Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 201-212
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511443

Hans汉斯

单位四元数样条曲线的三目标能量优化

张馨月，王　倩*

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2026年10月17日；录用日期：2026年11月12日；发布日期：2026年11月18日

摘　要

为解决单位四元数曲线多能量目标冲突的优化问题，本文提出一种基于理想点法的均衡优化策略。通过求解单目标最优解构建理想点，构造目标与理想点的距离评价函数，再通过极小化距离函数，得到三目标优化的折衷解。实验结果表明，该方法可有效平衡拉伸、弯曲与扭曲能量，相比较于传统的单目标优化方法，可生成几何特性更平滑，综合性能更优的四元数曲线。

关键词

单位四元数样条曲线，三目标优化，曲线能量，理想点法

Three-Objective Energy Optimization of Unit Quaternion Spline Curves

Xinyue Zhang, Qian Wang*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: October 17, 2026; accepted: November 12, 2026; published: November 18, 2026

Abstract

To address the optimization problem of conflicting multiple energy objectives for unit quaternion curves, this paper proposes a balanced optimization strategy based on the ideal point method. The ideal point is constructed by solving the optimal solutions of single-objective subproblems, and a distance evaluation function between the objectives and the ideal point is formulated. By minimizing this distance function, the compromise solution of the three-objective optimization is obtained. Experimental results show that the proposed method can effectively balance the stretching, bending and twisting energies. Compared with conventional single-objective optimization methods, it yields quaternion curves with smoother geometric properties and better overall performance.

*通讯作者。

文章引用: 张馨月, 王倩. 单位四元数样条曲线的三目标能量优化[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 201-212.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511443

Keywords

Unit Quaternion Spline Curves, Three-Objective Optimization, Curve Energy, Ideal Point Method

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

曲线的光顺构造是计算机辅助几何设计领域的核心研究问题。为了获得具有良好几何性质的自由曲线，常见做法是建立能量模型并进行优化以实现曲线形状的自动调整。目前常用的曲线能量包括拉伸能、弯曲能以及曲率变化能[1]。这些能量分别从长度变化、弯曲程度以及曲率连续变化等方面描述曲线的几何特性。

早期研究主要集中于单目标能量优化方法，Zhang 等[2]对带缺陷的插值样条做局部光顺修复，通过极小化受影响的局部片段的弯曲能修改异常点，保证样条整体连续性。Yong 和 Cheng [3]提出了基于极小弯曲能的几何 Hermite 曲线构造方法，通过极小化弯曲能提高曲线光顺性。随后，Jaklič 等[4]进一步对样条曲线做弯曲能极小化，自动求解切向方向，保持曲线无尖点、自环、折叠，生成形状效果良好的曲线。然而，弯曲能主要反映曲率大小，无法描述曲率变化的连续性，因此仅靠优化弯曲能难以获得高阶光顺曲线。针对上述问题，Lu 等[5]采用分块坐标下降迭代算法，通过极小化曲率变化能提高曲线整体平滑性，并推广到不同连续性要求的 Hermite 曲线中。尽管曲率变化能是一类能量，能够有效改善曲线高阶光顺性能，但是不同能量指标之间存在天然的制约关系，单一能量最优往往会造成其余几何特性劣化，因此难以获得综合性能最优的曲线。为了解决单目标优化问题的局限性，Ahn [6]在圆过渡问题中采用加权求和实现拉伸能与弯曲能的协同优化，Li 和 Zhang [7]针对平面三次 Hermite 曲线，同时考虑拉伸能和曲率变化能，建立了双目标优化模型，在此基础上，Li [8]进一步提出组合内能优化方法，将拉伸能、弯曲能和曲率变化能做加权和，使曲线位于三种单目标结果之间。然而，现有的多目标能量优化方法本质上仍属于加权单目标优化，其效果高度依赖权重的选择，因此如何在多个目标相互制约的情况下获得合理的折衷解[9]，仍是曲线能量优化方面需要解决的问题。

随着机器人运动规划、姿态控制等领域的发展，传统欧氏空间曲线已难以满足旋转运动连续表达的需求，相较于旋转矩阵、欧拉角等传统三维旋转表达形式，单位四元数具有简洁高效、数值稳定、运算连续的显著优势，能够有效规避欧拉角存在的万向锁奇异问题，实现三维空间旋转的光滑、无跳变表征[10]。因此，单位四元数样条曲线被广泛应用于空间曲线插值[11]，曲面造型及平滑运动生成[12]等研究场景。Barr 等[13]最早模仿欧氏三次样条极小化弯曲能，以角加速度为单目标展开四元数曲线的光顺研究，针对曲线弯曲平滑度展开极小化求解；Ramamoorthi 等[14]依旧以弯曲能量作为优化指标完善该单目标框架，优化了数值迭代求解效率。然而，仅考虑拉伸能和弯曲能不足以全面反映单位四元数曲线在高阶变化方面的平滑性。因此，可以通过引入扭曲能[15]来抑制曲线的扭曲，一般来说，扭曲能越大，对应曲线的高阶变化越剧烈，通过对扭曲能进行优化，能够有效改善姿态曲线的过渡平滑性。王倩等[16]针对单位四元数样条曲线，分别对拉伸能、弯曲能、扭曲能进行单目标优化，得到运动姿态更加自然流畅的刚体旋转运动。现有针对四元数曲线优化的研究虽然引入了多种能量评价指标，但针对三个目标之间的均衡优化研究较少。

针对上述问题，本文以王倩等[17]构造的单位四元数样条曲线为研究对象进行三目标能量优化。将单位四元数样条曲线优化转化为欧氏多项式曲线的单参数优化，统一建立拉伸、弯曲、扭曲三类能量的二次模型。基于理想点法[18]构建无偏好的三目标折衷框架，构造理想点向量与欧氏距离评价函数，推导最优参数满足的隐式方程及全局最优判定条件。数值算例证实，该方法可均衡三类冲突能量，改善曲线整体光顺性，为单位四元数样条的多目标光顺优化提供了一种求解方案。

2. 预备知识

2.1. 四元数的运算和性质

首先简单回顾一下四元数的定义和运算，类似复数的定义，$\mathbf{q}=w+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ 为一个四元数，其中，$w,x,y,z\in\mathbb{R}$，i，j，k 是 3 个虚数单位，满足 $\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1$，$\mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k}$，$\mathrm{jk}=-\mathrm{kj}=\mathrm{i}$，$\mathrm{ki}=-\mathrm{ik}=\mathrm{j}$。四元数也可以表示为向量形式 (w,x,y,z) 或一组有序对 $(s,\mathbf{v})$，其中 $s=w$ 是标量，$\mathbf{v}=(x,y,z)$ 是三维向量。

给定两个四元数 $\mathbf{q}_0=w_0+x_0\mathrm{i}+y_0\mathrm{j}+z_0\mathrm{k}$ 和 $\mathbf{q}_1=w_1+x_1\mathrm{i}+y_1\mathrm{j}+z_1\mathrm{k}$。四元数的加减法定义为

$$\mathbf{q}_0\pm\mathbf{q}_1=(w_0\pm w_1)+(x_0\pm x_1)\mathrm{i}+(y_0\pm y_1)\mathrm{j}+(z_0\pm z_1)\mathrm{k}.$$

四元数的乘法定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1=&(w_0w_1-x_0x_1-y_0y_1-z_0z_1)+(w_0x_1+x_0w_1+y_0z_1-y_1z_0)\mathrm{i}\\&+(w_0y_1+y_0w_1+z_0x_1-x_0z_1)\mathrm{j}+(w_0z_1+z_0w_1+x_0y_1-y_0x_1)\mathrm{k}.\end{aligned}$$

注意，四元数的乘法不满足交换律。

四元数 $\mathbf{q}=w+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ 的共轭定义为

$$\bar{\mathbf{q}}=w-x\mathrm{i}-y\mathrm{j}-z\mathrm{k}.$$

四元数 $\mathbf{q}$ 的范数为

$$\|\mathbf{q}\|=\sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}=\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}.$$

若 $\|\mathbf{q}\|=1$，则称 $\mathbf{q}$ 是单位四元数；单位四元数全体构成了 $\mathbb{S}^3$。

四元数 $\mathbf{q}$ 的逆为

$$\mathbf{q}^{-1}=\frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}.$$

若 $\mathbf{q}=w+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ 是一个单位四元数，则 $\mathbf{q}$ 可以表示为 $\mathbf{q}=\cos\theta+\mathbf{n}\sin\theta$，其中，$\theta=\arccos w\in[0,\pi]$，$\mathbf{n}=\dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$。

单位四元数可记作指数形式 $\mathbf{q}=\exp(\theta\mathbf{n})$，其中，$\mathbf{n}$ 是一个三维单位向量，即 $\mathbf{n}\in\mathbb{S}^2$，$\theta\in[0,\pi]$。单位四元数 $\mathbf{q}=\cos\theta+\mathbf{n}\sin\theta$ 的自然对数为[19]

$$\log(q)=\theta\mathbf{n}.$$

2.2. 参数曲线的能量

参数曲线的总能量分为内能和外能两类。内能由曲线自身的几何特征决定，如切向量、曲率、挠率等；外能是人为添加的能量函数，由外部约束条件确定，依赖于曲线外部的性质[20]。本文主要基于内能约束优化曲线。

空间参数曲线 $\mathbf{b}(t)$ 的三种经典内能分别为拉伸能、弯曲能和扭曲能[15]。拉伸能对应曲线的弧长，可

表示为[15]

$$E_{\text{stretch}}(\mathbf{b})=\int_a^b\left\|\mathbf{b}'(t)\right\|\mathrm{d}t. \tag{1}$$

弯曲能对应曲线的弯曲程度，可表示为[15]

$$E_{\text{bend}}=\int_a^b\kappa^2(t)\left\|\mathbf{b}'(t)\right\|\mathrm{d}t. \tag{2}$$

扭曲能对应曲线的曲率变化程度，可表示为[15]

$$E_{\text{twist}}=\int_a^b\tau^2(t)\left\|\mathbf{b}'(t)\right\|\mathrm{d}t. \tag{3}$$

其中，$\kappa(t)$，$\tau(t)$ 分别表示曲线的曲率和挠率，满足

$$\kappa(t)=\frac{\left\|\mathbf{b}'(t)\times\mathbf{b}''(t)\right\|}{\left\|\mathbf{b}'(t)\right\|^3},$$

$$\tau(t)=\frac{\left(\mathbf{b}'(t),\mathbf{b}''(t),\mathbf{b}'''(t)\right)}{\left\|\mathbf{b}'(t)\times\mathbf{b}''(t)\right\|^2}.$$

在实际应用中，上述三种形式的曲线能量形式过于复杂，计算成本较高。为简化后续计算，降低求解复杂度，式(1)~(3)可用各阶导数模长平方的积分近似表示为[15]

$$\hat{E}_1=\int_a^b\left\|\mathbf{b}'(t)\right\|^2\mathrm{d}t, \tag{4}$$

$$\hat{E}_2=\int_a^b\left\|\mathbf{b}''(t)\right\|^2\mathrm{d}t, \tag{5}$$

$$\hat{E}_3=\int_a^b\left\|\mathbf{b}'''(t)\right\|^2\mathrm{d}t, \tag{6}$$

其中，$\hat{E}_1$ 表示近似拉伸能，$\hat{E}_2$ 表示近似弯曲能，$\hat{E}_3$ 表示近似扭曲能。

2.3. 含参单位四元数样条曲线

本节给出本文研究的含参单位四元数样条曲线的定义与表达式。基于 Kim 等[21]的工作，文献[17]在 $\mathbb{S}^3$ 空间中构造出了如下含参数 λ 的四元数样条曲线。

给定 $n+1$ 个互不相同的单位四元数控制点 $\mathbf{q}_1,q_2,\cdots,\mathbf{q}_{n+1}\in\mathbb{S}^3$，令 $\mathbf{q}_0=\mathbf{q}_1$，$\mathbf{q}_{n+2}=\mathbf{q}_{n+1}$，对于 $i=1,2,\cdots,n$，定义第 i 段单位四元数曲线为

$$\mathbf{Q}_i(t)=q_{i-1}^{\tilde{B}_0(t)}\prod_{j=1}^{3}\left(q_{i+j-2}^{-1}q_{i+j-1}\right)^{\tilde{B}_j(t)},\quad t\in[0,1], \tag{7}$$

其中，

$$\begin{cases}\tilde{B}_0(t)=1,\\ \tilde{B}_1(t)=-\lambda t^4+3\lambda t^3-3\lambda t^2+\lambda t+1,\\ \tilde{B}_2(t)=2(1-2\lambda)t^4+(8\lambda-5)t^3+3(1-\lambda)t^2+(1-\lambda)t,\\ \tilde{B}_3(t)=(1-\lambda)t^4-(1-\lambda)t^3.\end{cases}$$

将各曲线段按照参数范围依次拼接，得到四元数样条曲线

$$\mathbf{Q}(t)=\mathbf{Q}_i(t-i+1),\quad t\in[i-1,i], \tag{8}$$

其中，$i=1,2,\cdots,n$。

根据文献[17]可知，该曲线能够精确地插值任意给定的四元数序列，并且相邻两段单位四元数曲线在连接点处是 G^2 连续的，可以通过改变参数 λ 的大小来调整整体形状，文献[17]给出了对 λ 选取的定性分析，并说明一般在 $[0,1]$ 中选取参数值 λ 的原因。文献[16]给出了对单一目标进行能量优化的参数选取方法，本文在此基础上，对单位四元数曲线和四元数样条曲线的三目标能量进行协同优化，并给出三目标能量极小化下参数 λ 的选取方法。

3. 三目标能量优化方法

3.1. 问题转化

通过调整参数可以改变四元数曲线的形状，构造更加光顺的四元数曲线。四元数样条曲线的能量函数定义为

$$E_k(\mathbf{Q};\lambda)=\sum_{i=1}^{n}E_{i,k}(\mathbf{Q}_i;\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\int_{i-1}^{i}\left\|\mathbf{Q}_i^{(k)}(t-i+1)\right\|^2\mathrm{d}t,\quad t\in[0,n],\quad k=1,2,3,$$

其中，$k=1,2,3$ 分别对应四元数曲线的近似拉伸能量、近似弯曲能量和近似扭曲能量。

为实现四元数样条曲线的多指标协同优化，本文将近似的拉伸能、弯曲能与扭曲能作为三个优化目标，构建三目标能量优化问题。然而，直接对四元数样条曲线进行优化时，其能量表达式包含四元数对数、指数运算，计算烦琐复杂且数值稳定性差。完整样条曲线的能量由各分段能量叠加得到，进一步增加了直接求解的难度。

为此，本文引入 Kim 等[21]提出的空间映射方法，对于 $i=1,2,\cdots,n$，将式(7)定义的单位四元数曲线 $\mathbf{Q}_i(t)$ 变换为欧氏空间中的四次多项式曲线

$$\mathbf{P}_i(t)=\sum_{j=0}^{3}B_j(t)\mathbf{p}_{i+j-1}.$$

其中，$B_j(t)=\tilde{B}_j(t)-\tilde{B}_{j+1}(t)$，$\tilde{B}_4(t)=0$；$\{\mathbf{p}_{i+j-1}\}_{j=0}^{3}\in\mathbb{R}^3$ 是多项式曲线 $\mathbf{P}_i(t)$ 互不相同的控制顶点。由文献[21]可知，单位四元数曲线 $\mathbf{Q}_i(t)$ 和多项式曲线 $\mathbf{P}_i(t)$ 共享大量微分性质及相同阶数的几何连续性。

故由式(8)定义的四元数样条曲线 $\mathbf{Q}(t)$ 可通过上述方法映射为欧氏空间中的四次多项式样条曲线

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}_i(t-i+1),\quad t\in[i-1,i],\quad i=1,2,\cdots,n。\tag{9}$$

基于此，对四元数曲线的能量优化问题研究可转化为对多项式曲线的能量优化问题研究。

3.2. 单位四元数曲线的参数选取

下面先考虑曲线 $\mathbf{P}_i(t)$ 的能量优化问题。先将其拆分为固定多项式与含参多项式之和

$$\mathbf{P}_i(t)=f_i(t)+\lambda g_i(t)。\tag{10}$$

其中，

$$f_i(t)=(-2t^4+5t^3-3t^2-t+1)\mathbf{p}_i+(t^4-4t^3+3t^2+t)\mathbf{p}_{i+1}+(t^4-t^3)\mathbf{p}_{i+2},$$

$$g_i(t)=(t^4-3t^3+3t^2-t)\mathbf{p}_{i-1}+(3t^4-5t^3+2t)\mathbf{p}_i+(-3t^4+7t^3-3t^2-t)\mathbf{p}_{i+1}+(-t^4+t^3)\mathbf{p}_{i+2}.$$

将式(10)中 $\mathbf{P}_i(t)$ 的一、二、三阶导数分别代入能量积分公式(式(4)~式(6))，可分别得到三类能量指标对应的函数形式

$$E_{i,k}(\mathbf{P}_i;\lambda)=\lambda^2\int_0^1\mathbf{g}_i^{(k)}(t)\cdot\mathbf{g}_i^{(k)}(t)\mathrm{d}t+2\lambda\int_0^1\mathbf{f}_i^{(k)}(t)\cdot\mathbf{g}_i^{(k)}(t)\mathrm{d}t+\int_0^1\mathbf{f}_i^{(k)}(t)\cdot\mathbf{f}_i^{(k)}(t)\mathrm{d}t。\tag{11}$$

其中， $k=1,2,3$ 分别对应近似的拉伸能、弯曲能和扭曲能的能量函数，令

$$\begin{cases} a_k = \int_0^1 g_i^{(k)}(t)\cdot g_i^{(k)}(t)\mathrm{d}t, \\ b_k = 2\int_0^1 f_i^{(k)}(t)\cdot g_i^{(k)}(t)\mathrm{d}t, \\ c_k = \int_0^1 f_i^{(k)}(t)\cdot f_i^{(k)}(t)\mathrm{d}t, \end{cases} \tag{12}$$

则有

$$E_{i,k}(\mathbf{P}_i;\lambda) = a_k\lambda^2 + b_k\lambda + c_k\ 。 \tag{13}$$

故三类能量函数均可整理为 λ 的一元二次函数。

基于上述能量函数，多项式曲线 $\mathbf{P}_i(t)$ 的三目标能量优化问题可表示为

$$\min_{\lambda\in[0,1]}\left(E_{i,1}(\mathbf{P}_i;\lambda), E_{i,2}(\mathbf{P}_i;\lambda), E_{i,3}(\mathbf{P}_i;\lambda)\right)^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

其中， $[0,1]$ 为待定参数 λ 的可行域。

对于三目标能量优化问题(14)，其决策变量为形状参数 λ，目标函数为近似的拉伸能、弯曲能和扭曲能的能量函数。由于三个目标函数之间存在相互制约关系，本文采用理想点法[18]进行求解。下面基于文献[18]给出其理想目标向量与距离评价函数的具体定义。首先，需先将式(14)拆解为三个独立的单目标极小化问题

$$E_{i,1}^* = \min_{\lambda\in[0,1]} E_{i,1}(\mathbf{P}_i;\lambda),$$

$$E_{i,2}^* = \min_{\lambda\in[0,1]} E_{i,2}(\mathbf{P}_i;\lambda),$$

$$E_{i,3}^* = \min_{\lambda\in[0,1]} E_{i,3}(\mathbf{P}_i;\lambda),$$

其中， $E_{i,k}(\mathbf{P}_i;\lambda)$ 表示第 i 段曲线对应的第 k 类能量($k=1,2,3$)， $E_{i,k}^*$ 表示该能量在参数区间 $[0,1]$ 上的最小值(理想能量值)， $i=1,2,\cdots,n$ 。则各单目标能量函数的全局最小值构成了理想目标向量

$$\mathbf{Z}_i^* = \left(E_{i,1}^*, E_{1,2}^*, E_{i,3}^*\right).$$

L_p 范数可以用来衡量各能量向量与理想目标向量之间的偏离程度。 $p=1$ 的曼哈顿距离侧重于各目标偏差绝对值之和，对较大的偏差惩罚相对温和，且其在偏差为 0 的位置不可导，难以开展解析驻点分析； $p=\infty$ 的切比雪夫距离则以最大目标偏差为评价依据，更强调不同目标间的最坏偏差控制。相比之下， $p=2$ 的欧氏距离能够综合考虑各目标的偏差，并通过平方项体现较大偏差的影响，且其形式连续、易于求导，便于后续建立折衷解的驻点条件。因此本文采用 $p=2$ 的欧氏距离作为评价指标。对于多项式曲线 $\mathbf{P}_i(t)$，可以构造如下距离评价函数

$$D(\lambda) = \sqrt{\left[E_{i,1}(\mathbf{P}_i;\lambda) - E_{i,1}^*\right]^2 + \left[E_{i,2}(\mathbf{P}_i;\lambda) - E_{i,2}^*\right]^2 + \left[E_{i,3}(\mathbf{P}_i;\lambda) - E_{i,3}^*\right]^2}\ 。 \tag{15}$$

由于在单段曲线的讨论中曲线段编号 i 已固定，为简化记号，距离评价函数 $D(\lambda)$ 省略下标 i 。该函数量化了参数 λ 对应的能量向量与理想目标向量之间的偏差， $D(\lambda)$ 的值越小说明对应的参数 λ 在目标空间中越接近理想点，即该参数对应的单位四元数曲线在拉伸、弯曲和扭曲能之间能够达到近似更优的综合平衡。

引理 1 对于 $i=1,2,\cdots,n$，给定四次多项式曲线 $\mathbf{P}_i(t)$，其距离评价函数的驻点满足

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\left(2a_k\lambda+b_k\right)^3}{2a_k}=0,$$

其中，a_k，b_k，c_k由式(12)给出，$k=1,2,3$。

证明：由于多项式曲线$\mathbf{P}_i(t)$的控制顶点互不相同，故由式(12)可知，$g_i^{(k)}(t)$不恒为0，a_k恒为正，则$E_{i,k}(\mathbf{P}_i;\lambda)$的图像为开口向上的抛物线，对$E_{i,k}(\mathbf{P}_i;\lambda)$关于$\lambda$求导并令导数为零，即可得到单目标极小化问题的最优参数

$$\lambda_k^*=-\frac{b_k}{2a_k}.$$

将λ_k^*代入式(13)得到第k个理想能量值

$$E_{i,k}^*=c_k-\frac{b_k^2}{4a_k},$$

其中，$k=1,2,3$。因此，理想目标向量可表示为

$$\mathbf{Z}^*=\left(c_1-\frac{b_1^2}{4a_1},c_2-\frac{b_2^2}{4a_2},c_3-\frac{b_3^2}{4a_3}\right).$$

将$E_{i,k}^*$代入式(15)，得到距离评价函数

$$D(\lambda)=\sqrt{\sum_{k=1}^{3}\left[E_{i,k}(\mathbf{P}_i;\lambda)-E_{i,k}^*\right]^2}.$$

由于极小化$D(\lambda)$等价于极小化其平方形式$S(\lambda)$，因此三目标曲线能量极小化问题(14)可转化为求解$\min\limits_{\lambda\in[0,1]}S(\lambda)$，其中，

$$S(\lambda)=D^2(\lambda)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\left(2a_k\lambda+b_k\right)^4}{16a_k^2}.$$

对$S(\lambda)$求导得驻点条件

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{4\left(2a_k\lambda+b_k\right)^3\cdot 2a_k}{16a_k^2}=0.$$

通过对上式化简即可得到引理1。

证毕。

进一步地，定义集合

$$R=\left\{\lambda\in(0,1)\,\middle|\,\sum_{k=1}^{3}\frac{\left(2a_k\lambda+b_k\right)^3}{2a_k}=0\right\}.$$

则R表示引理1所给三次隐式方程在$(0,1)$内的全部实根集合。

定理1 对于$i=1,2,\cdots,n$，给定四次多项式曲线$\mathbf{P}_i(t)$，令

$$\Lambda=\{0,1\}\cup R,$$

则其三目标能量极小化问题的折衷解满足

$$\lambda^*=\arg\min_{\lambda\in\Lambda}D(\lambda).$$

证明：由式(15)可得，距离评价函数$D(\lambda)$在闭区间$[0,1]$上连续，根据闭区间上连续函数最值定理，

其必在该区间内取得最小值。

若最小值位于区间内部，即 $0<\lambda<1$，则由引理 1 可知，该点满足

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\left(2a_k\lambda+b_k\right)^3}{2a_k}=0.$$

因此，所有内部极小候选点均属于集合 R。

若最小值位于区间边界，则 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$。

故 $D(\lambda)$ 在 $[0,1]$ 的最小值只能在候选集合 $\Lambda=\{0,1\}\cup R$ 中取得。比较集合 Λ 中各候选参数对应的距离评价函数值，即可确定最终折衷解。

证毕。

实际上，可以依据定理 1 选取单位四元数曲线 $\mathbf{Q}_i(t)$ 的参数 λ，使其达到各目标能量之间的有效折衷。根据多目标优化理论，采用理想点法获得的距离最小解属于 Pareto 有效解集，因此所求参数能够在多个目标之间实现协同优化[18] [22]。

3.3. 四元数样条曲线的参数选取

前文将单位四元数曲线 $\mathbf{Q}_i(t)$ 映射为欧氏空间中的四次多项式曲线 $\mathbf{P}_i(t)$，建立了基于理想点法的三目标能量优化模型，并得到对单段单位四元数曲线的折衷参数 λ 的选取方法。对于实际应用中的复杂曲线，通常需要采用多个曲线段连接形成的样条曲线。因此，本节将上述优化方法推广至分段单位四元数样条曲线。由文献[17]可知，所有曲线段需要在同一参数控制下进行协调优化，即全局统一参数 λ，否则会导致相邻曲线段在连接点处 G^1，G^2 不连续。

对于式(9)定义的多项式样条曲线 $\mathbf{P}(t)$，其全局能量由各曲线段对应能量累加得到，即

$$E_k(\mathbf{P};\lambda)=\sum_{i=1}^{n}E_{i,k}(\mathbf{P}_i;\lambda),\quad k=1,2,3,$$

其中，$E_{i,k}(\mathbf{P}_i;\lambda)$ 为第 i 段曲线的第 k 类能量，定义式由式(13)给出。因此，样条曲线 $\mathbf{P}(t)$ 的全局能量为

$$E_k(\mathbf{P};\lambda)=A_k\lambda^2+B_k\lambda+C_k。\tag{16}$$

其中，$A_k=\sum_{i=1}^{n}a_k$，$B_k=\sum_{i=1}^{n}b_k$，$C_k=\sum_{i=1}^{n}c_k$。

由式(16)可知，分段样条曲线的目标能量函数 $E_k(\mathbf{P};\lambda)$ 仍保持与单段曲线相同的二次函数结构，因此前文建立的三目标曲线能量优化理论可直接推广至分段样条曲线。为此定义集合

$$R_s=\left\{\lambda\in(0,1)\,\middle|\,\sum_{k=1}^{3}\frac{\left(2A_k\lambda+B_k\right)^3}{2A_k}=0\right\}.$$

定理 2 给定四次多项式样条曲线 $\mathbf{P}(t)$，令

$$\Lambda_s=\{0,1\}\cup R_s,$$

则其三目标能量极小化问题的折衷解满足

$$\lambda^*=\arg\min_{\lambda\in\Lambda_s}D(\lambda).$$

4. 实验及结果分析

4.1. 三目标理想点优化方法验证

为了验证本文所提出的基于理想点法的单位四元数曲线的三目标能量优化方法的可行性，下面以第

1 段单位四元数曲线 $\mathbf{Q}_1(t)$ 为例进行数值实验。选取一组单位四元数控制点

$$\mathbf{q}_0=(1,0,0,0),\ \mathbf{q}_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right),\ \mathbf{q}_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\ \mathbf{q}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

将 $\mathbf{q}_0$， $\mathbf{q}_1$， $\mathbf{q}_2$， $\mathbf{q}_3$ 按照 Kim 等[21]的方法转化为欧氏空间中的控制顶点

$$\mathbf{p}_0=(0,0,0),\ \mathbf{p}_1=\left(\frac{\pi}{4},0,0\right),\ \mathbf{p}_2=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}},\frac{\pi}{3\sqrt{3}},-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),\ \mathbf{p}_3=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},0,0\right).$$

将 $\mathbf{p}_0$， $\mathbf{p}_1$， $\mathbf{p}_2$， $\mathbf{p}_3$ 代入式(10)即可得到被优化的多项式曲线

$$\mathbf{P}_1(t)=f_1(t)+\lambda g_1(t).$$

将 $\mathbf{P}_1(t)$ 的一、二、三阶导数分别代入能量积分公式(4)~(6)，则可得到近似的拉伸能函数为

$$E_{1,1}(\mathbf{P}_1;\lambda)=1.7092\lambda^2-1.7222\lambda+1.6606,$$

近似的弯曲能函数为

$$E_{1,2}(\mathbf{P}_1;\lambda)=25.7706\lambda^2-27.5489\lambda+14.9141,$$

近似的扭曲能函数为

$$E_{1,3}(\mathbf{P}_1;\lambda)=652.0308\lambda^2-705.4490\lambda+298.2814.$$

在区间 $[0,1]$ 分别取上述三类能量函数的最小值构成理想目标向量

$$Z_1^*=(1.2268,\ 7.5516,\ 107.4705).$$

则由式(15)距离评价函数为

$$D(\lambda)=\sqrt{\sum_{k=1}^{3}\left(E_{1,k}(\mathbf{P}_1;\lambda)-E_{1,k}^*\right)^2}.$$

最后，通过引理 1 与定理 1 即可确定该三目标能量极小化问题的折衷解为

$$\lambda^*=0.5401.$$

图 1~3 所示为该组数据下曲线 $\mathbf{Q}_1(t)$ 的近似拉伸能量($k=1$)，近似弯曲能量($k=2$)以及近似扭曲能量($k=3$)曲线，三条曲线均为开口向上的抛物线。图中灰色圆点为由迭代得到的单目标最小能量点，因此为曲线的最低点，黑色圆点为通过对相应的多项式曲线 $\mathbf{P}_1(t)$ 进行能量优化得出的最小能量点，红色圆点为本文三目标优化方法得到的折衷解。由于近似的弯曲能和扭曲能量级天然较大，故纵坐标能量值采用以 10 为底的对数。由图 1~3 可以看出红色圆点没有同时落在三个目标的最低点上，说明由本文方法得到的折衷解通常无法同时实现三个目标各自的单目标最优，但 λ^* 通过在同一参数下兼顾 E_1， E_2， E_3，以适当牺牲部分单目标的最优性实现了多目标之间的有效折衷。

4.2. 对比实验

本节，讨论样条曲线的能量优化。随机选取三组不同的四元数样条曲线的控制点，利用定理 2 得到折衷参数值。通过对比不同的能量极小化方法的优化效果，验证本文三目标能量优化方法的有效性。表 1~3 给出了对三组随机数据分别极小化近似的拉伸能、弯曲能以及扭曲能与对三目标进行协同优化的能量计算结果。

由表 1~3 可知，传统单目标能量极小化方法仅能实现单一能量指标的最优。拉伸能极小化($\min E_1$)下，E_1 指标在各算例中均为最低值，但其对应的弯曲能 E_2 和扭曲能 E_3 通常处于较高水平；弯曲能极小化

($\min E_2$)下，E_2指标为最优，但E_1和E_3指标相对偏高；扭曲能极小化($\min E_2$)下，E_3指标最优，而E_1和E_2指标劣化明显。

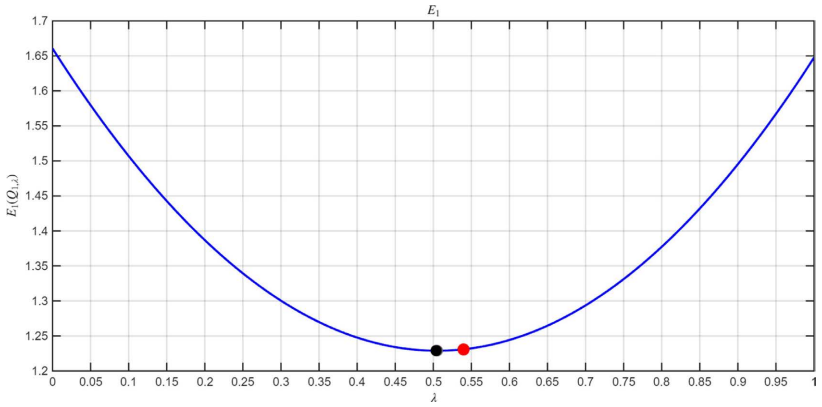


Figure 1. Approximate stretching energy curve of unit quaternion curve $\mathbf{Q}_1(t)$

图 1. 单位四元数曲线$\mathbf{Q}_1(t)$的近似拉伸能能量曲线

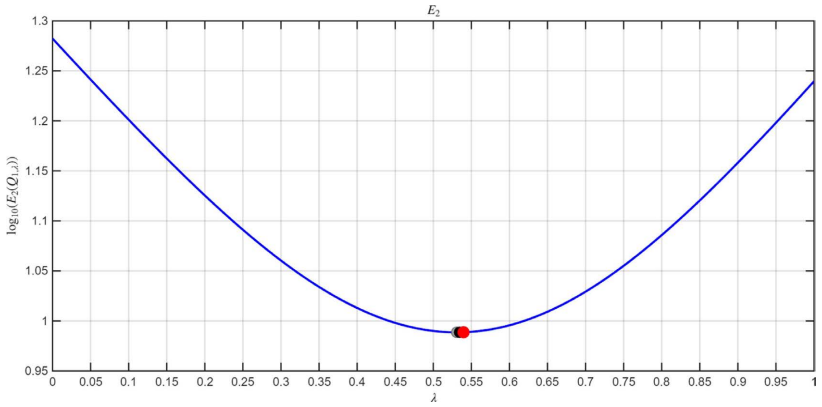


Figure 2. Approximate bending energy curve of unit quaternion curve $\mathbf{Q}_1(t)$

图 2. 单位四元数曲线$\mathbf{Q}_1(t)$的近似弯曲能能量曲线

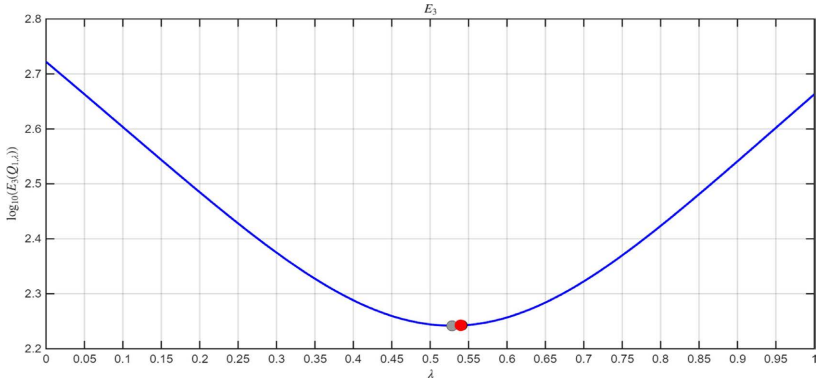


Figure 3. Approximate twisting energy curve of unit quaternion curve $\mathbf{Q}_1(t)$

图 3. 单位四元数曲线$\mathbf{Q}_1(t)$的近似扭曲能能量曲线

相比之下，本文提出的三目标能量优化方法得到的结果，在三类能量指标上均未出现极端劣化的情况。以数据 1 为例，三目标优化下的 E_1 为 0.2786，介于拉伸能极小化时 E_1 的 0.2653 与扭曲能极小化时 E_1 的 0.2788 之间；E_2 为 1.6340，介于弯曲能极小化时 E_2 的 1.5916 与扭曲能极小化时 E_2 的 1.6353 之间；E_3 为 1157.8653，介于扭曲能极小化时 E_3 的 1157.8582 与拉伸能极小化时 E_3 的 1340.1874 之间，实现了三类能量指标的均衡控制。其余数据中，三目标优化的 E_1、E_2、E_3 值均位于三类单目标优化结果的区间内，甚至优于单目标优化结果，如数据 3 中，三目标优化下的 E_3 为 1360.4073，为四种方法中扭曲能量的最小值，说明该方法在不显著牺牲任一指标的前提下，实现了多目标间的有效折衷。

Table 1. Computational results of different energy minimization methods for data 1
表 1. 数据 1 对应的不同能量极小化方法的计算结果

方法	参数 λ	E_1	E_2	E_3
拉伸能单目标优化	0.6171	0.2653	1.7201	1340.1874
弯曲能单目标优化	0.7340	0.2706	1.5916	1182.9229
扭曲能单目标优化	0.8027	0.2788	1.6353	1157.8582
本文三目标优化	0.8017	0.2786	1.6340	1157.8653

Table 2. Computational results of different energy minimization methods for data 2
表 2. 数据 2 对应的不同能量极小化方法的计算结果

方法	参数 λ	E_1	E_2	E_3
拉伸能单目标优化	0.6098	0.4358	4.1401	2786.8996
弯曲能单目标优化	0.7967	0.4611	3.8304	2342.4837
扭曲能单目标优化	1	0.5466	4.2992	2025.6022
本文三目标优化	0.9999	0.5465	4.2989	2025.6748

Table 3. Computational results of different energy minimization methods for data 3
表 3. 数据 3 对应的不同能量极小化方法的计算结果

方法	参数 λ	E_1	E_2	E_3
拉伸能单目标优化	0.5256	0.4179	2.2306	1494.6218
弯曲能单目标优化	0.6084	0.4216	2.1804	1397.3438
扭曲能单目标优化	0.7037	0.4349	2.2872	1360.4498
本文三目标优化	0.7022	0.4346	2.2841	1360.4073

5. 结论

本文以单位四元数样条曲线为研究对象，针对传统单目标能量优化方法在多指标间顾此失彼的问题，提出了一种三目标能量极小化方法。该方法构建了基于理想点的折衷优化模型，并给出了参数区间内最优解的选取方法。通过在多个相互制约的能量指标之间取得平衡，实现曲线拉伸、弯曲与扭曲特性的协同优化，有效改善单位四元数样条曲线的光顺性。未来的研究可在当前模型的基础上，引入带权重的理想点法，通过为不同能量指标赋予可调权重，实现面向特定应用场景的偏好性优化。

参考文献

[1] Moreton, H.P. and Séquin, C.H. (1994) 6. Minimum Variation Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. In: Sapidis, N.S., Ed., *Designing Fair Curves and Surfaces*: *Shape Quality in Geometric Modeling and Computer-Aided Design*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 123-159. https://doi.org/10.1137/1.9781611971521.ch6

[2] Zhang, C., Zhang, P. and Cheng, F. (2001) Fairing Spline Curves and Surfaces by Minimizing Energy. *Computer-Aided Design*, **33**, 913-923. https://doi.org/10.1016/s0010-4485(00)00114-7

[3] Yong, J.H. and Cheng, F.F. (2004) Geometric Hermite Curves with Minimum Strain Energy. *Computer Aided Geometric Design*, **21**, 281-301. https://doi.org/10.1016/j.cagd.2003.08.003

[4] Jaklič, G. and Žagar, E. (2011) Planar Cubic G^1 Interpolatory Splines with Small Strain Energy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 2758-2765. https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.11.025

[5] Lu, L., Jiang, C. and Hu, Q. (2018) Planar Cubic G^1 and Quintic G^2 Hermite Interpolations via Curvature Variation Minimization. *Computers & Graphics*, **70**, 92-98. https://doi.org/10.1016/j.cag.2017.07.007

[6] Ahn, Y.J., Hoffmann, C. and Rosen, P. (2014) Geometric Constraints on Quadratic Bézier Curves Using Minimal Length and Energy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **255**, 887-897. https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.07.005

[7] Li, J. and Zhang, L. (2020) Length and Curvature Variation Energy Minimizing Planar Cubic G^1 Hermite Interpolation Curve. *Journal of Taibah University for Science*, **14**, 60-64. https://doi.org/10.1080/16583655.2019.1703248

[8] LI, J. (2020) Combined Internal Energy Minimizing Planar Cubic Hermite Curve. *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, **14**, JAMDSM0103. https://doi.org/10.1299/jamdsm.2020jamdsm0103

[9] Yu, P.L. (1973) A Class of Solutions for Group Decision Problems. *Management Science*, **19**, 936-946. https://doi.org/10.1287/mnsc.19.8.936

[10] Shoemake, K. (1985) Animating Rotation with Quaternion Curves. *Proceedings of the* 12*th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, San Francisco, 22-26 July 1985, 245-254. https://doi.org/10.1145/325334.325242

[11] Kim, M.J., Kim, M.S. and Shin, S.Y. (1995) A C^2-Continuous B-Spline Quaternion Curve Interpolating a Given Sequence of Solid Orientations. In: *Proceedings of the* 1995 *IEEE Computer Animation Conference*, IEEE Computer Society Press, 72-81.

[12] Pu, Y., Shi, Y., Lin, X., Hu, Y. and Li, Z. (2020) C^2-Continuous Orientation Planning for Robot End-Effector with B-Spline Curve Based on Logarithmic Quaternion. *Mathematical Problems in Engineering*, **2020**, Article ID: 2543824. https://doi.org/10.1155/2020/2543824

[13] Barr, A.H., Currin, B., Gabriel, S. and Hughes, J.F. (1992) Smooth Interpolation of Orientations with Angular Velocity Constraints Using Quaternions. *Proceedings of the* 19*th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, Chicago, 27-31 July 1992, 313-320. https://doi.org/10.1145/133994.134086

[14] Ramamoorthi, R. and Barr, A.H. (1997) Fast Construction of Accurate Quaternion Splines. *Proceedings of the* 24*th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, Los Angeles, 3-8 August 1997, 287-292. https://doi.org/10.1145/258734.258870

[15] Veltkamp, R.C. and Wesselink, W. (1995) Modeling 3D Curves of Minimal Energy. *Computer Graphics Forum*, **14**, 97-110. https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.1995.cgf143_0097.x

[16] 王倩, 周彤, 朱佳一, 等. 四元数样条曲线的能量优化[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2026, 38(5): 929-938.

[17] 王倩, 刘美含, 周彤, 等. G^2连续的单位四元数样条曲线[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2023, 46(4): 438-445.

[18] Miettinen, K. (1999) Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer Academic Publishers.

[19] Kim, M.J., Kim, M.S. and SHIN, S.Y. (1996) A Compact Differential Formula for the First Derivative of a Unit Quaternion Curve. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, **7**, 43-57. https://doi.org/10.1002/(sici)1099-1778(199601)7:1<43::aid-vis136>3.0.co;2-t

[20] 韩志红, 朱春钢. 能量约束下的 Bézier 曲线构造[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2020, 32(2): 213-221.

[21] Kim, M.J., Kim, M.S. and Shin, S.Y. (1995) A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives. *Proceedings of the* 22*nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, Los Angeles, 6-11 August 1995, 369-376. https://doi.org/10.1145/218380.218486

[22] Ehrgott, M. (2005) Multicriteria Optimization. 2nd Edition, Springer.