{2s} 缩放，因此 $s=1/2$ 与能量尺度相匹配。与能量范数中的 α 权重相比，高低系数区域间的辅助关系相对权重在 $s=0$ 时缩小为 $1/\rho$，在 $s=1$ 时放大为 ρ。这一分析用于解释残差权重的尺度作用，数值效果由 3.3 节的权重消融实验检验。

混合形式的矩阵由三个部分组成：$-\nabla p+\beta u=f$ 的区域块、$\nabla\cdot u-\alpha^{-1}p=0$ 的辅助关系块，以及边界和界面约束块。若 u_N 和 p_N 共用同一组随机特征，则混合系统的列数为 $(d+1)N$；在本文的等未知量实验中，通过降低混合形式的特征数，使总输出系数数目与二阶形式相同。辅助关系残差乘以 α^{s} 后，$s=0$ 表示不加系数权重，$s=1/2$ 表示能量尺度权重，$s=1$ 表示线性系数权重。不同 s 改变的是离散最小二乘目标，不改变连续问题的精确解。

为便于复现，表 1 按行块列出最终系统 $A\theta\approx b$ 的结构。每个行块对应一类方程和一组评价点，θ 按 $(d+1)N$ 个输出系数排列。二阶形式不含第 3 行块，界面行取第 6 行块；混合形式含第 3 行块，界面行取第 7 行块。区域行按分量展开，界面行在同一界面点上同时取 $\gamma=-1$ 与 $\gamma=+1$ 的单边迹。

Table 1. Row-block structure of the least-squares system $A\theta\approx b$ in the two-dimensional mixed formulation
表 1. 最小二乘系统 $A\theta\approx b$ 的行块结构(二维混合形式)

行块	方程或条件	评价位置(单边迹)	行数
1	动量方程 $-\nabla p+\beta u=f$	Ω^{-} 内部配点($\gamma=-1$)	$2n^{-}$
2	动量方程 $-\nabla p+\beta u=f$	Ω^{+} 内部配点($\gamma=+1$)	$2n^{+}$

续表

3	辅助关系 $\nabla\cdot u-\alpha^{-1}p=0$ (仅混合形式)	$\Omega^-\cup\Omega^+$ 内部配点	n^-+n^+
4	法向边界条件 $u\cdot n=g$	外边界 $\partial\Omega$ ($\gamma=+1$)	n_0
5	法向分量跳跃 $[\![u\cdot n]\!]=\chi$	界面 Γ ($\gamma=-1,+1$)	n_Γ
6	加权散度跳跃 $[\![\alpha\nabla\cdot u]\!]=\psi$ (二阶形式)	界面 Γ ($\gamma=-1,+1$)	n_Γ
7	辅助变量跳跃 $[\![p]\!]=\psi$ (混合形式)	界面 Γ ($\gamma=-1,+1$)	n_Γ

注：第 6、7 行块互斥，分别对应二阶形式与混合形式；二阶形式中第 1、2 行的动量方程替换为 $-\alpha\nabla(\nabla\cdot u)+\beta u=f$。二维主实验取 $n^-=n^+=960$、$n_0=n_\Gamma=240$（$M=2400$ 按 4:4:1:1 分配）；混合形式中 θ 的维数为 $(d+1)N=1200$，二阶形式中 θ 的维数为 $dN=1200$；b 由各行块对应的源项、边界数据和界面数据拼接而成。

3. 数值实验

3.1. 实验设置与评价指标

二维算例取 $\Omega=[-1,1]^2$，内部界面为光滑闭曲线；三维算例取球形界面。制造解由解析表达式给出，源项、边界数据和界面数据由控制方程逐项生成。二维精确解的场幅值不随 ρ 改变，因此跨对比度比较不会因精确解自身缩小而掩盖误差；三维采用同样的固定场幅度设计，但源项和界面数据仍随 ρ 改变。配点由两个子区域内部点、外边界点和界面点组成。二维主实验取 $M=2400$、二阶 $N=600$、混合 $N=400$；三维取 $M=3600$、二阶 $N=1000$、混合 $N=750$。随机特征使用 tanh，参数独立服从 $U[-R_m,R_m]$。二维尺度从候选值 0.5、1 和 2 中选取，以固定测试点集上 5 个随机种子的 E_2 中位数为准；主实验取 $R_m=1$，敏感性结果见 3.4 节。三维主实验取 $R_m=0.5$，参数迁移结果见 3.5 节。主实验采用 10 个随机种子，敏感性实验采用 5 个随机种子，测试点集固定。二维与三维算例的界面几何及代表性配点分布如图 1 所示。

区域误差采用相对 L^2 误差 E_2，能量误差采用上式定义的系数加权相对能量误差 E_a。界面指标包括法向跳跃残差 R_χ、由 u_N 后处理得到的原始加权散度跳跃残差 $R_{\psi,u}$，以及混合形式直接施加的辅助变量跳跃残差 $R_{\psi,p}$。报告值为多次随机实现的中位数，必要时同时给出四分位区间。

为了使不同形式的比较具有可重复性，随机权重和偏置在一次计算中生成后保持不变，输出系数由同一线性最小二乘求解器确定。内部配点分别从 Ω^- 和 Ω^+ 抽取，边界点和界面点单独生成；测试点不参与矩阵组装和系数求解。二维和三维主实验分别采用 10 个随机种子，参数扫描采用 5 个种子。所有主表报告固定测试点集上的中位数，四分位区间只用于说明随机实现的离散程度，不用于构造理论置信区间。

误差指标具有不同的物理含义。E_2 直接衡量向量场值，E_a 额外放大散度误差并随 α 改变；R_χ 衡量法向分量跳跃，$R_{\psi,u}$ 衡量由向量场恢复的物理加权散度跳跃，$R_{\psi,p}$ 则只衡量辅助变量跳跃。因此，在高对比度算例中不能用单一指标替代其他指标。特别是当能量范数的分母由大系数区域主导时，E_a 较小并不必然意味着全局向量场值误差也小。

3.2. 分类变量的必要性与单双网络比较

首先在 $\rho=1$ 下关闭分类变量，构造标准 ELM 负对照。表 2 给出 10 次计算的中位数。二维中，标准 ELM 的 E_2 为 4.32×10^{-1}，而增广二阶单网络为 4.73×10^{-7}；三维中，标准 ELM 的 E_2 为 3.36，而增广二阶单网络为 4.68×10^{-5}。三维跳跃数据为零时，标准 ELM 的界面残差可以接近零，但内部场误差仍很大，说明界面残差不能替代分片内部表示。图 2 从第二分量的精确解、数值解、点值误差与穿越界面的截线四个层面检查了分类变量增广后的分片表示。

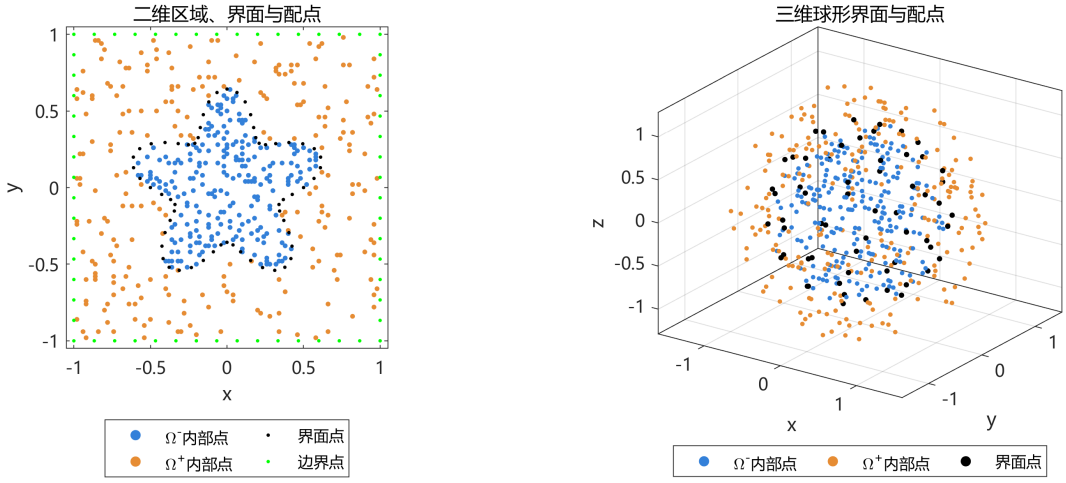


Figure 1. Interface geometries and representative collocation points in two and three dimensions
图 1. 二维与三维算例的界面几何及代表性配点分布

Table 2. Median comparison between standard ELM and the augmented second-order single network at $\rho=1$ (10 runs)
表 2. $\rho=1$ 时标准 ELM 与分类变量增广二阶单网络的中位数比较(10 次计算)

维数	方法	E_2	E_a	$R_{\psi,u}$
二维	标准 ELM	4.32×10^{-1}	2.55×10^{-1}	1.02
二维	增广二阶单网络	4.73×10^{-7}	2.69×10^{-7}	7.41×10^{-8}
三维	标准 ELM	3.36	5.49×10^{-1}	1.82×10^{-14}
三维	增广二阶单网络	4.68×10^{-5}	7.70×10^{-6}	1.96×10^{-4}

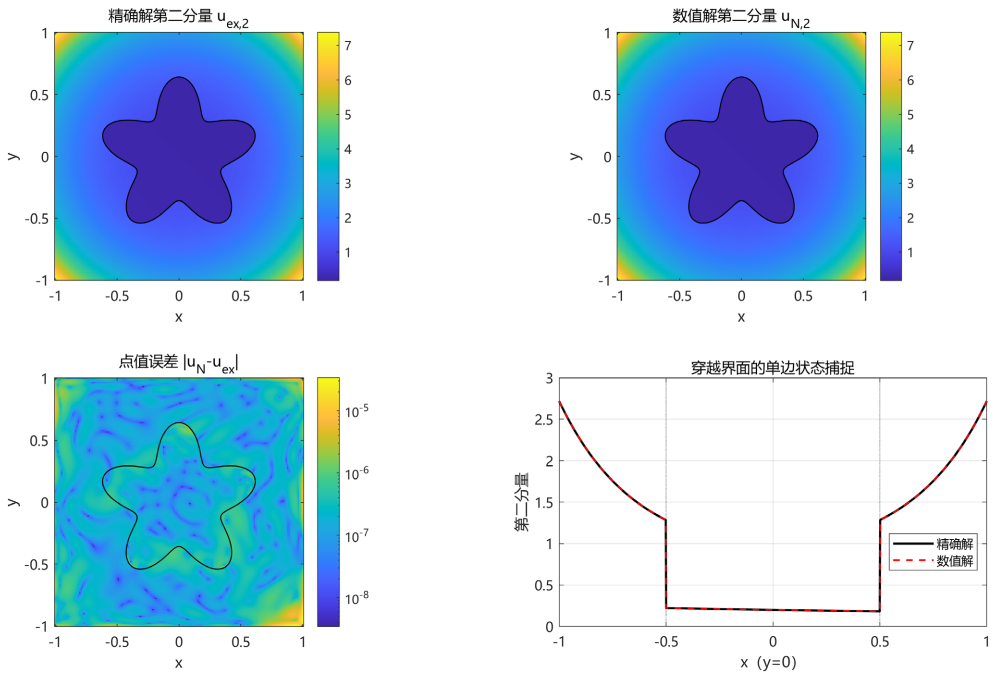


Figure 2. Exact solution, numerical solution, pointwise error, and interface-crossing line of the second component at $\rho=1$
图 2. $\rho=1$ 时二维第二分量的精确解、数值解、点值误差与界面截线

在相同线性未知量数下，二维双网络每侧取 300 个特征，增广单网络取 600 个特征，二者均有 1200 个未知量。三维对应为每侧 500 个和单网络 1000 个，均有 3000 个未知量。二维跨对比度结果见表 3。$\rho=1$ 时增广单网络误差更小；$\rho=10^2$ 时二者接近；$\rho=10^4$ 和 10^6 时双网络二阶形式保持在 10^{-6} 量级，而增广单网络二阶形式分别增至 2.96×10^{-5} 和 4.46×10^{-4}。共享输出系数带来更紧凑的分片表示，但高对比度下独立输出系数提供了更强的分侧调节能力。

这个比较不能简单理解为网络数量越少越好或越多越好。两种表示的线性未知量数相同，但共享输出系数把两侧的区域方程耦合在同一列空间中；双网络则把区域内部的系数列分开，只通过边界和界面方程发生联系。低对比度时，这种共享可以减少重复自由度并提高有限特征预算的利用率；高对比度时，两侧区域块的 α 量级差异使共享系数承受更强的兼容约束，独立系数因而更容易保持两侧精度。

Table 3. Median relative L^2 errors of the two-network and augmented single-network representations with equal unknowns (10 runs)
表 3. 二维算例中等未知量单双网络的相对 L^2 误差中位数(10 次计算)

ρ	双网络二阶	增广单网络二阶
1	1.97×10^{-6}	4.73×10^{-7}
10^2	1.74×10^{-6}	1.74×10^{-6}
10^4	1.93×10^{-6}	2.96×10^{-5}
10^6	1.89×10^{-6}	4.46×10^{-4}

3.3. 二维高对比度结果与界面一致性

固定分类变量增广单网络，比较二阶形式与基本混合形式。表 4 显示，$\rho=1$ 时二阶形式略优；随着 ρ 增大，混合形式的误差增长较慢。$\rho=10^6$ 时，二阶形式 E_2 的中位数为 4.46×10^{-4}，基本混合形式为 7.30×10^{-6}，约降低 61 倍。10 次计算的四分位区间分别为$[3.81, 5.34]\times10^{-4}$和$[5.79, 8.52]\times10^{-6}$，两者量级明显分离。图 3 给出两种形式在四个对比度下的中位数及离散程度。

Table 4. Median relative L^2 errors of the second-order and basic mixed formulations in two dimensions (10 runs)
表 4. 二维算例中二阶形式与基本混合形式的相对 L^2 误差中位数(10 次计算)

ρ	二阶形式 E_2	基本混合形式 E_2
1	4.73×10^{-7}	9.44×10^{-7}
10^2	1.74×10^{-6}	8.88×10^{-7}
10^4	2.96×10^{-5}	1.62×10^{-6}
10^6	4.46×10^{-4}	7.30×10^{-6}

为检验界面约束的取舍，在相同特征、配点和 1200 个未知量下增加原始界面通量方程。基本混合形式的 $R_{\psi,u}$ 为 4.42×10^{-2}，通量增强后降至 3.87×10^{-4}，约降低 114 倍；但 E_2 从 7.30×10^{-6} 增至 1.95×10^{-4}，约增大 27 倍。辅助变量跳跃残差仍保持较小，说明直接控制 $[\![p]\!]_\Gamma$ 与控制由 u_N 恢复的 $[\![\alpha\nabla\cdot u_N]\!]_\Gamma$ 是两个不同目标。固定特征空间和等权最小二乘下，增加约束行会重新分配场方程和界面方程之间的残差。

权重消融进一步比较 $s=0$、1/2 和 1。$s=1/2$ 的 $E_2=7.30\times10^{-6}$、$E_a=9.10\times10^{-7}$，均小于 $s=0$ 的 9.49×10^{-6}、9.23×10^{-6} 和 $s=1$ 的 2.85×10^{-4}、3.11×10^{-5}。因此本文将 $\sqrt{\alpha}$ 作为基本混合形式的默认权重，但

不把它解释为对所有问题都适用的最优权重。

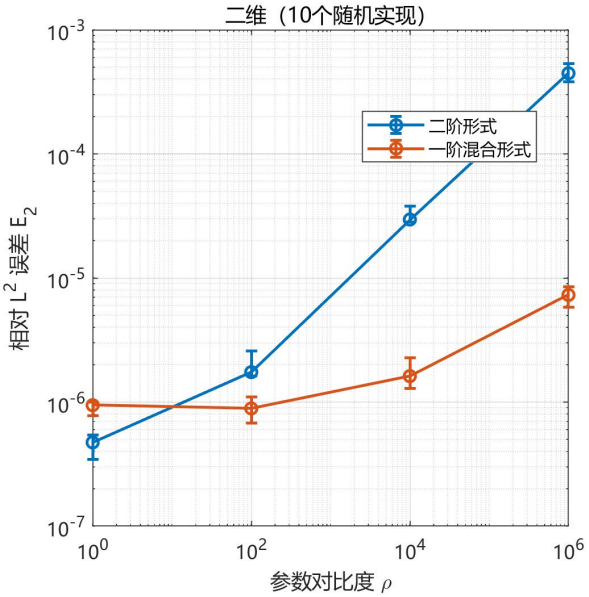


Figure 3. Relative L^2 errors versus coefficient contrast for the two formulations in two dimensions (10 random realizations)

图 3. 二维算例中两种形式的相对 L^2 误差随系数对比度变化(10 次随机实现)

从残差分解看，通量增强的结果具有明确的代价。基本混合形式通过区域辅助关系和辅助变量界面跳跃间接约束原始通量；增加原始通量行后，最小二乘目标对界面通量的重视程度提高，$R_{\psi,u}$ 因而下降。但新增行并没有增加特征空间的表达能力，反而改变了区域方程、法向跳跃和辅助关系之间的误差分配。对当前固定特征空间而言，降低一个界面指标可能以整体场误差和另一界面指标上升为代价。

3.4. 随机特征尺度的选取与敏感性

表 5 给出 $\rho=10^6$ 时基本混合形式在 $R_m\in\{0.5,1,2\}$ 上的结果，其余设置与 3.3 节相同，每组采用 5 个随机种子。基准行由 5 次计算统计，因此与表 4 中 10 次计算的中位数略有差异。误差随 R_m 并非单调变化：R_m 由 0.5 增至 1 时，E_2 由 4.24×10^{-5} 降至 6.65×10^{-6}；继续增至 2 时升至 8.04×10^{-4}，相对基准分别相差约 6.4 倍和 121 倍。界面指标 $R_{\psi,u}$ 呈相同趋势，在 $R_m=1$ 时最小。这说明在当前特征数和配点数下，随机特征尺度存在明显可取的区间，而不是越大或越小越好。

Table 5. Sensitivity of the basic mixed formulation to the random-feature scale R_m at $\rho=10^6$ in two dimensions (5 runs)

表 5. 二维 $\rho=10^6$ 时基本混合形式对随机特征尺度 R_m 的敏感性(5 次计算)

R_m	E_2	E_a	$R_{\psi,u}$
0.5	4.24×10^{-5}	5.84×10^{-6}	2.47×10^{-1}
1.0	6.65×10^{-6}	8.79×10^{-7}	4.86×10^{-2}
2.0	8.04×10^{-4}	3.15×10^{-5}	4.17×10^{-1}

注：$M=2400$、$N=400$，其余设置与 3.3 节相同；表中为 5 个随机种子的中位数。

这一趋势与随机特征的尺度效应有关。R_m 过小时，tanh 特征在计算区域内更接近线性，有限个特征对解的变化刻画不足；R_m 较大时，部分特征更容易进入饱和区，特征间相似性可能上升。特征导数中含有随机权重，同时受 tanh′ 的饱和因子调制，因此整体幅度不会随 R_m 单调增长。混合形式的辅助关系行还乘以 $\sqrt{\alpha}$，所以 R_m、局部系数和饱和程度会共同影响各行块的尺度。当前二维设置下，$R_m=1$ 在候选集内取得最低的 E_2 中位数；三维结果也显示，合适尺度会随方程形式和维数变化，不宜跨形式直接沿用。

3.5. 三维适用范围与随机参数迁移

三维固定尺度算例中，所有形式首先共同取 $R_m=0.5$。$\rho=10^6$ 时，二阶形式 $E_2=4.24\times10^{-2}$，基本混合形式 $E_2=8.54\times10^{-1}$，通量增强形式 $E_2=5.34\times10^{-1}$；因此在该共同参数下混合形式未优于二阶形式。为区分方程改写和随机特征尺度的影响，在同一候选集 $R_m\in\{0.15,0.20,0.25,0.30,0.50\}$ 上采用 5 个种子比较两种形式。二阶形式在 $R_m=0.50$ 时取得候选集内最小中位数 4.05×10^{-2}，基本混合形式在 $R_m=0.20$ 时取得 6.63×10^{-3}；在 $R_m=0.50$ 时混合形式升至 8.37×10^{-1}。逐行比较可见，相对排序随 R_m 改变。

二维敏感性分析和三维参数扫描均以固定测试点集上的中位数比较候选尺度，最优值属于当前候选集内的探索性结果。

从应用角度看，三维结果提示，方程形式变化时应重新考察随机特征尺度。若需比较不同形式的泛化表现，可为每种形式预设相同的选参预算，在独立验证点上选择尺度，再用未参与选参的种子和测试点评估误差。

4. 讨论

实验结果表明，本文方法包含两层相互独立的机制。第一层是表示机制：分类变量使同一网络在界面两侧拥有不同单边迹，解决标准 ELM 无法表达分片内部场的问题。它不等同于给两侧分配独立的输出系数。第二层是方程机制：辅助变量把二阶梯度–散度算子改写为一阶系统，并通过 $\sqrt{\alpha}$ 权重改变离散残差的尺度。二维高对比度下，第二层显著改善了共享系数单网络的场误差；但在同一未知量预算下，双网络二阶形式仍然更准，说明方程改写不能替代独立分侧自由度。

界面一致性也需要区分。混合形式直接控制的是辅助变量跳跃，而由向量场后处理得到的原始加权散度跳跃还包含辅助关系离散误差，并可能受到 α 放大。通量增强降低了 $R_{\psi,u}$，却损害了 E_2，说明场精度、物理界面通量和能量误差不是同一个优化目标。三维实验还显示，随机特征尺度与方程形式耦合；若直接沿用另一形式的 R_m，可能把参数失配误判成方程改写失效。

本文的比较主要控制线性未知量数，未控制等行数、等装配时间或等内存。制造解、采样规则、激活函数和特征尺度也限制了结论范围。后续若要建立更强的结论，需要使用独立验证点和预先规定的选参协议，同时报告分侧误差、装配求解成本，并研究分离特征空间或界面处辅助关系约束。

此外，本文采用两个子区域和单一光滑闭界面，材料系数在每个子区域内为常数。对于非凸界面、多子区域或子区域内变系数，分类变量的取值设计、配点比例和界面单边迹的稳定评价都需要重新考察。当前结果也没有给出随机特征空间的逼近定理、配点稳定性估计或显式的对比度误差界，因此应将其理解为在给定制造解和参数范围内的数值机制研究。

5. 结论

本文针对高对比度 $H(\mathrm{div})$ 型椭圆界面问题，构造了分类变量增广的共享系数随机特征配点方法，并引入辅助变量建立一阶混合形式。主要结论如下。

(1) 分类变量 $\gamma=\pm1$ 使同一组随机特征和输出系数能够形成两个可区分的单边迹，并统一离散区域

方程、外边界法向条件及两类界面跳跃。$\rho=1$ 的标准 ELM 负对照表明，关闭分类变量后二维误差为 4.32 × 10^{-1}，三维误差为 3.36，分片表示是必要的。

(2) 等未知量比较显示，低对比度下共享系数单网络具有较好的未知量效率；二维 $\rho=10^6$ 时，双网络二阶形式的 E_2 中位数为 1.89 × 10^{-6}，而增广单网络二阶形式为 4.46 × 10^{-4}。对增广单网络本身，一阶混合形式将 E_2 降至 7.30 × 10^{-6}，约为二阶形式的 1/61。

(3) 通量增强使原始加权散度跳跃残差降低约 114 倍，但场误差增大约 27 倍；三维候选集扫描显示两种形式偏好的随机参数尺度不同，二维敏感性实验也显示 E_2 在 $R_m \in \{0.5,1,2\}$ 上相差约 120 倍。因此，本文支持的是一种有条件的高对比度改进和清晰的指标取舍，不是对任意问题、任意参数和任意表示方式的统一最优性结论。

致　谢

感谢在本文研究过程中给予指导和帮助的老师和同学。

参考文献

[1] Hiptmair, R., Li, J. and Zou, J. (2010) Convergence Analysis of Finite Element Methods for H(*div;Ω*)-Elliptic Interface Problems. *Journal of Numerical Mathematics*, **18**, 187-218. https://doi.org/10.1515/jnum.2010.010

[2] Boffi, D., Brezzi, F. and Fortin, M. (2013) Mixed Finite Element Methods and Applications. Springer.

[3] Liu, H., Zhang, L., Zhang, X., *et al*. (2020) Interface-Penalty Finite Element Methods for Interface Problems in H1, H(curl), and H(div). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **367**, Article 113137. https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113137

[4] Li, R., Liu, Q. and Yang, F. (2023) A Reconstructed Discontinuous Approximation on Unfitted Meshes to H(curl) and H(div) Interface Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **403**, Article 115723. https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115723

[5] Huang, G.B., Zhu, Q.Y. and Siew, C.K. (2006) Extreme Learning Machine: Theory and Applications. *Neurocomputing*, **70**, 489-501. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2005.12.126

[6] Chen, J., Chi, X., E, W. and Yang, Z. (2022) Bridging Traditional and Machine Learning-Based Algorithms for Solving PDEs: The Random Feature Method. *Journal of Machine Learning*, **1**, 268-298. https://doi.org/10.4208/jml.220726

[7] Dong, S. and Li, Z. (2021) Local Extreme Learning Machines and Domain Decomposition for Solving Linear and Nonlinear Partial Differential Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **387**, Article 114129. https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114129

[8] Dong, S. and Yang, J. (2022) On Computing the Hyperparameter of Extreme Learning Machines: Algorithm and Application to Computational PDEs, and Comparison with Classical and High-Order Finite Elements. *Journal of Computational Physics*, **463**, Article 111290. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111290

[9] Wang, Z. and Zhang, Z. (2020) A Mesh-Free Method for Interface Problems Using the Deep Learning Approach. *Journal of Computational Physics*, **400**, Article 108963. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.108963

[10] He, C., Hu, X. and Mu, L. (2022) A Mesh-Free Method Using Piecewise Deep Neural Network for Elliptic Interface Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **412**, Article 114358. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114358

[11] Hu, W.F., Lin, T.S. and Lai, M.C. (2022) A Discontinuity Capturing Shallow Neural Network for Elliptic Interface Problems. *Journal of Computational Physics*, **469**, Article 111576. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111576

[12] Song, W., Chi, X., Yang, Z., Cheng, W. and Chen, J. (2026) Discontinuity-Capturing Random Feature Method for Interface Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **453**, Article 118841. https://doi.org/10.1016/j.cma.2026.118841