Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 334-348
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511454

Hans汉斯

极大子群指数图无三角的有限单群

肖　笛

江西师范大学数学与统计学院，江西　南昌

收稿日期：2026年10月21日；录用日期：2026年11月15日；发布日期：2026年11月24日

摘　要

设$\pi(G)$为有限群G的阶的素因子集合。定义极大子群指数图$T_m(G)$的顶点集为$\pi(G)$，两个不同素数p,q相邻当且仅当存在极大子群$M<G$使$pq\mid|G:M|$。本文证明：对于非阿贝尔有限单群G，极大子群指数图$T_m(G)$不含三角形当且仅当G同构于$A_5, A_8, PSL_2(7), PSL_2(8), PSL_2(11)$中的一个。

关键词

有限单群，极大子群，子群指数，指数图，Zsigmondy定理

Finite Simple Groups with Triangle-Free Maximal Subgroup Index Graphs

Di Xiao

School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi

Received: October 21, 2026; accepted: November 15, 2026; published: November 24, 2026

Abstract

Let $\pi(G)$ denote the set of prime divisors of the order of a finite group G. Define the graph $T_m(G)$ with vertex set $\pi(G)$, where distinct primes p and q are adjacent if and only if there exists a maximal subgroup $M<G$ such that pq divides $|G:M|$. We prove that for nonabelian finite simple groups, $T_m(G)$ is triangle-free if and only if G is isomorphic to one of $A_5, A_8, PSL_2(7), PSL_2(8), PSL_2(11)$.

Keywords

Finite Simple Groups, Maximal Subgroups, Subgroup Indices, Index Graph, Zsigmondy Theorem

文章引用: 肖笛. 极大子群指数图无三角的有限单群[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 334-348.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511454

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

设 G 为有限群， $M<G$ 。记 $[G:M]$ 为 M 在 G 中指数。极大子群指数 $[G:M]$ 反映子群 M 在有限群 G 中的嵌入方式，也提供了关于群阶素因子的算术信息。记 $\pi(G)$ 为 $|G|$ 的素因子集合，我们定义群 G 的极大子群指数图 $T_m(G)$ 如下：

顶点集为 $\pi(G)$；对不同素数 $p,q\in\pi(G)$，规定 p 与 q 相邻，当且仅当存在极大子群 $M<G$，使得

$$pq\,|\,|G:M|.$$

本文主要研究该图最基本的局部结构之一——三角形。若 $T_m(G)$ 中有三个两两相邻的顶点，则称其构成一个三角形，并记为 Δ。下述定理为本文的主要结论：

定理 1.1 设 G 为非阿贝尔有限单群。则 $T_m(G)$ 不含三角形当且仅当 G 同构于下列群之一：

$$A_5, A_8, \mathrm{PSL}_2(7), \mathrm{PSL}_2(8), \mathrm{PSL}_2(11).$$

2. 预备知识

全文中的群均为有限群。记 $\pi(N)$ 为正整数 N 的素因子集合， C_n 为 n 阶循环群， A_n 为 n 次交错群， S_n 为 n 次对称群；对李型群， $\mathrm{PSL}_n(q)$， $\mathrm{PSU}_n(q)$， $\mathrm{PSp}_{2m}(q)$ 分别表示射影特殊线性群、射影特殊酉群和射影辛群。文中群扩张记号 $A.B$ 表示正规子群 A 被 B 扩张的群结构，不特指分裂扩张。当讨论李型群时，写 $q=p^f$ ，其中 p 为素数、 $f\geq 1$。记 D_t 为阶为 t 的二面体群；在经典群中， P_i 表示稳定相应的 i 维子空间的抛物子群。本文沿用有限群论中标准 ATLAS [1]记法。

引理 2.1. 若 G 存在极大子群 M ，使得 $[G:M]$ 至少含有三个不同的素因子，则 $T_m(G)$ 含有三角形。

证明：设 p,q,r 是三个不同素数且 $pqr\,|\,[G:M]$。于是同一个极大子群 M 同时给出边 $p-q, q-r, r-p$，从而 p,q,r 构成三角形。 □

记 $\Phi_n(x)$ 为第 n 个分圆多项式。则

$$x^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(x).$$

定义 2.2. 设整数 $q\geq 2$， $n\geq 1$。若素数 r 满足 $r\,|\,q^n-1$，但对所有 $1\leq k<n$ 都有 $r\nmid q^k-1$，则称 r 为 q^n-1 的本原素因子。

定理 2.3 (Zsigmondy [2]). 设整数 $q\geq 2, n\geq 1$。则 q^n-1 存在本原素因子，除以下情形外：

1. $(q,n)=(2,1)$；
2. $n=2$ 且 $q+1$ 是 2 的幂；
3. $(q,n)=(2,6)$。

引理 2.4. 若 $n=2^s t$ ，其中 $s\geq 0$ 且 t 为正奇数，则 $q^n+1=\prod_{d|t}\Phi_{2^{s+1}d}(q)$。

证明：由

$$q^n+1=\frac{q^{2n}-1}{q^n-1}=\frac{\prod_{k|2n}\Phi_k(q)}{\prod_{k|n}\Phi_k(q)}=\prod_{\substack{k|2n\\ k\nmid n}}\Phi_k(q).$$

写 $k=2^a m$，其中 m 为奇数。条件 $k\,|\,2n$ 且 $k\nmid n$ 等价于 $m\,|\,t$ 且 $a=s+1$，故结论成立。 □

引理 2.5. 若 r 是 q^n-1 的本原素因子，则 $r\mid \Phi_n(q)$；并且对所有 $1\le k<n$，有 $r\nmid \Phi_k(q)$。

证明：若 $k<n$，则 $\Phi_k(q)\mid q^k-1$，故由本原性知 $r\nmid \Phi_k(q)$。另一方面，

$$q^n-1=\prod_{d\mid n}\Phi_d(q),$$

而 r 不整除任何 $d<n$ 对应的因子，因此 $r\mid \Phi_n(q)$。 □

推论 2.6. 设 $k_1\neq k_2$，且 (q,k_i) 均不属于定理 2.3 的例外。若 r_i 是 $q^{k_i}-1$ 的本原素因子，则 $r_1\neq r_2$。

证明：不妨设 $k_1<k_2$。由引理 2.5，$r_1\mid \Phi_{k_1}(q)$，而 $r_2\nmid \Phi_{k_1}(q)$，故 $r_1\neq r_2$。 □

引理 2.7.设 N 为正整数，d_1,d_2,d_3 为两两不同的正整数。若 $\Phi_{d_i}(q)\mid N$，且 $q^{d_i}-1$ 对每个 i 都存在本原素因子，则 N 至少含有三个不同素因子。

证明：对每个 i 取 $q^{d_i}-1$ 的本原素因子 r_i。由引理 2.5，$r_i\mid \Phi_{d_i}(q)\mid N$；又由推论 2.6，$r_1,r_2,r_3$ 两两不同。 □

注记 2.8. 若 r 是 q^d-1 的本原素因子，则 $\mathrm{ord}_r(q)=d$，所以 $d\mid r-1$。若 $q=p^f$ 为素数幂，则 $r\neq p$。后文高秩论证所选次数均大于 2，因而只需处理 Zsigmondy 例外 $(q,d)=(2,6)$。此时 $\Phi_6(2)=3$，而 $\mathrm{ord}_3(2)=2$，所以其余大于 2 的次数的本原素因子均不同于 3。使用这一替代时，须确认 $\Phi_6(q)$ 在指数的分圆分解约消后仍然保留。

本文以下每次应用引理 2.7 时，均写出所取指数的分圆多项式分解

$$I_M=\prod\Phi_{d_i}(q)^{e_i}\Big/\text{分母}$$

并核验所选次数 d_i，并核验 (q,d_i) 不属于定理 2.3 的例外；若遇到 $(q,d_i)=(2,6)$，则按注 2.8 处理。

下述结论是显然的：

引理 2.9. 设 $Z\le Z(X)$ 且 $Z\le H<X$。则 $[X:H]=[X/Z:H/Z]$；此外，H 在 X 中极大，当且仅当 H/Z 在 X/Z 中极大。

证明：指数等式由群阶公式得到，极大性的等价关系由包含 Z 的子群与 X/Z 的子群之间的对应关系得到。 □

3. 交错群

本节讨论交错群 $A_n\,(n\ge 5)$ 的极大子群指数图。

定理 3.1. 设 $G=A_n$ 其中 $n\ge 5$，则极大子群指数图 $T_m(G)$ 不含有三角形当且仅当 $n=5,8$。

证明：对 A_6，取三个极大子群 $M_1=S_4,M_2=A_5,M_3=3^2:4$ 的指数分别为

$$I_{M_1}=15=3\cdot 5\text{、}\ I_{M_2}=6=2\cdot 3\text{、}\ I_{M_3}=10=2\cdot 5,$$

于是

$$M_1:3-5,M_2:2-3,M_3=2-5$$

三边分别由上述三个极大子群的指数贡献，故 2,3,5 构成三角形。

对 A_7，取 $M_1=S_5$、$M_2=\mathrm{PSL}_3(2)$ 和 $M_3=(S_3\times S_4)\cap A_7$ 的指数分别为

$$I_{M_1}=21=3\cdot 7\text{、}\ I_{M_2}=15=3\cdot 5\text{ 和 }I_{M_{31}}=35=5\cdot 7,$$

于是

$$M_1:3-7,M_2:3-5,M_3=5-7$$

故 3,5,7 构成三角形；这些小群的极大子群见[3]-[5]。

对 A_5，根据 ATLAS/CTblLib [3] [5]可知，A_5 有极大子群为极大子群 A_4，D_{10}，S_3，其对应指数分别为 $5,6,10$，故边只有 $2-3$ 与 $2-5$，没有三角形。

对 A_8，根据 ATLAS/CTblLib [3] [5]，A_8 有极大子群 A_7，$2^3:\mathrm{PSL}_3(2)$，S_6，$2^4:(S_3\times S_3)$，$(A_5\times C_3):C_2$，对应指数分别为

$$8,15,28,35,56.$$

因此边集为 $\{\{3,5\},\{2,7\},\{5,7\}\}$，即图为路径 3-5-7-2，不存在三角形。这里列出的是互异的指数值，而不是极大子群共轭类的个数。

下面设 $n\geq 9$。取非传递极大子群

$$M=(S_3\times S_{n-3})\cap A_n.$$

由交错群的非传递极大子群分类[4]，因为 $3<n/2$，所以 M 是 A_n 的极大子群，并且

$$I_M=[A_n:M]=\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

我们下面证明该 I_M 至少有三个不同的素因子。

若 n 为奇数，则按 $n\pmod 6$ 分三种情形：

$$n\equiv 3\pmod 6:\quad \binom{n}{3}=\frac{n}{3}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot(n-2),$$

$$n\equiv 1\pmod 6:\quad \binom{n}{3}=n\cdot\frac{n-1}{6}\cdot(n-2),$$

$$n\equiv 5\pmod 6:\quad \binom{n}{3}=n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}.$$

在每一行中，三个因子都大于 1 且两两互素，因此至少贡献三个不同素因子。这里可以从 $\gcd(n,n-1)=\gcd(n-1,n-2)=1$ 及奇数 n 满足 $\gcd(n,n-2)=1$ 直接看出互素性；除以 2 或 3 不会引入共同素因子。条件 $n\geq 9$ 保证所列因子均大于 1。

现在设 n 为偶数。首先若 $n\equiv 0\pmod 6$，则

$$I_M=\binom{n}{3}=(n-1)\cdot\frac{n}{6}\cdot(n-2).$$

其中 $n-1$ 与后两个因子的乘积互素。若 $\frac{n}{6}(n-2)$ 只有一个素因子，则由于 $n-2$ 为偶数，该素因子只能是 2；于是 $n/6=2^a$、$n-2=2^b$。这给出 $3\cdot 2^a-1=2^{b-1}$。若 $a\geq 1$，左端为奇数，因此 $b=1$，随即得到矛盾；若 $a=0$，则 $n=6$。故 $n\geq 12$ 时后两个因子的乘积至少含两个不同素因子，再加上 $n-1$ 的素因子，共至少三个。

若 $n\equiv 4\pmod 6$，则

$$I_M=\binom{n}{3}=\frac{n-1}{3}\cdot\frac{n}{2}\cdot(n-2).$$

第一因子与后两个因子的乘积互素。若 $\frac{n}{2}(n-2)$ 只有一个素因子，同理该素因子只能是 2，故 $n/2=2^a$、$n-2=2^b$。于是 $2^a-1=2^{b-1}$，迫使 $b=1,a=1$，从而 $n=4$，矛盾。

若 $n\equiv 2\pmod 6$，则

$$I_M=\binom{n}{3}=(n-1)\cdot n\cdot\frac{n-2}{6}.$$

第一因子与后两个因子的乘积互素。若 $n(n-2)/6$ 只有一个素因子，则该素因子仍只能是 2，于是

$$n=2^a,\quad (n-2)/6=2^b.$$

故 $2^{a-1}-1=3\cdot 2^b$。左端为奇数，所以 $b=0$，进而 $2^{a-1}=4$，即 $n=8$，与 $n\geq 9$ 矛盾。

综上，对所有 $n\geq 9$，$I_M=\binom{n}{3}$ 至少含三个不同素因子。由引理 2.1，$T_m(A_n)$ 含有三角形。

4. 李型单群

本节讨论李型群的极大子群指数图，李型单群分为经典李型群和例外李型群。

4.1. 经典李型群

4.1.1. 线性群 $\mathrm{PSL}_n(q)$

定理 4.1. 设 $G=\mathrm{PSL}_2(q)$ 为非阿贝尔单群。则 $T_m(G)$ 不含三角形当且仅当 $q\in\{4,5,7,8,11\}$。其中 $\mathrm{PSL}_2(4)\cong\mathrm{PSL}_2(5)\cong A_5$。

证明： $q=4,5$ 时 $G\cong A_5$，由前可知，其极大子群指数为 $5,6,10$，故无三角形。对其余三个群，极大子群指数分别为

G	极大子群指数及其对应子群
$\mathrm{PSL}_2(7)$	$7\leftrightarrow S_4, 8\leftrightarrow 7:3$
$\mathrm{PSL}_2(8)$	$9\leftrightarrow 2^3:7, 28\leftrightarrow D_{18}, 36\leftrightarrow D_{14}$
$\mathrm{PSL}_2(11)$	$11\leftrightarrow A_5, 12\leftrightarrow 11:5, 55\leftrightarrow D_{12}$

因此 $\mathrm{PSL}_2(7)$ 没有边；$\mathrm{PSL}_2(8)$ 只有边 $2-3, 2-7$；$\mathrm{PSL}_2(11)$ 只有边 $2-3, 5-11$，均无三角形。上述小群数据可由 ATLAS/CTblLib 直接核对[3] [5]。

下文列表同样忽略重复的指数值。下面设 $q=p^f$ 且 $q\notin\{4,5,7,8,11\}$。

以下所用 Borel 子群、环面正规化子和子域子群的极大性均由 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 的子群分类给出，亦可参见([5]，第 8 章)的二维线性群表。小参数已经单独核对；后文不将任意环面的正规化子或任意子域子群一概视为极大子群。

情况一：q 为偶数。写 $q=2^f$。排除 $q=4,8$ 后，有 $f\geq 4$。Dickson 分类说明此时两个环面正规化子均为极大子群。若 f 为偶数，写 $q=x^2$，其中 $x=2^{f/2}\geq 4$。非分裂环面正规化子 $M=D_{2(q+1)}$ 的指数为

$$I_M=\frac{q(q-1)}{2}=\frac{q}{2}(x-1)(x+1).$$

两个奇数 $x-1, x+1$ 均大于 1，且其最大公因子整除 2，所以它们互素。取奇素数 $r\mid x-1, s\mid x+1$，则有 $r\neq s$，且均不等于 2，于是该指数 I_M 含三个不同素因子 $2,r,s$。故有三角形 $M:2-r, r-s, s-2$，得证。

若 f 为奇数，则 $f\geq 5$。分裂环面正规化子 $M=D_{2(q-1)}$ 的指数为 $I_M=q(q+1)/2$。因为 $3\mid 2^f+1$，该指数含素数 $2,3$。由 Zsigmondy 定理，$2^{2f}-1$ 有本原素因子 r，因为 $2f\geq 10$。由 $\mathrm{ord}_r(2)=2f$，知 $r\nmid 2^f-1$，所以 $r\mid 2^f+1$。又 $\mathrm{ord}_3(2)=2$，故 $r\neq 3$；显然 $r\neq 2$。因此 $2,3,r$ 都整除该指数，故 I_M 含有 $2,3,r$，则有三角形 $M:2-3, 3-r, r-2$，得证这个论证同时覆盖奇素数和奇合数 f。

情况二：$q=p^f$ 为奇数。若 f 有奇素因子 r，写 $q=q_0^r$。Dickson 分类给出极大子域子群 $M=\mathrm{PSL}_2(q_0)$，

其指数为

$$I_M=\left[\mathrm{PSL}_2(q):\mathrm{PSL}_2(q_0)\right]=\frac{q}{q_0}\frac{q-1}{q_0-1}\frac{q+1}{q_0+1}.$$

记三个因子依次为 A,B,C。则 A 是 p 的正幂，而 B,C 是大于 1 的奇整数。若素数 ℓ 同时整除 B,C，则由 $B\mid q-1$、$C\mid q+1$ 得到 $\ell\mid 2$，与 B,C 为奇数矛盾。因此 $\gcd(B,C)=1$。此外，由几何级数展开可得 $B\equiv C\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$，故 $p\nmid BC$。取奇素数 $u\mid B,v\mid C$，于是 p,u,v 两两不同。构成三角形 $M:p-u,u-v,v-p$，得证。

若 $f>1$ 且 f 没有奇素因子，则 $f=2^a$，其中 $a\geq 1$。写 $q=x^2$。当 $q=9$ 时，$\mathrm{PSL}_2(9)\cong A_6$，已由定理 3.1 处理。以下设 $q>9$，所以 $x>3$。非分裂环面正规化子 $M=D_{q+1}$ 是极大子群，其指数为 $I_M=q(q-1)/2$。因为奇数的平方模 8 同余于 1，该指数含素数 2，也含特征素数 p。如果 $(q-1)/2$ 没有奇素因子，则 $x-1,x+1$ 都是 2 的幂。两个相差 2 的正的 2 的幂只能是 $2,4$，从而 $x=3$，矛盾。所以该指数还含有一个不同于 p 的奇素因子 r。于是 $2,p,r$ 都整除 I_M，构成三角形 $M:2-p,p-r,r-2$，得证。

最后设 $f=1$，即 $q=p$ 为奇素数。$p=13$ 时，非分裂环面正规化子 $M=D_{14}$ 是极大子群，其指数为 $I_M=78=2\cdot 3\cdot 13$，构成三角形 $M:2-3,3-13,13-2$，得证。若 $p>13$，则两个环面的正规化子均为极大子群，其指数为

$$\frac{p(p-1)}{2},\quad \frac{p(p+1)}{2}.$$

若其中一个半数 $(p\pm 1)/2$ 含至少两个不同素因子，则结论立即成立。否则二者均为素数幂。因为它们是相邻整数，其中偶数的那个必为 2 的幂。当 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 时，记 $(p-1)/2=2^a$，$(p+1)/2=r^b$，其中 r 为奇素数。Borel 子群 $C_p\rtimes C_{(p-1)/2}$ 是极大子群，指数为 $p+1=2r^b$，于是三个极大子群分别给出边 $p-2,p-r,2-r$，构成三角形。当 $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ 时，则 $(p+1)/2=2^a$ 且 $(p-1)/2=r^b$。这使得 $p=2^{a+1}-1$ 为 Mersenne 素数。由于 p 为素数，指数 $a+1$ 本身必须为素数。若 $a+1>3$，则 $a+1$ 为奇素数，从而 a 为偶数且 $a\geq 4$，于是

$$2^a-1=\left(2^{a/2}-1\right)\left(2^{a/2}+1\right)$$

是两个大于 1 的互素奇数之积，不可能为素数幂。这与 $p>13$ 矛盾，因为 $a+1\leq 3$ 只会给出 $p=3,7$。其余小素数 $p=5,7,11$ 已在开头处理。综上定理得证。 □

下面处理 $n\geq 3$。

定理 4.2. 设 $G=\mathrm{PSL}_n(q)$ 为单群且 $n\geq 3$。则 $T_m(G)$ 含有三角形，除非 $(n,q)=(3,2)$ 或 $(4,2)$。这两个群分别同构于 $\mathrm{PSL}_2(7)$ 与 A_8。

证明：情况一： $n=3$。当 $q\geq 7$ 时，Singer 循环群正规化子属于 Aschbacher 类 $\mathcal{C}_3$；其极大性见[6]。其阶为 $3(q^2+q+1)/\gcd(3,q-1)$，故其指数为：

(更具体地，可使用([5]，第 8 章)的三维线性群表(Table 8.3)。这里所取参数为 $q\geq 7$，而 $q=2,3,4,5$ 均在下面单独处理。)

$$I=q^3\frac{(q-1)^2(q+1)}{3}=q^3\frac{\Phi_1(q)^2\Phi_2(q)}{3}.$$

若 q 为偶数，则 $q-1,q+1$ 是互素奇数。由于 $q\geq 8$，除以 3 后这两个因子仍共同贡献至少两个不同的奇素数，再加上特征素数 2，故 I 至少含三个不同素因子。

若 q 为奇数，则 I 含有素数 2。若特征 $p=3$，则除以分母中的 3 后，q^3 仍保留素因子 3。若此时没

有第三个素因子，由于$3\nmid(q-1)(q+1)$，两个相邻偶数$q-1,q+1$都只能是 2 的幂；又因为它们只相差 2，此时只有$q=3$，与$q\geq 7$矛盾。故可设特征$p\neq 3$。此时p与 2 已经是I的两个不同素因子。若指数没有第三个素因子，则$(q-1)^2(q+1)$中除 2 外的素因子只能是被分母约去的一个 3。若$3\mid q-1$，由于$q-1$出现平方，约去一个 3 后仍保留素因子 3，于是I有三个不同素因子。若$3\mid q+1$，则必须有$q-1=2^a$、$q+1=3\cdot 2^b$。故$3\cdot 2^b-2^a=2$，从而$a=2,b=1$，即$q=5$，仍与$q\geq 7$矛盾。因此$q\geq 7$时结论成立。

上述方程中$a,b\geq 1$。若$a=b$，则$2^{a+1}=2$，与$a\geq 1$矛盾。因此$a\neq b$；比较$3\cdot 2^b-2^a=2$两边的 2 进赋值，得到$\min(a,b)=1$。若$a=1$，则$3\cdot 2^b=4$，不可能；故$b=1$，进而$a=2$、$q=5$。

小参数由[3] [5]中相应群的极大子群表给出。当$q=2$时，$\mathrm{PSL}_3(2)\cong\mathrm{PSL}_2(7)$。当$q=3,4,5$时，可分别取$S_4$、$\mathrm{PSL}_3(2)$和$S_5$型极大子群，指数为

$$234=2\cdot 3^2\cdot 13,\quad 120=2^3\cdot 3\cdot 5,\quad 3100=2^2\cdot 5^2\cdot 31.$$

特别地，$q=4$时 Singer 正规化子$7:3$并不极大，故不能直接用它的指数 960 应用引理 2.1。

情况二：$n=4$。当$q=2$时$\mathrm{PSL}_4(2)\cong A_8$，无三角形。当$q=3$时，取稳定一个 2-维子空间的极大抛物子群$P_2$。其指数为

$$I_{P_1}=\left[\mathrm{PSL}_4(3):P_2\right]=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_3=\frac{(3^4-1)(3^3-1)}{(3^2-1)(3-1)}=130=2\cdot 5\cdot 13,$$

故含有三角形。这里使用抛物子群，避免调用$q=3$时分解稳定子的极大性。

当$q\geq 4$时，无序分解$V=V_1\oplus V_2$（$\dim V_1=\dim V_2=2$）的稳定子是极大$\mathcal{C}_2$-子群；参见[6]。其指数为：

(这里使用([5]，第 8 章)的四维线性群表(Table 8.8)，并取$q\geq 4$。因此没有使用$q=2,3$时这一分解稳定子的极大性。)

$$\frac{q^4(q^2+1)(q^2+q+1)}{2}=\frac{q^4\Phi_3(q)\Phi_4(q)}{2}.$$

设$q=p^f$。次数$3,4$均不存在 Zsigmondy 例外，故可分别取本原素因子r_3,r_4。它们互异，且均不同于p。又$3\mid r_3-1$、$4\mid r_4-1$，故两者均为奇数，不会被分母 2 约去。因子$q^4/2$在$p=2$时仍保留素因子 2，在p为奇数时分母也不会约去p。因此指数至少有三个不同素因子。

情况三：$n=5$。由[6]，Singer 正规化子为极大$\mathcal{C}_3$-子群，指数为

$$I=\frac{q^{10}(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)}{5}=\frac{q^{10}\Phi_1(q)^4\Phi_2(q)^2\Phi_3(q)\Phi_4(q)}{5}.$$

该极大子群是覆盖群中扩域子群正规化子的射影像；其指数由覆盖群与射影群中的共同中心相消后得到。低维经典群的对应表亦见([5]，第 8 章)。

设$q=p^f$，并取次数$3,4$的本原素因子r_3,r_4。由$\mathrm{ord}_{r_3}(q)=3$可知$r_3\neq 5$，故r_3不被分母约去。如果$r_4\neq 5$，则p,r_3,r_4在指数中均保留：即使$p=5$，$q^{10}/5$仍被p整除。因此此时结论成立。

如果$r_4=5$，则$\mathrm{ord}_5(q)=4$，从而$5\nmid q(q+1)$。取$q+1$的任一素因子s。由于$q+1\mid q^2-1$且$s\neq 5$，s也整除I。此外，$s\neq p$，且$\mathrm{ord}_s(q)\leq 2$，所以$s\neq r_3$。于是p,r_3,s是I的三个不同素因子。这补足了分母 5 可能约去次数 4 的本原素因子时的论证。

情况四：$n\geq 6$。取极大抛物子群P_2。其指数为

$$I_{P_2}=\left[G:P_2\right]=\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}_q=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q^2-1)(q-1)}=\frac{\prod_{d\mid n}\Phi_d(q)\prod_{d\mid n-1}\Phi_d(q)}{\Phi_1(q)^2\Phi_2(q)}.$$

若n为偶数，选次数$n,n/2,n-1$；若n为奇数，选次数$n,n-1,(n-1)/2$。这些分圆因子均保留在上式

中。若三个次数均不属于 Zsigmondy 例外，则由引理 2.7 立即得到三个不同素因子；若出现 $(q,d)=(2,6)$，则 $q=2$ 且 $n\in\{6,7,12,13\}$。此时作为多项式因子的 $\Phi_6(q)$ 仍保留在指数中，因为分母只有 $\Phi_1(q),\Phi_2(q)$。取 $\Phi_6(2)=3$，其余两个次数均大于 2，故由注 2.8，对应的本原素因子与 3 互异。 □

4.1.2. 酉群

定理 4.3. 设 $G=\mathrm{PSU}_n(q)$ 为非阿贝尔单群且 $n\geq 3$。则 $T_m(G)$ 含有三角形。

证明： 注意 $\mathrm{PSU}_2(q)\cong\mathrm{PSL}_2(q)$，故维数 2 已由定理 4。1 处理。下面设 $n\geq 3$。

情况一： $n=3,q\geq 3$。先设 $q\notin\{3,4,5,7\}$。Singer 型环面正规化子在 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 中极大，参见[6]及([5], Table 8.5)；此处仅在所列参数范围内使用其极大性。其指数为

$$I=q^3\frac{(q-1)(q+1)^2}{3}=q^3\frac{\Phi_1(q)\Phi_2(q)^2}{3}.$$

若 q 为偶数，则 $q\geq 8$。奇数 $q-1,q+1$ 互素且均大于 3。分母 3 最多从其中一个因子中约去一个 3，因而两个因子仍各自贡献一个奇素数，且这两个素数互异。再加上特征素数 2，可知 I 至少有三个不同素因子。

若 q 为奇数，先设特征 $p=3$。此时 $q\geq 9$，并且

$$I=3^{3f-1}(q-1)(q+1)^2$$

含有素数 3 与 2。若没有第三个素因子，则 $q-1$ 与 $q+1$ 都只能是 2 的幂；两个相差 2 的 2 的幂只能是 2 与 4，这会迫使 $q=3$，矛盾。因此特征为 3 且 $q\geq 9$ 时， I 已含至少三个不同素因子。

若 $p\neq 3$，则 I 已含 p 与 2。若没有第三个素数，则 $(q-1)(q+1)^2$ 中除 2 外的素因子只能是分母中的 3。若 $3\mid q+1$，由于 $q+1$ 出现平方，约去一个 3 后仍保留素因子 3，矛盾。故只能 $3\mid q-1$，并且必有

$$q+1=2^a,\quad q-1=3\cdot 2^b.$$

两式相减得到 $2^a-3\cdot 2^b=2$。这里 $a,b\geq 1$，且 $a=b$ 会使左端为负数，故 $a\neq b$。比较 2 进赋值得 $\min(a,b)=1$。若 $a=1$，则要求 $3\cdot 2^b=0$，不可能；因此 $b=1$、$a=3$，即 $q=7$。所以，除需直接核对的 $q=3,4,5,7$ 外，Singer 型指数本身已含三个不同素因子。小参数可由 ATLAS/CTblLib 直接核对[3] [5]：

q	可用极大子群指数
3	$28,36,63,$
4	$65,208,1600,$
5	$126=2\cdot 3^2\cdot 7,$
7	$16856=2^3\cdot 7^2\cdot 43.$

具体地，本表中 $q=3$ 时，各指数可分别由 $\mathrm{PSU}_3(3)$ 的极大子群 3^{1+2}:8 (指数 28)、$\mathrm{PSL}_3(2)$ (指数 36)、$4^2:S_3$ (指数 63)给出；其中指数 63 另有一个结构记作 $4.S_4$ 的极大子群。$q=4$ 时，各指数分别由 2^{2+4}:15 (指数 65)、$C_5\times A_5$ (指数 208)、13:3 (指数 1600)给出。$q=5$ 时，指数 126 对应 Borel 子群 $5_+^{1+2}:8$； $q=7$ 时，指数 16856 对应 $\mathrm{PSL}_3(2).2$。所列均为该单群内的极大子群。

因此，$q=3$ 时，$28,36,63$ 分别给出 $2-7,2-3,3-7$；$q=4$ 时，$65,208,1600$ 分别给出 $5-13,2-13,2-5$。$q=5$ 可取 Borel 子群， $q=7$ 可取 $\mathrm{PSL}_3(2).2$ 型极大子群。故 $n=3$ 全部成立。

情况二： $n=4$。当 $q\geq 3$ 时，稳定一个非退化 1-空间的 C_1-子群是极大的(参见[6])，其指数为

$$q^3(q-1)(q^2+1)=q^3\Phi_1(q)\Phi_4(q).$$

该稳定子取在射影特殊酉群中；它的极大性及低参数限制也可由([5]，第 8 章)的四维酉群表核对。

因为 $q\geq 3$，可取素数 $s\mid q-1$；再取次数 4 的本原素因子 r_4。由 $\mathrm{ord}_s(q)=1$、$\mathrm{ord}_{r_4}(q)=4$，知 p,s,r_4 两两不同，故结论成立。$q=2$ 时 $\mathrm{PSU}_4(2)\cong \mathrm{PSp}_4(3)$；其极大子群指数 $36,40,45$ 分别给出边 $2-3,2-5,3-5$。

情况三： $n\geq 5$，取稳定全迷向 1-空间的极大抛物子群 P_1：

$$I_{P_1}=[G:P_1]=\frac{\left(q^n-(-1)^n\right)\left(q^{n-1}-(-1)^{n-1}\right)}{q^2-1}.$$

若 n 为偶数(于是 $n\geq 6$)，其中含 $\Phi_n(q),\Phi_{n/2}(q),\Phi_{2n-2}(q)$。除 $q=2$ 且某个所选次数等于 6 外，三者有互异本原素因子。在偶数 $n\geq 6$ 中，这只发生于 $n=6$ 或 $n=12$。当 $(n,q)=(6,2)$ 时，直接取 $\Phi_6(2)=3$，$\Phi_3(2)=7$，$\Phi_{10}(2)=11$；当 $(n,q)=(12,2)$ 时，取 $\Phi_{12}(2)=13$、$\Phi_6(2)=3$，再取 $2^{22}-1$ 的一个本原素因子。三者仍然互不相同。

若 n 为奇数，其中含 $\Phi_{2n}(q),\Phi_{n-1}(q),\Phi_{(n-1)/2}(q)$。当 $n=5$ 时，需要注意分母的约消。直接计算得

$$I_{P_1}=[G:P_1]=\left(q^5+1\right)\left(q^2+1\right)=\Phi_2(q)\Phi_{10}(q)\Phi_4(q).$$

因此 $q+1$ 确实是最终指数的因子。取它的任一素因子，再取次数 $4,10$ 的本原素因子，得到三个不同素数。对奇数 $n\geq 7$，唯一可能遇到的 Zsigmondy 例外仍是 $q=2$ 且某个所选次数等于 6，这恰好发生于 $n=7$ (次数 $n-1=6$)或 $n=13$ (次数 $(n-1)/2=6$)。在这两种情形中直接使用 $\Phi_6(2)=3$；其余两个所选次数仍有本原素因子，并且这些本原素因子都不同于 3。例如 $n=7$ 时可取 $\Phi_{14}(2)$、$\Phi_6(2)=3$、$\Phi_3(2)=7$。在上述 $q=2$ 的情形中，$\Phi_6(q)$ 是约消后仍存在的多项式因子，所以用 3 替代本原素因子是合法的。因此所有 $n\geq 5$ 成立。

4.1.3. 辛群

定理 4.4 设 $G=\mathrm{PSp}_{2m}(q)$ 为非阿贝尔单群，$m\geq 2$。则 $T_m(G)$ 含有三角形。

证明：情况一： $m=2$。若 q 为偶数且 $q\geq 4$，$O_4^-(q)$ 型子群是极大的；参见[6]。其指数为

$$\frac{q^2\left(q^2-1\right)}{2}=\frac{q^2}{2}(q-1)(q+1)=\frac{q^2\Phi_1(q)\Phi_2(q)}{2}.$$

显然，$q-1,q+1$ 是互素奇数且均大于 1，故得到三个不同素因子。

若 q 为奇数且 $q\geq 5$，取扩域子群 $N_{\mathrm{Sp}_4(q)}\left(\mathrm{Sp}_2\left(q^2\right)\right)$ 在射影群中的像。它是极大子群，阶为 $\left|\mathrm{Sp}_2\left(q^2\right)\right|$，故其指数同样为 $q^2\left(q^2-1\right)/2$；参见[6]。这里只需要阶与极大性，不需指定该扩张是否分裂。此时指数含 p 与 2。此外，$q-1$ 与 $q+1$ 不可能同时为 2 的幂：若同时为 2 的幂，由于二者相差 2，只能有 $q=3$。因此当 $q\geq 5$ 时，$\left(q^2-1\right)/2$ 含有奇素因子 $r\neq p$，故指数含有三个不同素因子 $p,2,r$。$q=3$ 时 $G\cong \mathrm{PSU}_4(2)$，上面已由指数 $36,40,45$ 得到三角形。

在奇数 $q\geq 5$ 的情形，覆盖群中的正规化子阶为 $2\left|\mathrm{Sp}_2\left(q^2\right)\right|$，而其中心包含阶为 2 的标量中心。因此射影像的阶为 $\left|\mathrm{Sp}_2\left(q^2\right)\right|=q^2\left(q^4-1\right)$，相应指数为 $q^2\left(q^2-1\right)/2$。极大性亦见([5]，第 8 章)的四维辛群表。

情况二： $m\geq 3$。取稳定全迷向 2-空间的极大抛物子群 P_2：

$$I_{P_2}=[G:P_2]=\frac{\left(q^{2m}-1\right)\left(q^{2m-2}-1\right)}{\left(q^2-1\right)(q-1)}=\frac{\prod_{d\mid 2m}\Phi_d(q)\prod_{d\mid 2m-2}\Phi_d(q)}{\Phi_1(q)^2\Phi_2(q)}.$$

其中含 $\Phi_{2m}(q),\Phi_m(q),\Phi_{2m-2}(q)$，且三个次数两两不同。若不存在 Zsigmondy 例外，则由引理 2.7 得证；

若出现$(q,d)=(2,6)$，则$q=2$且$m\in\{3,4,6\}$。所选的$\Phi_6(q)$在分圆因子约消后仍保留，故取$\Phi_6(2)=3$；另两个次数大于2，其本原素因子与3互异。□

4.1.4. 正交群

定理 4.5 设G为非阿贝尔有限单正交群。若G不同构于下列五个群中的任何一个：$A_5, A_8, \mathrm{PSL}_2(7), \mathrm{PSL}_2(8), \mathrm{PSL}_2(11)$，则$T_m(G)$含有三角形。

证明： 先处理低维同构(参见[6])。我们使用

$$\mathrm{P\Omega}_3(q)\cong\mathrm{PSL}_2(q),\quad \mathrm{P\Omega}_4^-(q)\cong\mathrm{PSL}_2(q^2),\quad \mathrm{P\Omega}_5(q)\cong\mathrm{PSp}_4(q).$$

以及

$$\mathrm{P\Omega}_6^+(q)\cong\mathrm{PSL}_4(q),\quad \mathrm{P\Omega}_6^-(q)\cong\mathrm{PSU}_4(q).$$

另一方面，$\mathrm{P\Omega}_4^+(q)$不是非阿贝尔单群。上述奇维同构按奇特征的通常记号理解；偶特征的奇维情形使用$B_m(q)\cong C_m(q)$。所以低维情形均由定理4.1~4.4处理。特别地，$\mathrm{P\Omega}_4^-(q)$同构于$\mathrm{PSL}_2(q^2)$，必须包括在内。因此，只需考虑维数$2m+1$、$m\geq 3$的奇维情形，以及维数$2m$、$m\geq 4$的偶维情形。

对于奇维情形，若q为偶数，则$B_m(q)$与$C_m(q)$的有限单群同构，故已由定理4.4处理。以下设q为奇数。取极大抛物子群P_2，其指数为

$$I_{P_2}=[G:P_2]=\frac{(q^{2m}-1)(q^{2m-2}-1)}{(q^2-1)(q-1)}=\frac{\prod_{d|2m}\Phi_d(q)\prod_{d|2m-2}\Phi_d(q)}{\Phi_1(q)^2\Phi_2(q)}.$$

因此可沿用次数$2m, m, 2m-2$的论证。

若$G=\mathrm{P\Omega}_{2m}^+(q)$，则

$$I_{P_2}=[G:P_2]=\frac{(q^m-1)(q^{m-1}-1)(q^{m-1}+1)(q^{m-2}+1)}{(q^2-1)(q-1)}$$

$$=\frac{\left(\prod_{d|2m}\Phi_d(q)\right)\left(\prod_{d|m-1}\Phi_d(q)\right)\left(\prod_{d|2m-2}\Phi_d(q)\right)\left(\prod_{d|2m-4}\Phi_d(q)\right)}{\Phi_1(q)^2\Phi_2(q)}.$$

其中含有$\Phi_m(q),\Phi_{m-1}(q),\Phi_{2m-2}(q)$。若$G=\mathrm{P\Omega}_{2m}^-(q)$，则

$$I_{P_2}=[G:P_2]=\frac{(q^{m-1}-1)(q^{m-2}-1)(q^m+1)(q^{m-1}+1)}{(q^2-1)(q-1)}$$

$$=\frac{\left(\prod_{d|m-1}\Phi_d(q)\right)\left(\prod_{d|m-2}\Phi_d(q)\right)\left(\prod_{d|m}\Phi_d(q)\right)\left(\prod_{d|m-1}\Phi_d(q)\right)}{\Phi_1(q)^2\Phi_2(q)},$$

其中含$\Phi_{2m}(q),\Phi_{2m-2}(q),\Phi_{m-1}(q)$。对$m\geq 4$，上述三种次数均两两不同。若不存在Zsigmondy例外，由引理2.7得证。例外只能出现在$q=2$：正型为$m\in\{4,6,7\}$，负型为$m\in\{4,7\}$。在各情形中，作为多项式因子的$\Phi_6(q)$均未被分母的$\Phi_1(q),\Phi_2(q)$约去。取$\Phi_6(2)=3$，另两个次数大于2，由注2.8得到另外两个不同于3的素因子。因此所有这些正交单群均成立。□

4.2. 例外李型群

4.2.1. $G_2(q)$

定理 4.6. 设$q\geq 3$。则$T_m(G_2(q))$含有三角形。

证明：取任一极大抛物子群 P。由 G_2 的 Weyl 群 Poincaré 多项式，或直接由群阶计算，

抛物子群指数的 Weyl 群 Poincaré 多项式计算使用[7]；同一方法也用于定理 4.7、4.8、4.10 和 4.11。

$$I_P=\left[G_2(q):P\right]=\frac{q^6-1}{q-1}=\Phi_2(q)\Phi_3(q)\Phi_6(q).$$

$\Phi_3(q)$ 与 $\Phi_6(q)$ 分别含有不同的本原素因子 r_3,r_6；二者都不整除 $q+1=\Phi_2(q)$。再从 $q+1>1$ 取任一素因子 r_2，则 r_2,r_3,r_6 两两不同。故有 $P:r_2-r_3,r_3-r_6,r_6-r_2$，得证。 □

4.2.2. $F_4(q)$

定理 4.7. 对任意素数幂 $q\geq 2$，$T_m\left(F_4(q)\right)$ 含有三角形。

证明：取 Levi 半单部分为 B_3 或 C_3 的端点极大抛物子群 P。这两个类型具有相同的 Weyl 群基本次数，故给出相同指数。利用

$$F_4:2,6,8,12,\quad B_3:2,4,6,$$

得到

$$I_P=\left[F_4(q):P\right]=\frac{\left(q^8-1\right)\left(q^{12}-1\right)}{\left(q^4-1\right)(q-1)}=\Phi_2(q)\Phi_3(q)\Phi_4(q)\Phi_6(q)\Phi_8(q)\Phi_{12}(q).$$

次数 3,8,12 均不属于 Zsigmondy 例外，故由引理 2.7 给出互异本原素因子 r_3,r_8,r_{12} 均保留在 I_P 中。故有 $P_1:r_3-r_8,r_8-r_{12},r_{12}-r_3$ 得证。 □

4.2.3. $E_6(q)$

定理 4.8. 对任意素数幂 q，$T_m\left(E_6(q)\right)$ 含有三角形。

证明：取 Levi 半单部分为 D_5 的端点极大抛物子群 P_1。由 Weyl 群 Poincaré 多项式

$$I_{P_1}\left[E_6(q):P_1\right]=\frac{\left(q^9-1\right)\left(q^{12}-1\right)}{\left(q^4-1\right)(q-1)}=\Phi_3(q)^2\Phi_6(q)\Phi_9(q)\Phi_{12}(q).$$

次数 3,9,12 三者 >2 且≠6 三者均不属于 Zsigmondy 例外，故由引理 2.7 有 $P_1:r_3-r_9,r_9-r_{12},r_{12}-r_3$，得证。 □

4.2.4. ${}^2E_6(q)$

定理 4.9. 对任意素数幂 q，$T_m\left({}^2E_6(q)\right)$ 含有三角形。

证明：根据 $F_4(q)$ 在 ${}^2E_6(q)$ 中的标准极大嵌入(参见([8], Table 10))，记其为 M，其指数为：

(在([8], Table 10)的 $F_4(q)$ 行中没有额外的参数限制；该子群在所讨论的单群 ${}^2E_6(q)$ 中极大。其阶为 $q^{24}\left(q^{12}-1\right)\left(q^8-1\right)\left(q^6-1\right)\left(q^2-1\right)$，所以与 $\left|{}^2E_6(q)\right|$ 相除得到下面的指数。)

$$I_M=\left[{}^2E_6(q):F_4(q)\right]=\frac{q^{12}\left(q^5+1\right)\left(q^9+1\right)}{\gcd(3,q+1)}=\frac{q^{12}\Phi_2^2(q)\Phi_6(q)\Phi_{10}(q)\Phi_{18}(q)}{\gcd(3,q+1)}.$$

设 $q=p^f$。因子 q^{12} 给出素数 p。又

$$q^5+1=\Phi_2(q)\Phi_{10}(q),\quad q^9+1=\Phi_2(q)\Phi_6(q)\Phi_{18}(q).$$

由 Zsigmondy 定理，$\Phi_{10}(q)$ 与 $\Phi_{18}(q)$ 分别含有互异本原素因子 r_{10},r_{18}。它们均不整除 $q+1$，因而不会被分母 $\gcd(3,q+1)$ 约去，且显然不同于特征素数 p。此外，若 $p=3$，则 $q\equiv 0\pmod 3$，所以

$\gcd(3,q+1)=1$；若 $p\neq 3$，分母也不可能约去 p。因此 p,r_{10},r_{18} 都保留在指数中，且两两不同故有 $M:p-r_{10},r_{10}-r_{18},r_{18}-p$。

□

4.2.5. $E_7(q)$

定理 4.10. 对任意素数幂 q，$T_m(E_7(q))$ 含有三角形。

证明：取 Levi 半单部分为 E_6 的极大抛物子群 P。其指数为

$$I_P=\frac{(q^{10}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)}{(q^5-1)(q^9-1)(q-1)}=\frac{(q^{14}-1)(q^5+1)(q^9+1)}{q-1}=\Phi_2^3(q)\Phi_6(q)\Phi_7(q)\Phi_{10}(q)\Phi_{14}(q)\Phi_{18}(q).$$

因此指数含有分圆因子 $\Phi_7(q),\Phi_{10}(q),\Phi_{18}(q)$。次数 7,10,18 均不属于 Zsigmondy 例外，故由引理 2.7 有 $P:r_7-r_{10},r_{10}-r_{18},r_{18}-r_7$ 得证。 □

4.2.6. $E_8(q)$

定理 4.11 对任意素数幂 q，$T_m(E_8(q))$ 含有三角形。

证明：取 Levi 半单部分为 E_7 的极大抛物子群 P。由 Weyl 群基本次数得到

$$I_P=[E_8(q):P]=\frac{(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)}{(q^6-1)(q^{10}-1)(q-1)}=\frac{\left(\prod_{d|20}\Phi_d(q)\right)\left(\prod_{d|24}\Phi_d(q)\right)\left(\prod_{d|30}\Phi_d(q)\right)}{\Phi_1(q)\Phi_2(q)\Phi_3(q)\Phi_5(q)\Phi_6(q)\Phi_{10}(q)}.$$

展开后该指数含有 $\Phi_{20}(q),\Phi_{24}(q),\Phi_{30}(q)$。三者 >2 且≠6，均不属于 Zsigmondy 例外，故由引理 2.7 有 $P:r_{20}-r_{24},r_{24}-r_{30},r_{30}-r_{20}$ 得证。 □

4.2.7. ${}^3D_4(q)$

定理 4.12. 对任意素数幂 q，$T_m({}^3D_4(q))$ 含有三角形。

证明：标准 BN -对给出一个极大抛物子群 P，其指数为

$$I_P=(q^8+q^4+1)(q+1)=\Phi_2(q)\Phi_3(q)\Phi_6(q)\Phi_{12}(q);$$

亦参见[9]。当 $q>2$ 时，次数 3,6,12，三者均大于 2，且因为 $q>2$ 为非例外情况，故均有本原素因子，且三者互异。则 $P:r_3-r_6,r_6-r_{12},r_{12}-r_3$ 得证。当 $q=2$ 时，直接使用

$$\Phi_2(2)=3、\ \Phi_3(2)=7 \text{ 和 } \Phi_{12}(2)=13,$$

同一 P 的指数含有 3,7,13 得证。 □

4.2.8. Suzuki 群

定理 4.13 设 $q=2^{2n+1}$，$n\geq 1$。则 $T_m(\mathrm{Sz}(q))$ 含有三角形。

证明：由 Suzuki 群的极大子群结构[10]，可取极大子群

$$M=C_{q-\sqrt{2q}+1}:4.$$

其指数为

$$I_M=\frac{q^2(q-1)(q+\sqrt{2q}+1)}{4}=2^{4n}(2^{2n+1}-1)(2^{2n+1}+2^{n+1}+1).$$

后两个因子均为大于 1 的奇数。设素数 r 同时整除这两个因子。相减得 $r\mid 2^{n+1}+2$，故 $2^n\equiv -1(\bmod r)$。于是 $2^{2n+1}\equiv 2(\bmod r)$；但由第一个因子又有 $2^{2n+1}\equiv 1(\bmod r)$，矛盾。因此这两个奇数互素，分别贡献不

同的奇素因子，再加上素数 2，该指数至少有三个不同素因子，故有 $M:2-r,r-s,s-2$ 得证。 □

4.2.9. 小 Ree 群 ${}^2\mathrm{G}_2(q)$

定理 4.14. 设 $q=3^{2m+1}$， $m\geq 1$。则 $T_m\left({}^2G_2(q)\right)$ 含有三角形。

证明： 由 Ree 群的极大子群分类[11]，Borel 子群 $M=\left[q^3\right]:C_{q-1}$ 是极大子群，其指数为

$$I_M=q^3+1=(q+1)\left(q^2-q+1\right)=\Phi_2(q)\Phi_6(q).$$

由 $q^2-q+1\equiv 3\left(\mathrm{mod}\, q+1\right)$ 可知 $\gcd\left(q+1,q^2-q+1\right)=\gcd(q+1,3)=1$，最后一个等式使用 $q\equiv 0\left(\mathrm{mod}\, 3\right)$。又

$$q+1=4\left(3^{2m}-3^{2m-1}+\cdots-3+1\right),$$

括号内是大于 1 的奇数。因此 $q+1$ 至少含素数 2 和一个奇素数 r；而 $q^2-q+1>1$ 含有素数 s。由互素性，$s\notin\{2,r\}$，故得到三条边 $M:2-r,r-s,s-2$ 得证。 □

4.2.10. 大 Ree 群 ${}^2\mathrm{F}_4(q)$ 与 Tits 群

定理 4.15 设 $q=2^{2n+1}$， $n\geq 1$。则 $T_m\left({}^2F_4(q)\right)$ 含有三角形。

证明： 由大 Ree 群的极大子群结构[12]，取 Levi 因子含有 $\mathrm{SL}_2(q)$ 的极大抛物子群 H。其阶为 $q^{12}(q-1)^2(q+1)$，因此

$$I_H=\left[{}^2F_4(q):H\right]=\frac{\left(q^4-1\right)\left(q^6+1\right)}{q-1}=(q+1)\left(q^2+1\right)^2\left(q^4-q^2+1\right)=\Phi_2(q)\Phi_4(q)^2\Phi_{12}(q).$$

次数 2,4,12 在这里均不属于 Zsigmondy 例外：由于 q 为偶数且 $q\geq 8$， $q+1$ 为大于 1 的奇数，不可能是 2 的幂。因此由引理 2.7，有 $H:r_2-r_4,r_4-r_{12},r_{12}-r_2$，故得证。 □

定理 4.16 Tits 群 ${}^2F_4(2)'$ 的图 $T_m\left({}^2F_4(2)'\right)$ 含有三角形。

证明： ATLAS 给出阶为 $2^{11}\cdot 5$ 的极大子群 $M=2.\left[2^8\right].5.4$ (这里只使用其阶，不对各扩张断言分裂)，其指数为

$$1755=3^3\cdot 5\cdot 13.$$

故由引理 2.1，有 $M:3-5,5-13,13-3$ 得证。 □

5. 散在单群

定理 5.1 设 G 为散在单群。则 $T_m(G)$ 含有三角形。

证明： 根据 ATLAS [1]中散在单群的极大子群，结论得证。详见表 1。表中极大子群的结构按照 ATLAS [1]标准记法书写。 □

6. 主定理证明

定理 6.1 设 G 为非阿贝尔有限单群。则 $T_m(G)$ 不含三角形当且仅当 G 同构于 $A_5,A_8,\mathrm{PSL}_2(7),\mathrm{PSL}_2(8),\mathrm{PSL}_2(11)$ 中的一个。

换言之，除上述五个同构类型外，每个非阿贝尔有限单群的 $T_m(G)$ 都含有三角形。

证明： 由有限单群分类定理(例如[10])，非阿贝尔有限单群分为交错群、李型单群和散在单群。交错群由定理 3.1 处理；经典李型群由定理 4.1~4.5 处理；例外李型群由第 4.2 节及命题 4.16 处理。低参数的导出群也没有遗漏：$G_2(2)'\cong\mathrm{PSU}_3(3)$ 已由定理 4.3 处理，${}^2G_2(3)'\cong\mathrm{PSL}_2(8)$ 已由定理 4.1 处理，而 ${}^2F_4(2)'$

正是命题 4.16 中的 Tits 群。散在单群由表 1 与引理 2.1 处理。

Table 1. Maximal subgroups and their indices of sporadic simple groups
表 1. 散在单群的极大子群及其指数

散在单群 G	对应极大子群 M	指数$[G:M]$
M_{11}	S_5	$2\cdot3\cdot11$
M_{12}	$2\times S_5$	$2^2\cdot3^2\cdot11$
M_{22}	$2^4{:}S_5$	$3\cdot7\cdot11$
M_{23}	A_8	$2\cdot11\cdot23$
M_{24}	$M_{22}{:}2$	$2^2\cdot3\cdot23$
J_1	$L_2(11)$	$2\cdot7\cdot19$
J_2	$3.A_6.2$	$2^3\cdot5\cdot7$
J_3	$L_2(16){:}2$	$2^2\cdot3^4\cdot19$
J_4	$2^{11}{:}M_{24}$	$11^2\cdot29\cdot31\cdot37\cdot43$
HS	S_8	$2^2\cdot5^2\cdot11$
McL	$U_3(5)$	$2^3\cdot3^4\cdot11$
Suz	$G_2(4)$	$2\cdot3^4\cdot11$
Ru	${}^2F_4(2)$	$2^2\cdot5\cdot7\cdot29$
He	$S_4(4){:}2$	$2\cdot3\cdot7^3$
O’N	$L_3(7){:}2$	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot11\cdot31$
Co_3	M_{23}	$2^3\cdot3^5\cdot5^2$
Co_2	HS:2	$2^8\cdot3^4\cdot23$
Co_1	Co_2	$2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot13$
Fi_{22}	$O_7(3)$	$2^8\cdot5\cdot11$
Fi_{23}	$2.Fi_{22}$	$3^4\cdot17\cdot23$
Fi_{24}'	Fi_{23}	$2^3\cdot3^3\cdot7^2\cdot29$
HN	A_{12}	$2^5\cdot3\cdot5^4\cdot19$
Ly	$G_2(5)$	$2^2\cdot3^4\cdot11\cdot37\cdot67$
Th	${}^3D_4(2){:}3$	$2^3\cdot3^5\cdot5^3\cdot19\cdot31$
B	$2^{1+22}.Co_2$	$3^7\cdot5^3\cdot7\cdot13\cdot17\cdot19\cdot31\cdot47$
M	$2.B$	$2^4\cdot3^7\cdot5^3\cdot7^4\cdot11\cdot13^2\cdot29\cdot41\cdot59\cdot71$

五个例外中，A_5 与 A_8 已在定理 3.1 中直接核对；$\mathrm{PSL}_2(7),\mathrm{PSL}_2(8),\mathrm{PSL}_2(11)$ 的全部极大子群指数已在定理 4.1 的证明中列出，因此它们确实没有三角形。

参考文献

[1] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) ATLAS of Finite Groups. Oxford

University Press.

[2] Zsigmondy, K. (1892) Zur Theorie der Potenzreste. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **3**, 265-284. https://doi.org/10.1007/bf01692444

[3] Breuer, T. (2025) The GAP Character Table Library, Version 1.3.11. GAP Package. https://www.math.rwth-aachen.de/~Thomas.Breuer/ctbllib/ctbltoc/

[4] Liebeck, M.W., Praeger, C.E. and Saxl, J. (1987) A Classification of the Maximal Subgroups of the Finite Alternating and Symmetric Groups. *Journal of Algebra*, **111**, 365-383. https://doi.org/10.1016/0021-8693(87)90223-7

[5] Bray, J.N., Holt, D.F. and Roney-Dougal, C.M. (2013) The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9781139192576

[6] Kleidman, P.B. and Liebeck, M.W. (1990) The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511629235

[7] Carter, R.W. (1985) Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters. John Wiley & Sons.

[8] Craven, D.A. (2023) The Maximal Subgroups of the Exceptional Groups $F_4(q)$, $E_6(q)$ and ${}^2E_6(q)$ and Related Almost Simple Groups. *Inventiones Mathematicae*, **234**, 637-719. https://arxiv.org/abs/2103.04869v4

[9] Kleidman, P.B. (1988) The Maximal Subgroups of the Steinberg Triality Groups ${}^3D_4(q)$ and of Their Automorphism Groups. *Journal of Algebra*, **115**, 182-199. https://doi.org/10.1016/0021-8693(88)90290-6

[10] Wilson, R.A. (2009) The Finite Simple Groups. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-84800-988-2.

[11] Kleidman, P.B. (1988) The Maximal Subgroups of the Chevalley Groups $G_2(q)$ with Q Odd, the Ree Groups ${}^2G_2(q)$, and Their Automorphism Groups. *Journal of Algebra*, **117**, 30-71. https://doi.org/10.1016/0021-8693(88)90239-6

[12] Malle, G. (1991) The Maximal Subgroups of ${}^2F_4(q^2)$. *Journal of Algebra*, **139**, 52-69. https://doi.org/10.1016/0021-8693(91)90283-e