Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 308-320
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511452

Hans汉斯

带弱奇异敏感和Logistic源的趋化模型解的质量持久性

张鸿琳

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2026年10月21日；录用日期：2026年11月15日；发布日期：2026年11月24日

摘　要

本文研究光滑有界区域$\Omega\subset\mathbb{R}^n\left(n\geq 1\right)$中带有弱奇异敏感性与Logistic源的抛物－椭圆趋化模型$\begin{cases}u_t=\Delta u-\chi\nabla\cdot\left(\frac{u}{v^\alpha}\nabla v\right)+ru-\mu u^k, & x\in\Omega,t>0\\ 0=\Delta v-v+u, & x\in\Omega,t>0\end{cases}$其中$\chi>0,\alpha\in\left(0,1\right),r>0,\mu>0$。本文证明：若$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$且$k>2-2\alpha$，或者$\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)$且$k>1$，在系统全局经典解存在的前提下，且非负初值$u_0\in C^0\left(\bar{\Omega}\right)$满足$\int_\Omega u_0\mathrm{d}x\leq m$以及$\int_\Omega\ln u_0\mathrm{d}x\geq -L$，其中$m,L>0$，则存在常数$m_*\left(m,L,\Omega,\chi,r,\mu,k,\alpha\right)>0$，使得对任意时刻$t>0$，有$\int_\Omega u\left(x,t\right)\mathrm{d}x\geq m_*$成立，即解具有质量持久性。

关键词

趋化性，弱奇异敏感性，质量持久性

Mass Persistence of Solutions to a Chemotaxis Model with Weakly Singular Sensitivity and Logistic Source

Honglin Zhang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: October 21, 2026; accepted: November 15, 2026; published: November 24, 2026

Abstract

This paper considers a parabolic-elliptic chemotaxis model with weakly singular sensitivity and

文章引用: 张鸿琳. 带弱奇异敏感和 Logistic 源的趋化模型解的质量持久性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 308-320.
DOI: 10.12677/aam.2026.1511452

Logistic source in a smooth bounded domain $\Omega\subset\mathbb{R}^n\left(n\geq 1\right)$:

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\chi\nabla\cdot\left(\dfrac{u}{v^{\alpha}}\nabla v\right)+ru-\mu u^k, & x\in\Omega,t>0\\ 0=\Delta v-v+u, & x\in\Omega,t>0 \end{cases}$$

where the parameters satisfy $\chi>0,\alpha\in\left(0,1\right),r>0,\mu>0$. We prove that under the conditions that either $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ and $k>2-2\alpha$, or $\alpha\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ and $k>1$, and under the assumption that global classical solutions to the system exist, if the nonnegative initial data $u_0\in C^0\left(\bar{\Omega}\right)$ satisfy $\int_\Omega u_0\leq m$ and $\int_\Omega \ln u_0\geq -L$ for $m,L>0$, there exists a positive constant $m_*\left(m,L,\Omega,\chi,r,\mu,k,\alpha\right)>0$ such that $\int_\Omega u\left(x,t\right)\mathrm{d}x\geq m_*$ holds for all $t>0$, which indicates that the solutions exhibit persistence of mass.

Keywords

Chemotaxis, Weakly Singular Sensitivity, Persistence of Mass

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

趋化性是指细胞或生物体沿化学信号浓度梯度进行定向运动的生命现象，在种群动态、肿瘤生长、胚胎发育、免疫反应等诸多生物过程中发挥着关键作用。20 世纪 70 年代初，Keller 和 Segel 在研究盘基网柄菌的聚集过程时建立了经典的趋化数学模型(即 Keller-Segel 模型)，为从偏微分方程角度定量刻画细胞扩散与趋化聚集的耦合机制提供了核心框架。半个多世纪以来，围绕该类模型经典解的全局存在性、有界性、持久性与渐近稳定性等核心问题，国内外学者开展了大量深入研究，取得了丰富的成果。读者可参阅综述文献[1]-[4]，以获取有关该模型的生物学背景与历史脉络、数学建模过程、从模型原型推导到动力学型方程所获得的既定研究成果，以及与相关化学趋化性模型相关的开放性问题的信息。

经典 Keller-Segel 模型采用常数趋化敏感性，而根据 Weber-Fechner 定律，生物对化学信号的感知灵敏度随信号浓度升高而降低，因此奇异敏感性函数更符合生物实际。其中，敏感性函数形如 $\frac{1}{v^{\alpha}}$ 的模型被广泛研究：当 $\alpha=1$ 时为强奇异敏感性，对应标准的对数感知律；当 $0<\alpha<1$ 时为弱奇异敏感性，其奇异性更弱，适用于描述灵敏度衰减较慢的趋化场景。

本文研究带有弱奇异敏感度与 Logistic 源的抛物－椭圆型趋化方程组：

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\chi\nabla\cdot\left(\dfrac{u}{v^{\alpha}}\nabla v\right)+ru-\mu u^k, & x\in\Omega,t>0\\ 0=\Delta v-v+u, & x\in\Omega,t>0\\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}=\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}=0, & x\in\Omega,t>0\\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right), & x\in\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\chi>0,\alpha\in\left(0,1\right),r>0,\mu>0$ 以及 $k>1$ 是给定的常数，并且 $\Omega\subset\mathbb{R}^n\left(n\geq 1\right)$ 是一个光滑有界区域。

相较于强奇异情形，弱奇异敏感性$(0<\alpha<1)$趋化系统的研究起步较晚，但迄今已取得诸多结果。在爆破与全局存在性方面，Zhang，Mu 和 Tu [5]发现当 k 相对于 α 和空间维数较小时，系统(1.1)可能发生有限时间爆破；Zhao [6]在二维区域中证明，当 $k=2$ 且 μ 充分大时，系统(1.1)存在全局有界经典解；随后 Kurt [7]将该结果拓展到空间维数 $n\geq 2$：当 $k=2$ 时，系统(1.1)存在全局经典解，并在附加条件 $\alpha<\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$ 且 μ 充分大的前提下得到全局有界性；后续 Le 与 Kurt [8]进一步优化了参数条件，在更宽松的参数条件下得到了解的全局有界性。在长时间动力学行为方面，最近 Kurt [9]针对 $k=2$ 的二次 Logistic 源抛物－椭圆弱奇异趋化系统，改进古典解全局存在性与有界性的已有结论，并且首次针对全局有界解开展长时间动力学研究，包括解的一致有界性、点态持续性以及渐近稳定性。在空间维数 $n\geq 2$ 的情形下证明当 μ 足够大时，系统(1.1)的解具有与初值无关的正上下界，且指数收敛到常数平衡态。

尽管弱奇异趋化系统的研究已取得诸多重要进展，但仍存在有待填补的理论空白。目前关于长时间行为的研究针对二次 Logistic 源$(k=2)$展开，对于一般阶数 $k>1$ 的 Logistic 源缺乏对解的长期生存能力的定量刻画。质量持久性作为衡量种群长期存续的核心性质，指解的总质量始终保持与时间无关的一致正下界、不会随时间衰减至零，对应生物学中物种不灭绝的特征。在强奇异敏感性模型中，质量持久性已有较为系统的研究，但弱奇异项带来的积分奇异性与一般增长阶的非线性耦合使得传统估计方法难以直接套用，一般 $k>1$ 下的质量持久性结论仍属空白。

值得注意的是，由于弱奇异敏感性带来的分析困难，目前关于系统(1.1)全局解的存在性仍受限于特定的参数条件和维数(详见注 1)。本文在系统(1.1)全局经典解存在的前提下，证明当初值满足总质量有上界且对数积分有下界时，解的总质量存在与时间无关的一致正下界，即解具有质量持久性。本文的主要结论如下：

定理 1.1. 假设(u,v)是系统(1.1)的全局经典解，$\Omega\subset\mathbb{R}^n(n\geq 1)$是一个光滑有界区域，常数$\alpha\in(0,1)$，$\chi>0,r>0,\mu>0$。若$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$且$k>2-2\alpha$，或$\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)$且$k>1$，并且非负初值$u_0\in C^0(\bar{\Omega})$满足

$$\int_\Omega u_0\mathrm{d}x\leq m \text{ 和 } \int_\Omega \ln u_0\mathrm{d}x\geq -L,$$

其中 m,L 为正常数，则存在常数 $m_*(m,L,\Omega,\chi,r,\mu,k,\alpha)>0$ 使得系统(1.1)的全局经典解 $(u,v)\in C^{2,1}(\bar{\Omega}\times[0,\infty))\times C^{2,0}(\bar{\Omega}\times(0,\infty))$ 对所有 $t>0$ 均有

$$\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x\geq m_*$$

注 1. 本文所有结论均以系统存在全局经典解为前提。针对弱奇异项$\alpha\in(0,1)$：当$n=1$、$k>1$且μ充分大时，由文献[10]的论证思路可得系统存在全局有界经典解；对于$n\geq 2$，在二次 Logistic 源即$k=2$且μ充分大的条件下，全局有界经典解的存在性见文献[9]。本文定理 1.1 针对更一般的$k>1$情形给出了质量持久性结论，为未来在更宽泛参数下证明全局解存在性后的动力学分析提供了理论储备。

注 2. 与现有研究相比，本文得到如下两方面结果：其一，将弱奇异趋化系统质量持久性的研究从二次 Logistic 源($k=2$)推广至一般阶，拓宽了理论适用范围，为描述不同增殖机制下的种群长期存续提供了理论依据；其二，在方法上，本文通过构造“对数积分－质量积分”组合泛函，结合弱奇异梯度项的分段精细估计(针对$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$、$\alpha=\frac{1}{2}$和$\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$三种情形分别讨论)，建立了适用于一般增长阶的质量下界分析框架，并通过构造无穷时间序列与逐段质量下界估计完成证明，为同类弱奇异系统的长时间行为研究提供了新的方法参考。此外，从生物学意义而言，α 刻画趋化敏感性的衰减速率，k 表征内部竞争

强度。本文的参数条件表明：当趋化衰减较慢($\alpha<\frac{1}{2}$，聚集作用较强)时，需要更强的内部竞争(即要求$k>2-2\alpha$)以抑制聚集；当衰减较快$\left(\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)\right)$时，常规竞争强度$(k>1)$即可维持种群的持久性。

2. 预备知识

我们先提出总质量的演化规律及上限估计值，这些结果将用于后续分析。

引理 2.1. 系统(1.1)在非负初始数据u_0下的任何全局经典解，对于所有$t>0$有：

并且总质量满足一致上界

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u=r\int_\Omega u-\mu\int_\Omega u^k \tag{2.1}$$

$$\int_\Omega u\le m^*:=\max\left\{\int_\Omega u_0,|\Omega|\left(\frac{r}{\mu}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right\}. \tag{2.2}$$

对任意$t_0\ge 0$和$T>0$，有：

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega u^k\le\frac{(rT+1)m^*}{\mu} \tag{2.3}$$

证明。将系统(1.1)的第一个方程关于$x\in\Omega$积分，可以直接得到等式(2.1)。根据 Hölder 不等式：$\left(\int_\Omega u\right)^k\le|\Omega|^{k-1}\int_\Omega u^k$，将其代入(2.1)得到$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u\le r\int_\Omega u-\frac{\mu}{|\Omega|^{k-1}}\left(\int_\Omega u\right)^k$。结合假设$\int_\Omega u_0\le m$，(2.2)可由 ODE 比较原理得到。

将(2.1)关于时间从t_0到t_0+T积分，结合(2.2)和u的非负性，我们有：

$$\begin{aligned}\mu\int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega u^k&=r\int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega u-\int_\Omega u(\cdot,t_0+T)+\int_\Omega u(\cdot,t_0)\\&\le r\int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega u+\int_\Omega u(\cdot,t_0)\\&\le rTm^*+m^*\end{aligned}$$

整理后可得到(2.3)。

引理 2.2. 设$T>0,J>0,t_0\ge 0$，则系统(1.1)的任意非负全局经典解均满足：

$$\left|\left\{t\in(t_0,t_0+T)\,|\int_\Omega u^k(x,t)\mathrm{d}x>J\right\}\right|\le\frac{(rT+1)m^*}{\mu J}, \tag{2.4}$$

其中m^*由(2.2)给出。

证明。记

$$S:=\left\{t\in(t_0,t_0+T)\,|\int_\Omega u^k(x,t)\mathrm{d}x>J\right\}$$

我们有：

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega u^k\ge\int_S\int_\Omega u^k(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ge|S|\cdot J$$

结合(2.3)可直接推出(2.4)。

下面推导对数积分泛函不等式，该估计是处理弱奇异项的核心工具。

引理 2.3. 设(u,v)是系统(1.1)的全局经典解，其中参数满足

$$\begin{cases} k>1, & \alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right), \\ k>2-2\alpha, & \alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

则对任意 $\varepsilon_0\in(0,1)$，存在常数 $F=F(\alpha,k,\varepsilon_0)>0$，使得下述奇异梯度积分估计成立：

$$\int_\Omega v^{-2\alpha}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\le\varepsilon_0|\Omega|+F\int_\Omega u^k\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

其中 $F=F(\alpha,k,\varepsilon_0)$ 定义如下：

$$F=F(\alpha,k,\varepsilon_0)=\begin{cases} \frac{1}{2\alpha-1}\left[(2\alpha-1)\varepsilon_0\right]^{\frac{k-2+2\alpha}{2\alpha-2}}, \text{对于 } \alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right), \\ \frac{(2-2\alpha)^{2\alpha-2}}{(1-2\alpha)^{2\alpha}}\left[\frac{(1-2\alpha)^{2\alpha-2}\varepsilon_0}{(2-2\alpha)^{2\alpha-2}}\right]^{\frac{k-2+2\alpha}{2\alpha-2}}, \text{对于 } \alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right), \\ C_0^{2k}\varepsilon_0^{1-2k}+\varepsilon_0+C_0^{\frac{1}{k-1}}\varepsilon_0^{\frac{1}{k-1}}, \text{对于 } \alpha=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

其中当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，$C_0>0$ 为仅依赖于 k 的正常数，详见证明。

证明。当 $\alpha\ne\frac{1}{2}$ 时，将系统(1.1)的第二个方程乘以 $v^{1-2\alpha}$，再关于 $x\in\Omega$ 积分，可以得到

$$\int_\Omega v^{-2\alpha}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha-1}\int_\Omega v^{2-2\alpha}\mathrm{d}x-\frac{1}{2\alpha-1}\int_\Omega uv^{1-2\alpha}\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

情形 1：$\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

此时 $\frac{1}{2\alpha-1}>0$ 且 $u,v\ge0$，结合(2.6)，对任意小的 $\varepsilon_1>0$，应用 Young 不等式，我们有

$$\int_\Omega v^{-2\alpha}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{2\alpha-1}\int_\Omega v^{2-2\alpha}\mathrm{d}x\le\frac{1}{2\alpha-1}\left(\varepsilon_1|\Omega|+\varepsilon_1^{\frac{k-2+2\alpha}{2\alpha-2}}\int_\Omega v^k\mathrm{d}x\right).$$

由文献[7]中的结论可知：对任意指数 $p\ge1$，有 $\int_\Omega v^p\mathrm{d}x\le\int_\Omega u^p\mathrm{d}x$，进而可以得到：

$$\int_\Omega v^{-2\alpha}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{2\alpha-1}\left(\varepsilon_1|\Omega|+\varepsilon_1^{\frac{k-2+2\alpha}{2\alpha-2}}\int_\Omega u^k\mathrm{d}x\right).$$

令 $\varepsilon_1=(2\alpha-1)\varepsilon_0$，代入上式可推出：

$$\int_\Omega v^{-2\alpha}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\le\varepsilon_0|\Omega|+\frac{1}{2\alpha-1}\left[(2\alpha-1)\varepsilon_0\right]^{\frac{k-2+2\alpha}{2\alpha-2}}\int_\Omega u^k\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

情形 2：$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$

此时 $\frac{1}{2\alpha-1}<0$。应用 Young 不等式，我们有

$$-\frac{1}{2\alpha-1}\int_\Omega uv^{1-2\alpha}\mathrm{d}x\le\frac{1}{1-2\alpha}\int_\Omega v^{2-2\alpha}\mathrm{d}x+\frac{(2-2\alpha)^{2\alpha-2}}{(1-2\alpha)^{2\alpha}}\int_\Omega u^{2-2\alpha}\mathrm{d}x.$$

将上式代入(2.6)中，对任意小的 $\varepsilon_2>0$，再次应用 Young 不等式可得到：

$$\int_\Omega v^{-2\alpha}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{(2-2\alpha)^{2\alpha-2}}{(1-2\alpha)^{2\alpha}}\int_\Omega u^{2-2\alpha}\mathrm{d}x \le \frac{(2-2\alpha)^{2\alpha-2}}{(1-2\alpha)^{2\alpha}}\left(\varepsilon_2|\Omega| + \varepsilon_2^{\frac{k-2+2\alpha}{2\alpha-2}}\int_\Omega u^k\mathrm{d}x\right).$$

令 $\varepsilon_2 = \dfrac{(1-2\alpha)^{2\alpha}}{(2-2\alpha)^{2\alpha-2}}\varepsilon_0$，代入上式可推出：

$$\int_\Omega v^{-2\alpha}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \le \varepsilon_0|\Omega| + \frac{(2-2\alpha)^{2\alpha-2}}{(1-2\alpha)^{2\alpha}}\left[\frac{(1-2\alpha)^{2\alpha}}{(2-2\alpha)^{2\alpha-2}}\varepsilon_0\right]^{\frac{k-2+2\alpha}{2\alpha-2}}\int_\Omega u^k\mathrm{d}x \tag{2.8}$$

情形 3：$\alpha = \dfrac{1}{2}$

当 $\alpha = \dfrac{1}{2}$ 时，将系统(1.1)的第二个方程乘以 $\ln v$，再关于 $x\in\Omega$ 积分，可以得到：

$$\int_\Omega \frac{|\nabla v|^2}{v}\mathrm{d}x = -\int_\Omega v\ln v + \int_\Omega u\ln v$$

对于 $0<v<1$，存在常数 $C_1>0$，使得

$$-v\ln v \le C_1 v^{\frac{1}{2}}$$

对于 $v>1$，由于 $k>1$，函数 $\dfrac{\ln v}{v^{k-1}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有上界，因而存在仅依赖 k 的常数 $C_2>0$，满足

$$\ln v \le C_2 v^{k-1}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\nabla v|^2}{v}\mathrm{d}x &= -\int_\Omega v\ln v + \int_\Omega u\ln v\\ &\le \int_{\{v<1\}} v\ln\frac{1}{v} + \int_{\{v>1\}} u\ln v\\ &\le \int_{\{v<1\}} v\frac{C_1}{v^{\frac{1}{2}}} + \int_{\{v>1\}} C_2 u v^{k-1}\\ &\le C_1\int_\Omega v^{\frac{1}{2}} + C_2\int_\Omega u v^{k-1}\end{aligned}$$

记 $C_0 = \max\{C_1, C_2\}$，则 $C_0>0$ 是仅依赖于 k 的常数，于是

$$\int_\Omega \frac{|\nabla v|^2}{v} \le C_0\int_\Omega v^{\frac{1}{2}} + C_0\int_\Omega u v^{k-1}$$

再次应用文献 6 中已有结论：对任意指数 $p\ge 1$，有 $\int_\Omega v^p\mathrm{d}x \le \int_\Omega u^p\mathrm{d}x$，以及对任意小的 $\varepsilon_3>0$，再次应用 Young 不等式可得到：

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\nabla v|^2}{v} &\le C_0\left(\varepsilon_3|\Omega| + \varepsilon_3^{1-2k}\int_\Omega v^k\right) + C_0\left(\varepsilon_3\int_\Omega u^k + \varepsilon_3^{\frac{1}{k-1}}\int_\Omega v^k\right)\\ &\le C_0\varepsilon_3|\Omega| + C_0\left(\varepsilon_3^{1-2k} + \varepsilon_3 + \varepsilon_3^{\frac{1}{k-1}}\right)\int_\Omega u^k.\end{aligned}$$

令 $C_0\varepsilon_3=\varepsilon_0$，即 $\varepsilon_3=\dfrac{\varepsilon_0}{C_0}$，将其带入上式，可以得到：

$$\int_\Omega \frac{|\nabla v|^2}{v}\le \varepsilon_0|\Omega|+\left(C_0^{2k}\varepsilon_0^{1-2k}+\varepsilon_0+C_0^{\frac{k}{k-1}}\varepsilon_0^{-\frac{1}{k-1}}\right)\int_\Omega u^k. \tag{2.9}$$

结合(2.7)，(2.8)，(2.9)以及 F 的定义，即可推出(2.5)。

引理 2.4. 设 (u,v) 是系统(1.1)的全局经典解，满足在 $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$ 中 $u>0$。则对所有 $t>0$，均有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_\Omega \ln u-A\int_\Omega u\right\}\ge\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-rA\int_\Omega u+B|\Omega| \tag{2.10}$$

其中 $A=\dfrac{\chi^2}{2\mu}F+\varepsilon_4^{\frac{1}{1-k}}>0, B=r-\dfrac{\chi^2}{2}\varepsilon_0-\mu\varepsilon_4>0$。这里，$F$ 和 ε_0 来自引理 2.3，$\varepsilon_4>0$ 为可以任意充分小的正常数。

证明。将系统(1.1)的第一个方程两端同时乘以 $\dfrac{1}{u}$，再关于 $x\in\Omega$ 积分，并结合 Young 不等式

$$\left|-\chi\int_\Omega\frac{\nabla u\cdot\nabla v}{uv^\alpha}\right|\le\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla u|^2}{u^2}+\frac{\chi^2}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla v|^2}{v^{2\alpha}}$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\ln u&=\int_\Omega\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\chi\int_\Omega\frac{\nabla u\cdot\nabla v}{uv^\alpha}+r|\Omega|-\mu\int_\Omega u^{k-1}\\&\ge\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{\chi^2}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla v|^2}{v^{2\alpha}}+r|\Omega|-\mu\int_\Omega u^{k-1}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

对任意正常数 $\varepsilon_4>0$，应用 Young 不等式，有

$$\int_\Omega u^{k-1}\le\varepsilon_4|\Omega|+\varepsilon_4^{\frac{1}{1-k}}\int_\Omega u^k \tag{2.12}$$

将(2.5)和(2.12)代入(2.11)，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\ln u&\ge\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{\chi^2}{2}\left(\varepsilon_0|\Omega|+F\int_\Omega u^k\right)+r|\Omega|-\mu\left(\varepsilon_4|\Omega|+\varepsilon_4^{\frac{1}{1-k}}\int_\Omega u^k\right)\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\left(\frac{\chi^2}{2}F+\mu\varepsilon_4^{\frac{1}{1-k}}\right)\int_\Omega u^k+\left(r-\frac{\chi^2}{2}\varepsilon_0-\mu\varepsilon_4\right)|\Omega|.\end{aligned}$$

结合(2.1)，整理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_\Omega\ln u-\left(\frac{\chi^2}{2\mu}F+\varepsilon_4^{\frac{1}{1-k}}\right)\int_\Omega u\right\}\ge\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-r\left(\frac{\chi^2}{2\mu}F+\varepsilon_4^{\frac{1}{1-k}}\right)\int_\Omega u+\left(r-\frac{\chi^2}{2}\varepsilon_0-\mu\varepsilon_4\right)|\Omega|.$$

再结合 A 和 B 的定义，即可推出(2.10)。

考虑到 ε_0 和 ε_4 的范围，我们着重说明：可选取足够小的 ε_0 和 ε_4 以确保 $B>0$ 成立。

3. 主要结果的证明

在给出定理 1.1 的严格证明之前，我们先阐述核心证明思路及辅助参数的选取逻辑。

本文的核心工具是引理 2.4 中建立的组合泛函 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega\ln u-A\int_\Omega u\right)$ 的不等式。由于该泛函没有直接的下

界，我们采用“时间序列构造法”证明分为以下三个层级：

1. 寻找质量达标时刻：利用泛函不等式和一致质量上界 m^*，证明在任意足够长的时间区间 (t_0, t_0+T) 内，总存在一个时间子集使得系统总质量 $\int_\Omega u \geq \eta$ (引理 3.2 和 3.3)。

2. 克服奇异项并建立对数下界：为了得到 $\ln u$ 的下界，需要控制 $\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2}$。我们利用引理 3.1 (测度下界)和引理 3.4 (时间测度上界)，结合文献[11]的对数型 Sobolev 不等式，证明存在一个趋于无穷的时间序列 $\{t_i\}$，使得 $\int_\Omega \ln u(\cdot, t_j) \geq -\bar{L}$ (引理 3.5)。

3. 利用 ODE 比较原理完成全局下界估计：在上述序列的基础上，利用质量演化方程(引理 2.1)的 ODE 性质，将离散时刻的下界延拓至所有时刻 $t>0$。

在证明定理 1.1 之前，我们先构造相关泛函沿时间序列的下界估计，借此找到一条趋于无穷的时间子列，使得函数 $\ln u$ 的积分始终具有一致下界。

引理 3.1. 设 $\eta>0, J>0$，非负函数 $\psi \in L^k(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega \psi \geq \eta \text{ 和 } \int_\Omega \psi^k \leq J \tag{3.1}$$

则

$$\left|\left\{x \in \Omega \mid \psi(x) \geq \frac{\eta}{2|\Omega|}\right\}\right| \geq \left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} J^{\frac{1}{1-k}}. \tag{3.2}$$

证明。给定任意 $\varepsilon>0$，利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi &= \int_{\{\psi<\varepsilon\}} \psi + \int_{\{\psi \geq \varepsilon\}} \psi \\ &\leq \varepsilon|\Omega| + \left(\int \psi^k\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left|\{\psi \geq \varepsilon\}\right|^{\frac{k-1}{k}}.\end{aligned}$$

根据(3.1)，可以得到

$$\eta \leq \varepsilon|\Omega| + J^{\frac{1}{k}} \left|\{\psi \geq \varepsilon\}\right|^{\frac{k-1}{k}}$$

进而设定 $\varepsilon := \frac{\eta}{2|\Omega|}$，可推断

$$\eta \leq J^{\frac{1}{k}} \left|\{\psi \geq \varepsilon\}\right|^{\frac{k-1}{k}}$$

进而可得(3.2)。

引理 3.2. 设 (u,v) 是系统(1.1)的非负全局经典解，并假设存在 $t_0 \geq 0$ 和 $L_0 \geq 0$ 使得

$$\int_\Omega \ln u(\cdot, t_0) \geq -L_0 \tag{3.3}$$

成立。若 $T>0$ 满足

$$T > \frac{L_0 + (A+1)m^*}{\frac{1}{2}B|\Omega|} \tag{3.4}$$

则可以得到

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq \frac{B|\Omega|}{2rA} \cdot T \tag{3.5}$$

其中 m^* 由引理 2.1 给出。

证明。忽略(2.10)式右侧的第一项，对所得不等式进行积分，可得

$$\int_\Omega \ln u(\cdot,t) - A\int_\Omega u(\cdot,t) \geq \int_\Omega \ln u(\cdot,t_0) - A\int_\Omega u(\cdot,t_0) + (t-t_0)B|\Omega| - rA\int_{t_0}^t \int_\Omega u.$$

令 $t = t_0 + T$，则有

$$\begin{aligned} rA\int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega u &\geq -\int_\Omega \ln u(\cdot,t_0+T) + A\int_\Omega u(\cdot,t_0+T) + \int_\Omega \ln u(\cdot,t_0) \\ &\quad - A\int_\Omega u(\cdot,t_0) + B|\Omega|T \\ &\geq -m^* - L_0 - Am^* + B|\Omega|T \\ &= B|\Omega|T - \left[L_0 + (A+1)m^*\right] \end{aligned}$$

结合 $L_0 + (A+1)m^* < \dfrac{B|\Omega|}{2}\cdot T$，证明完成。

引理 3.3. 设 (u,v) 是系统(1.1)的非负全局经典解，并假设存在 $t_0 \geq 0, L_0 > 0$ 和 $T > 0$ 使得(3.3)和(3.4)成立，那么定义

$$\eta := \min\left\{\frac{B|\Omega|}{4rA}, m^*\right\} \tag{3.6}$$

我们有

$$\left|\left\{t \in (t_0, t_0+T) \mid \int_\Omega u(\cdot,t) \geq \eta\right\}\right| \geq \frac{\eta T}{m^*}. \tag{3.7}$$

证明。定义时间集合 $S := \left\{t \in (t_0, t_0+T) \mid \int_\Omega u(\cdot,t)\mathrm{d}x \geq \eta\right\}$，显然有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega u &= \int_S \int_\Omega u + \int_{(t_0,t_0+T)\setminus S}\int_\Omega u \\ &\leq m^*|S| + \eta T \end{aligned}$$

结合引理 3.2，可估计

$$m^*|S| \geq \frac{B|\Omega|}{2rA}\cdot T - \eta T$$

再根据 η 的定义，这等价于(3.7)。

引理 3.4. 设 (u,v) 是系统(1.1)的非负全局经典解，其中 $t_0 \geq 0$ 且 $L_0 > 0$。对于任意 $M > 0$ 和 $T > 0$，可以得到

$$\left|\left\{t \in (t_0, t_0+T) \mid \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2(\cdot,t)} > M\right\}\right| \leq \frac{2(rAT + A + 1)m^* + 2L_0}{M}, \tag{3.8}$$

其中 m^* 和 A 的定义分别见式(2.2)和(2.10)。

证明。将(2.10)关于时间从 t_0 到 t_0+T 积分，结合 $B > 0$，我们有：

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \leq rA\int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega u + \int_\Omega \ln u(\cdot,t_0+T) - \int_\Omega \ln u(\cdot,t_0) - A\int_\Omega u(\cdot,t_0+T) + A\int_\Omega u(\cdot,t_0)$$

应用引理 2.1，式(3.3)以及 u 的非负性，可以推导出

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \le rAm^*T + m^* + L_0 + Am^*,$$

其中 $\int_\Omega \ln u(\cdot,t_0+T) \le \int_\Omega u(\cdot,t_0+T) \le m^*$。由此定义时间集合

$$S := \left\{ t \in (t_0, t_0+T) \,|\, \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2(\cdot,t)} > M \right\}.$$

根据 S 的定义，我们有

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2(\cdot,t)} \ge \int_S \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2(\cdot,t)} \ge M \cdot |S|.$$

将上述不等式联立即可得到式(3.8)。

引理 3.5. 设 (u,v) 是系统(1.1)的非负全局经典解， $m>0, L>0$。则存在正常数 $\bar{L} \equiv \bar{L}(\bar{m}, L, \Omega, \chi, r, \mu, k, \alpha)$ 和 $T = T(m, L, \Omega, \chi, r, \mu, k, \alpha)$ 使得以下条件成立：若 $u_0 \in C^0(\bar{\Omega})$ 是一个非负函数且满足

$$\int_\Omega u_0 \mathrm{d}x \le m \text{ 和 } \int_\Omega \ln u_0 \mathrm{d}x \ge -L, \tag{3.9}$$

则存在一个无界递增时间序列 $\{t_j\}_{j\in N} \subset (0,\infty)$ 满足 $t_{j+1} < t_j + T$，且对于所有 $j \in N$ 有：

$$\int_\Omega \ln u(\cdot,t_j) \mathrm{d}x \ge -\bar{L}^- \tag{3.10}$$

证明。根据引理 2.1 确定上界 $m^* = \max\left\{ \int_\Omega u_0, |\Omega| \left(\frac{r}{\mu}\right)^{\frac{1}{k-1}} \right\}$，这确保对于所有 $t>0$ 有 $\int_\Omega u(\cdot,t)\mathrm{d}x \le m^*$。

记 $B = r - \frac{\chi^2 \varepsilon_0}{2} - \mu\varepsilon_4 > 0$ 是来自引理 2.4 的正常数，并定义

$$\eta := \min\left\{ \frac{B|\Omega|}{4rA}, m^* \right\}$$

其中 $A>0$ 是来自引理 2.4 的常数。随后选取正常数 $J>0$ 和 $M>0$，使其满足

$$\frac{rm^*}{\mu J} < \frac{\eta}{4m^*}$$

和

$$\frac{2rAm^*}{M} < \frac{\eta}{8m^*}$$

令

$$\delta := \frac{\eta}{2|\Omega|}$$

以及

$$\varepsilon := \left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} J^{\frac{1}{1-k}}$$

设 $C(\varepsilon)$ 是仅依赖于 ε 的正常数，参见文献[11]，我们定义

$$\bar{L} := \max\left\{L, -|\Omega|\cdot\ln\delta + \sqrt{C(\varepsilon)|\Omega|\cdot M}\right\}$$

并选取 $t>0$ 足够大以满足

$$\frac{2(rAT+A+1)m^* + 2\bar{L}}{M} < \frac{\eta T}{8m^*}$$

$$\frac{m^*}{\mu J} < \frac{\eta T}{4m^*}$$

以及

$$T > \frac{\bar{t} + (A+1)m^*}{\frac{1}{2}B|\Omega|}.$$

下面采用数学归纳法构造序列 $\{t_j\}$。对于基本情况，令 $t_1=0$。根据假设 $\int_\Omega \ln u(\cdot,t_1)\mathrm{d}x = \int_\Omega \ln u_0 \mathrm{d}x \geq -L \geq -\bar{L}$，该结论在 $j=1$ 时成立。假设存在某些 $j\in N$，使得存在 $t_j>0$ 满足 $\int_\Omega \ln u(\cdot,t_j) \geq -\bar{L}$。我们将证明存在 $t_{j+1}\in\left(t_j+\frac{\eta T}{4m^*}, t_j\mp T\right)$ 满足 $\int_\Omega \ln u(\cdot,t_{j+1}) \geq -\bar{L}$。

在区间 (t_j, t_j+T) 上定义三组时间集合：

$$S_1 := \left\{t\in(t_j,t_j+T) \mid \int_\Omega u(\cdot,t)\mathrm{d}x \geq \eta\right\}$$

$$S_2 := \left\{t\in(t_j,t_j+T) \mid \int_\Omega u^k(\cdot,t)\mathrm{d}x \leq J\right\},$$

$$S_3 := \left\{t\in(t_j,t_j+T) \mid \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2(\cdot,t)} \leq M\right\}$$

结合归纳假设与引理 3.2，可以得到

$$|S_1| > \frac{\eta T}{m^*}$$

利用引理 2.2，以及 J 的选取条件，可以得到

$$|S_2| \geq T - \frac{rm^*}{\mu J}\cdot T - \frac{m^*}{\mu J}$$

$$> \left(1-\frac{\eta}{2m^*}\right)\cdot T$$

同理结合引理 3.4 以及 M,T 的选取条件

$$|S_3| \geq T - \frac{2rm^*}{M}\cdot T - \frac{2(A+1)m^* + 2\bar{L}}{M}$$

$$> \left(1-\frac{\eta}{4m^*}\right)\cdot T$$

根据容斥原理，计算交集测度

$$|S_1\cap S_2| > \frac{\eta T}{m^*} + \left(1-\frac{\eta}{2m^*}\right)\cdot T - T = \frac{\eta T}{2m^*}$$

$$|S_1\cap S_2\cap S_3| > \frac{\eta T}{2m^*} + \left(1-\frac{\eta}{4m^*}\right)\cdot T - T = \frac{\eta T}{4m^*}$$

因此，得出集合 $S_1\cap S_2\cap S_3\cap\left(t_j+\frac{\eta T}{4m^*},t_j+T\right)$ 具有正测度，从而非空。任取一点 $t\in S_1\cap S_2\cap S_3$，由于 $t\in S_1$ 和 $t\in S_2$，再结合引理 3.1 以及 δ 和 ε 的定义，我们可以得到

$$\left|\left\{x\in\Omega\,|\,\varphi(x)\geq\delta\right\}\right|\geq\varepsilon.$$

根据文献[11]给出的积分不等式

$$\int_\Omega\ln u(\cdot,t)\geq|\Omega|\cdot\ln\delta-\sqrt{C(\varepsilon)|\Omega|\cdot\int_\Omega\frac{|\nabla u(\cdot,t)|^2}{u^2(\cdot,t)}},$$

又由于 $t\in S_3$，即可得出

$$\int_\Omega\ln u(\cdot,t)\geq|\Omega|\cdot\ln\delta-|\Omega|\cdot\ln\delta-\sqrt{C(\varepsilon)|\Omega|\cdot M}$$

因此，我们从这个非空交集中任意选取一个 t_{j+1}。根据构造关系，$t_{j+1}<t_j+T$ 并且 $\int_\Omega\ln u(\cdot,t_{j+1})\geq-\bar{L}$，从而完成归纳步骤。最后，由于对所有 $j\in N$ 均有 $t_{j+1}-t_j>\frac{\eta T}{4m^*}>0$，序列 $\{t_j\}$ 严格递增且无界。引理 3.5 证明完毕。

最后，将引理 3.3 和引理 3.5 结合就可以完成定理的证明。

定理 1.1 的证明：设任意正常数 $m>0,L>0$，设 (u,v) 是系统(1.1)的非负全局经典解，其非负初值 $u_0\in C^0(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega u_0\leq m\text{ 和 }\int_\Omega\ln u_0\geq-L.$$

根据引理 3.5，可得正常数 $\bar{L}>0$ 且 $T>0$，同时存在时间序列 $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset(0,\infty)$，满足当 $j\to\infty$ 时 $t_j\to\infty$，$t_j<t_{j+1}<t_j+T$，以及对于所有 $j\in\mathbb{N}$ 有

$$\int_\Omega\ln u(\cdot,t_j)\geq-\bar{L}$$

若有必要可以扩大常数 T 使得引理 3.2 中的条件(3.4)在取 $L_0:=\bar{L}$ 时成立；该常数仅由 $\bar{L}$ 决定，并不影响序列的存在性。对任意自然数 $j\in\mathbb{N}$，取 $t_0:=t_j$ 和 $L_0:=\bar{L}$，在区间 (t_j,t_j+T) 上应用引理 3.3.则存在时刻 $\tilde{t}_j\in(t_j,t_j+T)$ 满足

$$\int_\Omega u(\cdot,\tilde{t}_j)\geq\eta\tag{3.11}$$

其中

$$\eta:=\min\left\{\frac{B|\Omega|}{4rA},m^*\right\}$$

是(3.6)中的常数，m^* 是引理 2.1 中给出的一致质量上界。由 $t_{j+1}>t_j$，$\tilde{t}_{j+1}\in(t_{j+1},t_{j+1}+T)$ 和 $\tilde{t}_j\in(t_j,t_j+T)$，可以得到对所有 $j\in\mathbb{N}$，有 $\tilde{t}_j<\tilde{t}_{j+1}$。

由引理 2.1 可知，对任意 $t>0$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u(\cdot,t)\leq r\int_\Omega u(\cdot,t)$$

结合(3.11)可推导出：对任意自然数 j，所有 $t\in[0,\tilde{t}_j)$，有

$$\int_\Omega u(\cdot,t)\geq\left(\int_\Omega u(\cdot,\tilde{t}_j)\right)\cdot\mathrm{e}^{-r(\tilde{t}_j-t)}\geq\eta\mathrm{e}^{-r(\tilde{t}_j-t)}\tag{3.12}$$

特别地，对所有 $t\in\left[0,\tilde{t}_1\right)$，有

$$\int_\Omega u\left(\cdot,t\right)\geq \eta \mathrm{e}^{-r\tilde{t}_1} \tag{3.13}$$

下面考虑 $j\geq 2$ 情形。由引理 3.5 可知 $t_j<t_{j-1}+T$。又 $\tilde{t}_{j-1}>t_{j-1}$，因此 $t_j<\tilde{t}_{j-1}+T$。结合 $\tilde{t}_j<t_j+T$ 可得对任意 $j\geq 2$ 成立 $\tilde{t}_j<\tilde{t}_{j-1}+2T$。再利用式(3.12)，对所有 $t\in\left[\tilde{t}_{j-1},\tilde{t}_j\right)$，有

$$\int_\Omega u\left(\cdot,t\right)\geq \eta \mathrm{e}^{-2rT}$$

由于 $j\to\infty$ 时 $\tilde{t}_j\to\infty$，任意时刻 $t>0$ 要么落在 $\left[0,\tilde{t}_1\right)$ 区间内，要么属于某一段区间 $\left[\tilde{J}_{j-1},\tilde{t}_j\right)$ 其中 $j\geq 2$。这样就可以得到对所有时间 $t>0$ 有

$$\int_\Omega u\left(x,t\right)\mathrm{d}x\geq m_*$$

其中常数 $m_*:=\min\left\{\eta \mathrm{e}^{-r\tilde{t}_1},\eta \mathrm{e}^{-2rT}\right\}$。至此定理 1.1 证明完毕。

参考文献

[1] Bellomo, N., Bellouquid, A., Tao, Y. and Winkler, M. (2015) Toward a Mathematical Theory of Keller-Segel Models of Pattern Formation in Biological Tissues. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **25**, 1663-1763. https://doi.org/10.1142/s021820251550044x

[2] Hillen, T. and Painter, K.J. (2009) A User's Guide to PDE Models for Chemotaxis. *Journal of Mathematical Biology*, **58**, 183-217. https://doi.org/10.1007/s00285-008-0201-3

[3] Horstmann, D. (2004) From 1970 until Present: The Keller-Segel Model in Chemotaxis. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **106**, 51-69.

[4] Painter, K.J. (2019) Mathematical Models for Chemotaxis and Their Applications in Self-Organisation Phenomena. *Journal of Theoretical Biology*, **481**, 162-182. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2018.06.019

[5] Zhang, J., Mu, C. and Tu, X. (2023) Finite-Time Blow-Up of Solution for a Chemotaxis Model with Singular Sensitivity and Logistic Source. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **74**, Article No. 229. https://doi.org/10.1007/s00033-023-02125-3

[6] Zhao, X. (2023) Boundedness in a Logistic Chemotaxis System with Weakly Singular Sensitivity in Dimension Two. *Nonlinearity*, **36**, 3909-3938. https://doi.org/10.1088/1361-6544/acdb3b

[7] Kurt, H.I. (2025) Boundedness in a Chemotaxis System with Weak Singular Sensitivity and Logistic Kinetics in Any Dimensional Setting. *Journal of Differential Equations*, **416**, 1429-1461. https://doi.org/10.1016/j.jde.2024.10.027

[8] Le, M. and Kurt, H.I. (2025) Global Boundedness in a Chemotaxis-Growth System with Weak Singular Sensitivity in Any Dimensional Setting. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **86**, Article ID: 104392. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2025.104392

[9] Kurt, H.I. (2026) Large-Time Dynamics of Solutions in a Logistic Chemotaxis System with Weak Singular Sensitivity: Uniform Boundedness, Pointwise Persistence and Stability. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **52**, 255-292. https://doi.org/10.3934/dcds.2026052

[10] Zhao, X. (2023) Global Solvability in the Parabolic-Elliptic Chemotaxis System with Singular Sensitivity and Logistic Source. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **74**, 127-151. https://doi.org/10.21136/cmj.2023.0544-22

[11] Tao, Y. and Winkler, M. (2015) Persistence of Mass in a Chemotaxis System with Logistic Source. *Journal of Differential Equations*, **259**, 6142-6161. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.07.019