Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(11), 321-333
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511453

Hans汉斯

切换拓扑下离散多智能体系统连续丢包二分编队

蒋令阵*，李伟勋

天津职业技术师范大学理学院，天津

收稿日期：2026年10月21日；录用日期：2026年11月15日；发布日期：2026年11月24日

摘　要

针对切换有向符号拓扑与连续丢包并存的离散时间非线性多智能体系统，研究二分时变跟踪编队问题。利用结构平衡理论，经规范变换将正负边二分误差系统转化为无符号系统；以各链路独立有界时滞刻画连续丢包，构造公共Lyapunov-Krasovskii泛函，建立依赖丢包率与最大连续丢包次数的线性矩阵不等式(LMI)条件，得到适用于全部拓扑模式的统一反馈增益。仿真结果表明，拓扑持续切换且随机连续丢包下，所有跟随者均收敛至对应二分时变编队轨迹。

关键词

离散多智能体系统，切换有向符号拓扑，二分时变编队，连续丢包，公共Lyapunov-Krasovskii函数

Bipartite Formation of Discrete-Time Multi-Agent Systems under Switching Topologies and Consecutive Packet Loss

Lingzhen Jiang*, Weixun Li

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: October 21, 2026; accepted: November 15, 2026; published: November 24, 2026

Abstract

The bipartite time-varying formation tracking problem is investigated for discrete-time nonlinear multi-agent systems with both switching signed directed topologies and consecutive packet loss. By

*通讯作者。

文章引用: 蒋令阵, 李伟勋. 切换拓扑下离散多智能体系统连续丢包二分编队[J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 321-333. DOI: 10.12677/aam.2026.1511453

leveraging structural balance theory, the bipartite error system with positive and negative edges is transformed into an unsigned system via a gauge transformation. Consecutive packet losses are characterized by independent bounded delays on each link. By constructing a common Lyapunov-Krasovskii functional, linear matrix inequality (LMI) conditions dependent on the packet loss rate and the maximum number of consecutive packet losses are established, thereby deriving a unified feedback gain applicable to all topology modes. Simulation results demonstrate that, under persistent topology switching and random consecutive packet losses, all followers converge to their corresponding bipartite time-varying formation trajectories.

Keywords

Discrete Multiagent System, Switching Signed Directed Topology, Bipartite Time-Varying Formation, Consecutive Packet Loss, Common Lyapunov-Krasovskii Functional

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

多智能体系统已广泛应用于无人机集群、移动机器人协作、智能交通等领域[1]。一致性[2] [3]跟踪旨在使跟随者在分布式协议下跟踪领导者状态。相较于连续时间系统，离散时间[4]系统更符合数字控制器与网络化系统的实际运行方式。

实际通信中，带宽受限、信道干扰等因素可导致数据连续多个采样周期丢失，控制器只能利用缓存的历史信息，形成连续丢包现象。Chen 等[5]针对有向拓扑下带连续丢包的离散时间多智能体系统一致性，采用缓存历史数据，利用最大连续丢包上界构造控制协议，给出了基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函的充分条件；Chen 等[6]在此基础上进一步考虑 Lipschitz 非线性，针对有向拓扑下离散时间非线性多智能体系统，采用 Bernoulli 随机变量描述通信状态，将连续丢失统一为有界时滞，给出与丢包率和最大连续丢包次数相关的 LMI 充分条件。

上述研究多关注普通一致性，Altafini 提出的结构平衡符号图理论将一致性推广至含合作与竞争关系的网络，即二分一致性[7] [8]。在此基础上，二分时变编队[9] [10]要求两个子群分别围绕领导者轨迹及其相反轨迹运动。实际通信拓扑还可能随时间切换，若某些拓扑不满足结构平衡性或不包含以领导者为根节点的有向生成树，系统将失去二分跟踪能力[11]。近年来，离散时间多智能体系统的协同控制已取得系列成果：文献[12] [13]分别针对高阶离散时间系统在时延与切换拓扑下的一致性、以及切换网络拓扑下的离散时间一致性问题给出了设计条件。闵海波等[14]对多个体协调控制问题进行了系统综述。已有成果多针对固定拓扑下的一致性问题，对通信丢包与拓扑切换并存情形下的二分编队跟踪研究尚不充分。

本研究围绕连续丢包与切换有向符号拓扑下离散时间非线性多智能体系统的二分跟踪编队问题展开探讨，设计了分布式编队控制协议并建立相应误差系统，利用公共 Lyapunov-Krasovskii 泛函推导系统实现二分跟踪编队的充分条件，并利用数值仿真验证该方法的可行性。

2. 预备知识

2.1. 图论基础

设跟随者间的通信拓扑在 M 个有向符号图间切换，定义切换信号 $\rho(k)\in\mathbb{M}\triangleq\{1,2,\cdots,M\}$，$\rho(k)=l$

表示第 k 步激活第 l 个通信拓扑：$G_s^{(l)}=\left(V,E^{(l)},\boldsymbol{A}_s^{(l)}\right)$，其中 $V=\{1,2,\cdots,N\}$ 为 N 个跟随者的节点集合，$\mathcal{N}_i=\left\{j\in V\mid (j,i)\in E^{(l)}\right\}$ 表示智能体 i 的邻居集。$\boldsymbol{A}_s^{(l)}=\left[a_{ij}^{s,(l)}\right]\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 为第 l 个模式下的符号邻接矩阵。若跟随者 i 可接收到 j 的信息，则 $a_{ij}^{s,(l)}\neq 0$，对角元 $a_{ii}^{s,(l)}=0$。$a_{ij}^{s,(l)}>0$ 表示二者为合作关系，$a_{ij}^{s,(l)}<0$ 表示竞争关系，否则 $a_{ij}^{s,(l)}=0$。

定义第 l 个模式下的边权值为 $w_{ij}^{(l)}=\left|a_{ij}^{s,(l)}\right|$，无符号权值矩阵为 $\boldsymbol{W}^{(l)}=\left[w_{ij}^{(l)}\right]$，对应的度矩阵为 $\boldsymbol{D}_w^{(l)}=\mathrm{diag}\left\{\sum_{j=1}^{N}w_{1j}^{(l)},\cdots,\sum_{j=1}^{N}w_{Nj}^{(l)}\right\}$。由此定义符号拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}_s^{(l)}=\boldsymbol{D}_w^{(l)}-\boldsymbol{A}_s^{(l)}$ 与无符号拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}_u^{(l)}=\boldsymbol{D}_w^{(l)}-\boldsymbol{W}^{(l)}$。$\boldsymbol{D}_0^{(l)}=\mathrm{diag}\left\{d_1^{(l)},d_2^{(l)},\cdots,d_N^{(l)}\right\}$ 为第 l 个模式下的领导者连接矩阵，若跟随者 i 可以接收到领导者的信息，则 $d_i^{(l)}>0$；否则，$d_i^{(l)}=0$。定义规范变换矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N\}$，中 $\sigma_i=1$ 表示第 i 个跟随者属于正子群，$\sigma_i=-1$ 表示第 i 个跟随者属于负子群。规范变换后的无符号增广矩阵为 $\boldsymbol{H}_u^{(l)}=\boldsymbol{L}_u^{(l)}+\boldsymbol{D}_0^{(l)}$。

2.2. 相关定义及假设

假设 1 离散非线性函数 $f(\boldsymbol{x})$ 满足全局 Lipschitz 条件，即存在常数 $\mu_d>0$，使得

$$\left\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\right\|\leq\mu_d\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right\|,\quad\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$$

假设 2 所有切换拓扑共享同一子群划分，即对任意模式 $l\in\mathbb{M}$，及任意有效通信边 (j,i)，均有 $\mathrm{sgn}\left(a_{ij}^{s,(l)}\right)=\sigma_i\sigma_j$，因此 $a_{ij}^{s,(l)}=\sigma_i\sigma_j\left|a_{ij}^{s,(l)}\right|$，矩阵形式可写为 $\boldsymbol{A}_s^{(l)}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{W}^{(l)}\boldsymbol{\Sigma}$，进一步可得 $\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{L}_s^{(l)}\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Sigma}\left[\boldsymbol{D}_w^{(l)}-\boldsymbol{A}_s^{(l)}\right]\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{D}_w^{(l)}-\boldsymbol{W}^{(l)}=\boldsymbol{L}_u^{(l)}$。

假设 3 对任意拓扑模式 $l\in\mathbb{M}$，增广通信图均包含以领导者为根节点的有向生成树，且各拓扑模式具有相同子群划分 $\boldsymbol{\sigma}$，故规范变换矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 对所有模式保持不变，$\boldsymbol{H}_u^{(l)}$ 的全部特征值均具有正实部。

假设 4 每条链路在自身任意长度为 $\omega+1$ 的时间窗口内通信状态至少出现一次 $\theta_{ij}(k)=1$，因此缓存数据的最大时滞不超过 ω。

定义 1 $h_i(k)\in\mathbb{R}^n$ 为时变编队偏移向量，$v_i(k)\in\mathbb{R}^m$ 为与其匹配的编队补偿输入，二者均为预先设计的有界信号。

3. 问题描述

考虑由 1 个领导者和 N 个跟随者组成的多智能体系统，领导者动力学模型为

$$\boldsymbol{x}_0(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0(k)+f\left(\boldsymbol{x}_0(k)\right)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0(k)\tag{1}$$

第 i 个跟随者动力学模型为

$$\boldsymbol{x}_i(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i(k)+f\left(\boldsymbol{x}_i(k)\right)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i(k),\ i=1,2,\cdots,N\tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{x}_0(k)\in\mathbb{R}^n$ 为领导者状态，$\boldsymbol{x}_i(k)\in\mathbb{R}^n$ 为第 i 个跟随者状态，$\boldsymbol{u}_0(k)$、$\boldsymbol{u}_i(k)\in\mathbb{R}^m$ 为控制输入，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为系统矩阵。

基于上述丢包模型，第 i 个智能体在时刻 k 实际获得的、来自邻居 j 的相对状态信息可表示为：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_j(k)=\theta_{ij}(k)\boldsymbol{x}_j(k)+\left[1-\theta_{ij}(k)\right]\boldsymbol{x}_j(k-\omega_k)\tag{3}$$

其中 $\theta_{ij}(k)\in\{0,1\}$ 为伯努利随机变量，$\theta_{ij}(k)=1$ 表示当前数据传输成功，$\theta_{ij}(k)=0$ 表示当前数据发生丢失，且有

$$\Pr\{\theta_{ij}(k)=0\}=r,\Pr\{\theta_{ij}(k)=1\}=1-r \tag{4}$$

其中 $r\in[0,1)$ 为丢包率， $\omega_k\in\{1,2,\cdots,\omega\}$ 为缓存数据滞后步数，各链路独立丢包。需要指出的是，缓存滞后步数 ω_k 由历史丢包事件 $\theta_{ij}(k-1),\theta_{ij}(k-2),\cdots$ 的连续失败次数决定；伯努利变量 $\theta_{ij}(k)$ 刻画丢包发生的随机性，而假设 4 的时间窗口保证 ω_k 以 ω 为上界，二者分别从概率统计与最坏情况两个互补的角度完整刻画了连续丢包现象。

定义 2 对任意允许的切换信号 $\rho(k)$，在连续丢包条件下，若多智能体系统(1)与(2)满足

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\|\boldsymbol{x}_i(k)-\sigma_i\boldsymbol{x}_0(k)-\boldsymbol{h}_i(k)\right\|=0 \tag{5}$$

则多智能体系统可实现均方二分时变跟踪编队。

4. 主要结果

定义第 i 个跟随者的目标状态为

$$\boldsymbol{x}_i^*(k)=\sigma_i\boldsymbol{x}_0(k)+\boldsymbol{h}_i(k) \tag{6}$$

为使目标状态 $\boldsymbol{x}_i^*(k)$ 满足与跟随者相同形式的动力学模型，引入有界编队前馈输入 $\boldsymbol{v}_i(k)$，并设计

$$\boldsymbol{h}_i(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_i(k)+f\left(\sigma_i\boldsymbol{x}_0(k)+\boldsymbol{h}_i(k)\right)-\sigma_i f\left(\boldsymbol{x}_0(k)\right)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_i(k) \tag{7}$$

由(1)、(6)和(7)可得

$$\boldsymbol{x}_i^*(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i^*(k)+f\left(\boldsymbol{x}_i^*(k)\right)+\boldsymbol{B}\left(\sigma_i\boldsymbol{u}_0(k)+\boldsymbol{v}_i(k)\right) \tag{8}$$

定义第 i 个跟随者的编队补偿状态为

$$\boldsymbol{q}_i(k)=\boldsymbol{x}_i(k)-\boldsymbol{h}_i(k) \tag{9}$$

由(9)，跟踪目标等价为

$$\boldsymbol{q}_i(k)\to\sigma_i\boldsymbol{x}_0(k) \tag{10}$$

切换模式 $\rho(k)=l$ 时，跟随者 (j,i) 之间的二分相对信号写为：

$$\boldsymbol{\Psi}_{ij}^{(l)}(k)=\operatorname{sgn}\left(a_{ij}^{s,(l)}\right)\boldsymbol{q}_j(k)-\boldsymbol{q}_i(k)=\sigma_i\sigma_j\left[\boldsymbol{x}_j(k)-\boldsymbol{h}_j(k)\right]-\left[\boldsymbol{x}_i(k)-\boldsymbol{h}_i(k)\right] \tag{11}$$

领导者与跟随者 i 之间的二分跟踪信号为

$$\boldsymbol{\Psi}_{i0}(k)=\sigma_i\boldsymbol{x}_0(k)-\boldsymbol{q}_i(k)=\sigma_i\boldsymbol{x}_0(k)-\boldsymbol{x}_i(k)+\boldsymbol{h}_i(k) \tag{12}$$

控制器实际获得的跟随者间信号 $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{ij}(k)$ 与领导者信号 $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{i0}(k)$ 由式(3)、(11)和(12)可写为：

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{ij}(k)=\theta(k)\boldsymbol{\Psi}_{ij}(k)+\left[1-\theta(k)\right]\boldsymbol{\Psi}_{ij}(k-\omega_k),\quad j\in\mathcal{N}_i\cup\{0\}$$

则设计控制协议为

$$\boldsymbol{u}_i(k)=\boldsymbol{v}_i(k)+\sigma_i\boldsymbol{u}_0(k)-\boldsymbol{K}\left[\sum_{j=1}^{N}\left|a_{ij}^{s,(\rho(k))}\right|\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{ij}(k)+d_i^{(\rho(k))}\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{i0}(k)\right] \tag{13}$$

其中： $\boldsymbol{K}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 为待设计的公共反馈增益。

定义第 i 个跟随者的二分时变编队误差为

$$\boldsymbol{z}_i(k)=\sigma_i\boldsymbol{x}_0(k)+\boldsymbol{h}_i(k)-\boldsymbol{x}_i(k) \tag{14}$$

当 $\boldsymbol{z}_i(k)\to0$，有 $\boldsymbol{x}_i(k)\to\sigma_i\boldsymbol{x}_0(k)+\boldsymbol{h}_i(k)$。因此，问题等价于证明所有误差 $\boldsymbol{z}_i(k)$ 收敛到零。

由(9)可得

$$\boldsymbol{z}_i(k)=\sigma_i\boldsymbol{x}_0(k)-\boldsymbol{q}_i(k) \tag{15}$$

将控制协议(13)代入误差方程(14)，可得

$$\boldsymbol{z}_i(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_i(k)+\boldsymbol{\varphi}_i(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\left[\sum_{j=1}^{N}\left|a_{ij}^{s_i(\rho(k))}\right|\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{ij}(k)+d_i^{(\rho(k))}\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{i0}(k)\right] \tag{16}$$

其中

$$\boldsymbol{\varphi}_i(k)=f\left(\sigma_i\boldsymbol{x}_0(k)+\boldsymbol{h}_i(k)\right)-f\left(\boldsymbol{x}_i(k)\right) \tag{17}$$

进一步可得，

$$\boldsymbol{z}_i(k)-\sigma_i\sigma_j\boldsymbol{z}_j(k)=\sigma_i\sigma_j\boldsymbol{q}_j(k)-\boldsymbol{q}_i(k)=\boldsymbol{\Psi}_{ij}^{(\rho(k))}(k) \tag{18}$$

且

$$\boldsymbol{\Psi}_{i0}(k)=\boldsymbol{z}_i(k) \tag{19}$$

定义规范变换误差

$$\bar{\boldsymbol{z}}_i(k)=\sigma_i\boldsymbol{z}_i(k) \tag{20}$$

对跟随者之间的二分相对信号，根据(19)有

$$\sigma_i\boldsymbol{\Psi}_{ij}^{(\rho(k))}(k)=\bar{\boldsymbol{z}}_i(k)-\bar{\boldsymbol{z}}_j(k) \tag{21}$$

对领导者跟踪信号，有

$$\sigma_i\boldsymbol{\Psi}_{i0}(k)=\bar{\boldsymbol{z}}_i(k) \tag{22}$$

经规范变换后，误差统一为普通一致性相对误差。定义全局误差为

$$\bar{\boldsymbol{z}}(k)=\mathrm{col}\left\{\bar{\boldsymbol{z}}_1(k),\bar{\boldsymbol{z}}_2(k),\cdots,\bar{\boldsymbol{z}}_N(k)\right\}$$

定义规范变换后的非线性误差项为 $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i(k)=\sigma_i\boldsymbol{\varphi}_i(k)$。由假设 1 及 $\sigma_i=\pm1$，可得

$$\left\|\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i(k)\right\|=\left\|\boldsymbol{\varphi}_i(k)\right\|\le\mu_d\left\|\bar{\boldsymbol{z}}_i(k)\right\| \tag{23}$$

将(24)写成矩阵形式为

$$\bar{\boldsymbol{G}}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k)\right)=\mathrm{col}\left\{\bar{\boldsymbol{\varphi}}_1(k),\bar{\boldsymbol{\varphi}}_2(k),\cdots,\bar{\boldsymbol{\varphi}}_N(k)\right\}$$

因此，

$$\bar{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k)\right)\bar{\boldsymbol{G}}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k)\right)\le\mu_d^2\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k)\bar{\boldsymbol{z}}(k) \tag{24}$$

定义当前成功接收数据对应的随机邻接矩阵为

$$\boldsymbol{W}_1^{(l)}(k)=\left[w_{ij}^{(l)}\theta_{ij}(k)\right] \tag{25}$$

当前成功数据对应的随机拉普拉斯矩阵为

$$\boldsymbol{L}_1^{(l)}(k)=\boldsymbol{D}_1^{w,(l)}(k)-\boldsymbol{W}_1^{(l)}(k) \tag{26}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_1^{w,(l)}(k)=\operatorname{diag}\left\{\sum_{j=1}^{N}w_{1j}^{(l)}\theta_{1j}(k),\cdots,\sum_{j=1}^{N}w_{Nj}^{(l)}\theta_{Nj}(k)\right\}.$$

当前成功接收领导者数据对应的连接矩阵为

$$\boldsymbol{D}_1^{(l)}(k)=\operatorname{diag}\left\{d_1^{(l)}\theta_{10}(k),\cdots,d_N^{(l)}\theta_{N0}(k)\right\} \tag{27}$$

类似地，定义使用缓存数据对应的随机邻接矩阵为

$$\boldsymbol{W}_2^{(l)}(k)=\left[w_{ij}^{(l)}\left(1-\theta_{ij}(k)\right)\right] \tag{28}$$

缓存数据对应的随机拉普拉斯矩阵为

$$\boldsymbol{L}_2^{(l)}(k)=\boldsymbol{D}_2^{w,(l)}(k)-\boldsymbol{W}_2^{(l)}(k) \tag{29}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_2^{w,(l)}(k)=\operatorname{diag}\left\{\sum_{j=1}^{N}w_{1j}^{(l)}\left(1-\theta_{1j}(k)\right),\cdots,\sum_{j=1}^{N}w_{Nj}^{(l)}\left(1-\theta_{Nj}(k)\right)\right\} \tag{30}$$

缓存领导者数据对应的连接矩阵为

$$\boldsymbol{D}_2^{(l)}(k)=\operatorname{diag}\left\{d_1^{(l)}\left(1-\theta_{10}(k)\right),\cdots,d_N^{(l)}\left(1-\theta_{N0}(k)\right)\right\} \tag{31}$$

根据(21)和(22)，当 $\rho(k)=l$ 时，规范变换后的整体闭环误差系统为

$$\bar{\boldsymbol{z}}(k+1)=\boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{z}}(k)+\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{z}}(k-\omega_k)+\bar{\boldsymbol{G}}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k)\right) \tag{32}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{L}_1^{(l)}(k)+\boldsymbol{D}_1^{(l)}(k)\right)\otimes\boldsymbol{BK}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\left(\boldsymbol{L}_2^{(l)}(k)+\boldsymbol{D}_2^{(l)}(k)\right)\otimes\boldsymbol{BK}$$

由于 $W_1^{(l)}$ 与 $W_2^{(l)}$ 均是关于 $\theta_{ij}(k)$ 的线性函数，又由(4)知，对任意链路 (i,j) 有 $\mathbb{E}\left[\theta_{ij}(k)\right]=1-r$，以及 $\mathbb{E}\left[1-\theta_{ij}(k)\right]=r$，于是对随机拉普拉斯与连接矩阵逐元素取期望，有

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{L}_1^{(l)}(k)+\boldsymbol{D}_1^{(l)}(k)\right]=(1-r)\boldsymbol{H}_u^{(l)},\quad \mathbb{E}\left[\boldsymbol{L}_2^{(l)}(k)+\boldsymbol{D}_2^{(l)}(k)\right]=r\boldsymbol{H}_u^{(l)} \tag{33}$$

因此，第 l 个模式下对应的平均闭环矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}+(1-r)\boldsymbol{H}_u^{(l)}\otimes\boldsymbol{BK},\quad \bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}=r\boldsymbol{H}_u^{(l)}\otimes\boldsymbol{BK} \tag{34}$$

定理1 若假设1至假设4成立，存在公共矩阵 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}>0$，$\boldsymbol{Q}_0=\boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}>0$，矩阵 $\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{Y}$ 及标量 $\varepsilon>0$，使对每个模式 $l\in\mathbb{M}$，均满足

$$\begin{bmatrix}
\boldsymbol{\Upsilon} & \boldsymbol{\Delta} & \boldsymbol{0} & \left(\boldsymbol{T}_1^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_1 & \left(\boldsymbol{\Phi}^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} & \mu_d\boldsymbol{\chi} \\
* & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{0} & \left(\boldsymbol{T}_2^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_2 & \left(\boldsymbol{\Omega}^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\
* & * & -\varepsilon I & \boldsymbol{\chi} & \boldsymbol{0} & \omega\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\
* & * & * & -\boldsymbol{\chi} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\
* & * & * & * & -\dfrac{\omega}{\gamma}\boldsymbol{\chi} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\
* & * & * & * & * & -\omega\gamma\boldsymbol{\chi} & \boldsymbol{0} \\
* & * & * & * & * & * & -\dfrac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{I}
\end{bmatrix}<0 \tag{35}$$

其中 $\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{X}_0$，且有如下与拓扑模式无关的矩阵：

$$\boldsymbol{\Upsilon}=\boldsymbol{I}_N\otimes\left(-\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{Q}_0+\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\right),\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{I}_N\otimes\left(-\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\right),$$
$$\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{I}_N\otimes\left(-\boldsymbol{Q}_0-\boldsymbol{S}_2-\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\right),\boldsymbol{K}_1=\omega\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{K}_2=\omega\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{S}_2.$$

对任意切换拓扑模式 $l\in\mathbb{M}$，有与模式相关矩阵：

$$\boldsymbol{T}_1^{(l)}=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0+(1-r)\boldsymbol{H}_u^{(l)}\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y},\boldsymbol{T}_2^{(l)}=r\boldsymbol{H}_u^{(l)}\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y},$$
$$\boldsymbol{\Phi}^{(l)}=\omega\left(\boldsymbol{I}_N\otimes(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}_0+(1-r)\boldsymbol{H}_u^{(l)}\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}\right),\boldsymbol{\Omega}^{(l)}=r\omega\boldsymbol{H}_u^{(l)}\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}.$$

则有公共控制增益 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}_0^{-1}$，对任意允许的切换信号 $\rho(k)\in\mathbb{M}$，系统实现均方二分时变跟踪编队。

证明：对于任意时刻 k，设当前激活拓扑模式为 $\rho(k)=l$。由上述可知，规范变换后的误差系统为(32)，由丢包变量的数学期望有(33)，再结合(34)，故第 l 个模式下的平均误差系统可表示为

$$\mathbb{E}\left[\bar{\boldsymbol{z}}(k+1)\right]=\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}\mathbb{E}\left[\bar{\boldsymbol{z}}(k)\right]+\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}\mathbb{E}\left[\bar{\boldsymbol{z}}(k-\omega_k)\right]+\mathbb{E}\left[\bar{\boldsymbol{G}}(\bar{\boldsymbol{z}}(k))\right]\tag{36}$$

取公共 Lyapunov-Krasovskii 泛函：

$$V(k)=V_1(k)+V_2(k)+V_3(k),$$

其中 $V_1(k)=\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{z}}(k),V_2(k)=\sum_{s=k-\omega_k}^{k-1}\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{z}}(s),V_3(k)=\sum_{m=-\omega}^{-1}\sum_{s=k+m}^{k-1}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}(s)$。

并取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0>0,\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}_N\otimes\bar{\boldsymbol{Q}}_0>0,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{R}_0>0$

由 $V_1(k)$ 定义，有

$$\Delta V_1(k)=\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{z}}(k+1)-\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{z}}(k)\tag{37}$$

由 $V_2(k)$ 定义，有

$$\Delta V_2(k)=\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{z}}(k)-\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k-\omega_k)\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{z}}(k-\omega_k)\tag{38}$$

由 $V_3(k)$ 定义，有

$$\Delta V_3(k)=\omega\Delta\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}(k)-\sum_{m=-\omega}^{-1}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k+m)\boldsymbol{R}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}(k+m)\tag{39}$$

根据误差系统(32)，有

$$\Delta\bar{\boldsymbol{z}}(k)=(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{I}_{Nn})\bar{\boldsymbol{z}}(k)+\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{z}}(k-\omega_k)+\bar{\boldsymbol{G}}(\bar{\boldsymbol{z}}(k))$$

同时，$\bar{\boldsymbol{z}}(k)-\bar{\boldsymbol{z}}(k-\omega_k)=\sum_{s=k-\omega_k}^{k-1}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}(s)$

取自由矩阵 $\tilde{\boldsymbol{S}}_1,\tilde{\boldsymbol{S}}_2$，并利用上述恒等式及离散求和不等式，可以得到

$$\Delta V_3(k)=\omega\Delta\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}(k)-\sum_{m=-\omega}^{-1}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k+m)\boldsymbol{R}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}(k+m)$$
$$+2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{S}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k)-\bar{\boldsymbol{z}}(k-\omega_k)-\sum_{m=-\omega_k}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k+m+1)-\bar{\boldsymbol{z}}(k+m)\right)\right)$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}(k)=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{z}}(k)\\ \bar{\boldsymbol{z}}(k-\omega_k)\end{bmatrix},\ \boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_N\otimes\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{S}}_1^{\mathrm{T}} & \tilde{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{\boldsymbol{z}}(k)-\bar{\boldsymbol{z}}(k-\omega_k)-\sum_{m=-\omega_k}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k+m+1)-\bar{\boldsymbol{z}}(k+m)\right)=0$$

$$\bar{\boldsymbol{z}}(k)-\bar{\boldsymbol{z}}(k-\omega_k)=\left[\boldsymbol{I}_{Nn}\quad -\boldsymbol{I}_{Nn}\right]\boldsymbol{\eta}(k)$$

对于任意 $\omega\geq 1$，有

$$-2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{S}\left[\sum_{m=-\omega_k}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k+m+1)-\bar{\boldsymbol{z}}(k+m)\right)\right]$$

$$\leq \omega\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\eta(k)+\sum_{m=-\omega}^{-1}\left[\bar{\boldsymbol{z}}(k+m+1)-\bar{\boldsymbol{z}}(k+m)\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\left[\bar{\boldsymbol{z}}(k+m+1)-\bar{\boldsymbol{z}}(k+m)\right]$$

则有

$$\begin{aligned}\Delta V_3(k)\leq{}&\omega\Delta\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}\Delta\bar{\boldsymbol{z}}(k)+\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{Nn}\otimes\left(\tilde{\boldsymbol{S}}_1+\tilde{\boldsymbol{S}}_1^{\mathrm{T}}\right) & \boldsymbol{I}_{Nn}\otimes\left(-\tilde{\boldsymbol{S}}_1+\tilde{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}}\right)\\ \boldsymbol{I}_{Nn}\otimes\left(\tilde{\boldsymbol{S}}_2-\tilde{\boldsymbol{S}}_1^{\mathrm{T}}\right) & \boldsymbol{I}_{Nn}\otimes\left(-\tilde{\boldsymbol{S}}_2-\tilde{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}}\right)\end{bmatrix}\boldsymbol{\eta}(k)\\&+\omega\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{S}}_1\\ \tilde{\boldsymbol{S}}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{R}^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{S}}_1\\ \tilde{\boldsymbol{S}}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(k)\end{aligned}\tag{40}$$

又由式(24)，规范变换后的非线性项仍满足 Lipschitz 条件。对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon\mu_d^2\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k)\bar{\boldsymbol{z}}(k)-\varepsilon\bar{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k)\right)\bar{\boldsymbol{G}}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k)\right)\geq 0$$

定义 $\boldsymbol{\xi}(k)=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{z}}(k)\\ \bar{\boldsymbol{z}}(k-\omega_k)\\ \bar{\boldsymbol{G}}(\bar{z}(k))\end{bmatrix}$

综合 $\Delta V_1(k)$、$\Delta V_2(k)$、$\Delta V_3(k)$ 以及 Lipschitz 不等式，有

$$\mathbb{E}\left[\Delta V(k)\right]\leq\mathbb{E}\left[\Delta V(k)+\varepsilon\mu^2\bar{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(k)\bar{\boldsymbol{z}}(k)-\varepsilon\bar{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k)\right)\bar{\boldsymbol{G}}\left(\bar{\boldsymbol{z}}(k)\right)\right]$$

进而可得

$$\mathbb{E}\left[\Delta V(k)\right]\leq\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\Psi}^{(l)}\boldsymbol{\xi}(k)\right]\tag{41}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}^{(l)}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}^{(l)} & \hat{\boldsymbol{Z}}^{(l)} & \boldsymbol{C}_1^{(l)}\\ * & \hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(l)} & \boldsymbol{C}_2^{(l)}\\ * & * & \boldsymbol{C}_3\end{bmatrix}<0$$

矩阵中的各项为

$$\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}^{(l)}=\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+\omega\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}-\boldsymbol{I}_{Nn}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}-\boldsymbol{I}_{Nn}\right)+\tilde{\boldsymbol{S}}_1+\tilde{\boldsymbol{S}}_1^{\mathrm{T}}+\omega\tilde{\boldsymbol{S}}_1\boldsymbol{R}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon\mu_d^2\boldsymbol{I}_{Nn},$$

$$\hat{\boldsymbol{Z}}^{(l)}=\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}+\omega\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}-\boldsymbol{I}_{Nn}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}-\tilde{\boldsymbol{S}}_1+\tilde{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}}+\omega\tilde{\boldsymbol{S}}_1\boldsymbol{R}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(l)}=\left(\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}-\boldsymbol{Q}+\omega\left(\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}-\tilde{\boldsymbol{S}}_2-\tilde{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}}+\omega\tilde{\boldsymbol{S}}_2\boldsymbol{R}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{C}_1^{(l)}=\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\omega\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}-\boldsymbol{I}_{Nn}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}_2^{(l)}=\left(\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\omega\left(\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{P}+\omega\boldsymbol{R}-\varepsilon\boldsymbol{I}_{Nn}.$$

因此，若对任意模式 $l\in\mathbb{M}$，均有 $\boldsymbol{\Psi}^{(l)}<0$，则 $\mathbb{E}\left[\Delta V(k)\right]<0$。

对矩阵 $\boldsymbol{\Psi}^{(l)}<0$，应用 Schur 补引理，可得

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Upsilon}} & \bar{\boldsymbol{\Delta}} & \mathbf{0} & \left(\bar{\boldsymbol{T}}_1^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{K}}_1 & \left(\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} \\ * & \bar{\boldsymbol{\Gamma}} & \mathbf{0} & \left(\bar{\boldsymbol{T}}_2^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{K}}_2 & \left(\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & \boldsymbol{P} & \mathbf{0} & \omega\boldsymbol{R} \\ * & * & * & -\boldsymbol{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -\omega\boldsymbol{R} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -\omega\boldsymbol{R} \end{bmatrix}<0 \tag{42}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}=\boldsymbol{I}_N\otimes\left(-\boldsymbol{P}_0+\bar{\boldsymbol{Q}}_0+\tilde{\boldsymbol{S}}_1+\tilde{\boldsymbol{S}}_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon\mu_d^2\boldsymbol{I}_{Nn}\right),\ \bar{\boldsymbol{\Delta}}=\boldsymbol{I}_N\otimes\left(-\tilde{\boldsymbol{S}}_1+\tilde{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}}\right),\ \bar{\boldsymbol{\Gamma}}=\boldsymbol{I}_N\otimes\left(-\bar{\boldsymbol{Q}}_0-\tilde{\boldsymbol{S}}_2-\tilde{\boldsymbol{S}}_2^{\mathrm{T}}\right),$$
$$\bar{\boldsymbol{K}}_1=\omega\boldsymbol{I}_N\otimes\tilde{\boldsymbol{S}}_1,\ \bar{\boldsymbol{K}}_2=\omega\boldsymbol{I}_N\otimes\tilde{\boldsymbol{S}}_2,\ \bar{\boldsymbol{T}}_1^{(l)}=\left(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}\right),\ \bar{\boldsymbol{T}}_2^{(l)}=\left(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}\right),$$
$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{(l)}=\left(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}-\boldsymbol{I}\right),\ \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{(l)}=\left(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}\right).$$

对(42)同时左乘右乘矩阵 $\mathrm{diag}\left\{\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0^{-1},\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0^{-1},\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0^{-1},\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{R}_0^{-1}\right\}$ 进行相应的合同变换，并且定义 $\boldsymbol{Q}_0=\boldsymbol{P}_0^{-1}\bar{\boldsymbol{Q}}_0\boldsymbol{P}_0^{-1},\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{P}_0^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_i\boldsymbol{P}_0^{-1},\tilde{\boldsymbol{R}}_0=\boldsymbol{P}_0^{-1}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{P}_0^{-1},\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{X}_0$。并且再进行一次 Schur 补引理可得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}} & \tilde{\boldsymbol{\Delta}} & \mathbf{0} & \left(\tilde{\boldsymbol{T}}_1^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} & \tilde{\boldsymbol{K}}_1 & \left(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} & \mu_d\boldsymbol{\chi} \\ * & \tilde{\boldsymbol{\Gamma}} & \mathbf{0} & \left(\tilde{\boldsymbol{T}}_2^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} & \tilde{\boldsymbol{K}}_2 & \left(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^{(l)}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\chi} & \mathbf{0} & \omega\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\boldsymbol{\chi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -\dfrac{\omega}{\gamma}\boldsymbol{\chi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -\omega\gamma\boldsymbol{\chi} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -\dfrac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0 \tag{43}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}=\boldsymbol{I}_N\otimes\left(-\boldsymbol{P}_0^{-1}+\boldsymbol{Q}_0+\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\right),\ \tilde{\boldsymbol{\Delta}}=\boldsymbol{I}_N\otimes\left(-\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\right),\ \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}=\boldsymbol{I}_N\otimes\left(-\boldsymbol{Q}_0-\boldsymbol{S}_2-\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\right),$$
$$\tilde{\boldsymbol{K}}_1=\omega\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{S}_1,\ \tilde{\boldsymbol{K}}_2=\omega\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{S}_2,\ \tilde{\boldsymbol{T}}_1^{(l)}=\left(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0^{-1}\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}\right),\ \tilde{\boldsymbol{T}}_2^{(l)}=\left(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0^{-1}\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}\right),$$
$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(l)}=\left(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0^{-1}\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_1^{(l)}-\boldsymbol{I}\right),\ \tilde{\boldsymbol{\Omega}}^{(l)}=\left(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{P}_0^{-1}\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_2^{(l)}\right).$$

对(43)进行变量替换 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{P}_0^{-1}$，然后，让 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}_0$，因此，(43)进一步等价于线性矩阵不等式(35)，证明得证。

5. 数据仿真

为验证所提方法有效性，考虑 1 个领导者和 8 个跟随者的离散时间非线性多智能体系统。跟随者集合为：$V=\{1,2,\cdots,8\}$。其中智能体 1，3，5，7 属正子群，2，4，6，8 属负子群。二分符号向量取为：$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。相应地 $\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}\left(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1\right)$。

本文仿真使用的系统矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.9860 & 0.0902 & 0.0045\\ -0.2705 & 0.8056 & 0.0857\\ 0 & 0 & 0.9048\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.1087\\ 0.1618\\ -0.0952\end{bmatrix}.$$

Lipschitz 函数和 Lipschitz 常数分别为 $f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \mu_d\sin(x_3)\end{bmatrix}$ 和 $\mu_d=0.15$。时变编队函数取 $h_i(k)=0.9\left(1+0.1\sin\frac{\pi k}{20}\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}k+\phi_i\right),i=1,2,\cdots,8$，其中 $\phi=\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\pi,0,\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2},0,\pi\right]^{\mathrm{T}}$，编队前馈输入取 $v_i(k)=h_i(k)$，以原点为领导者初始状态，参考输入取 $u_0(k)=0.05k$。

考虑两个有向符号拓扑 $\rho(k)\in\{1,2\}$，切换信号设置为每 20 个采样时刻切换一次，仿真中系统在两种拓扑间持续切换。拓扑图如图 1 所示。

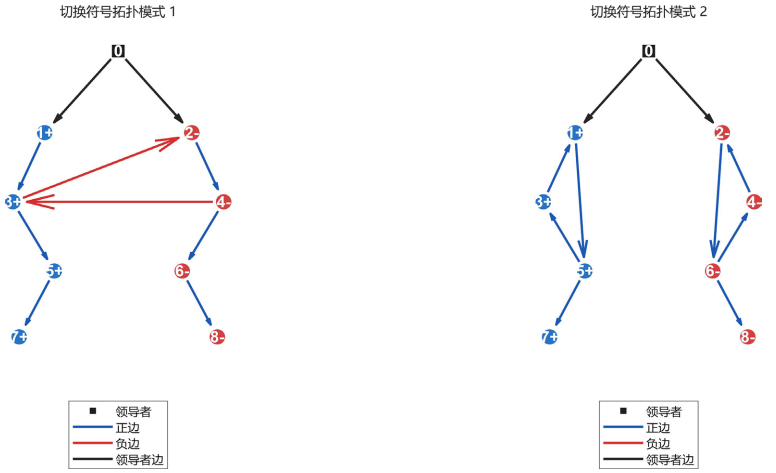


Figure 1. Switching signed directed topological modes
图 1. 切换有向符号拓扑模式

定理 1 中参数 γ 取 4，经过 LMI 求解，可以得到同一组决策变量。首先取 $r=0$，图 2 给出了此时的正负子群轨迹、二分跟踪编队误差及不同时刻编队队形。

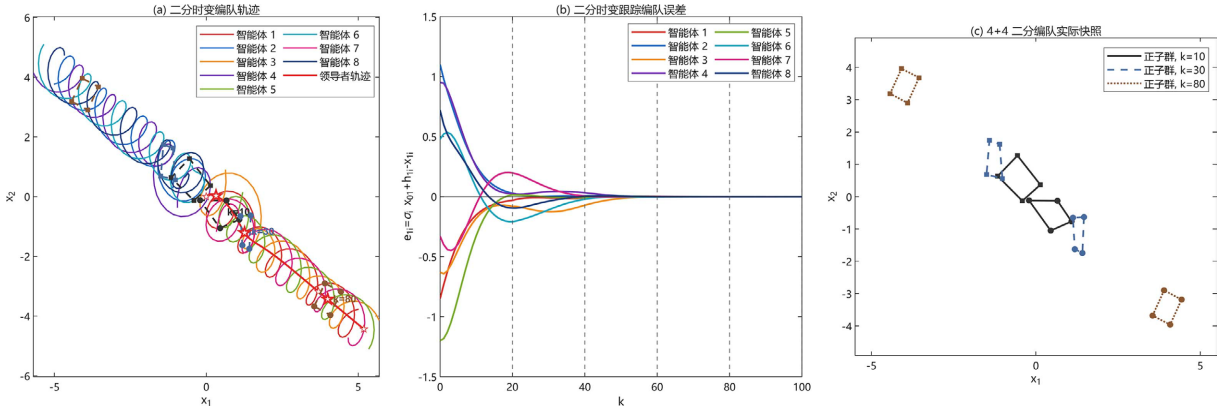


Figure 2. Bipartite time-varying formation simulation results under switching topologies without packet loss
图 2. 无丢包时切换拓扑下二分时变编队仿真结果

进而取 $r=0.30,\omega=4$ 时，针对两种切换拓扑的增广矩阵 $\boldsymbol{H}_u^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{H}_u^{(2)}$，同时求解定理 1 公共 LMI，得公共反馈增益：$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-0.310267 & -0.233114 & 0.069822\end{bmatrix}$。图 3 给出了此时的正负子群轨迹、二分跟踪编队误差及不同时刻编队队形。

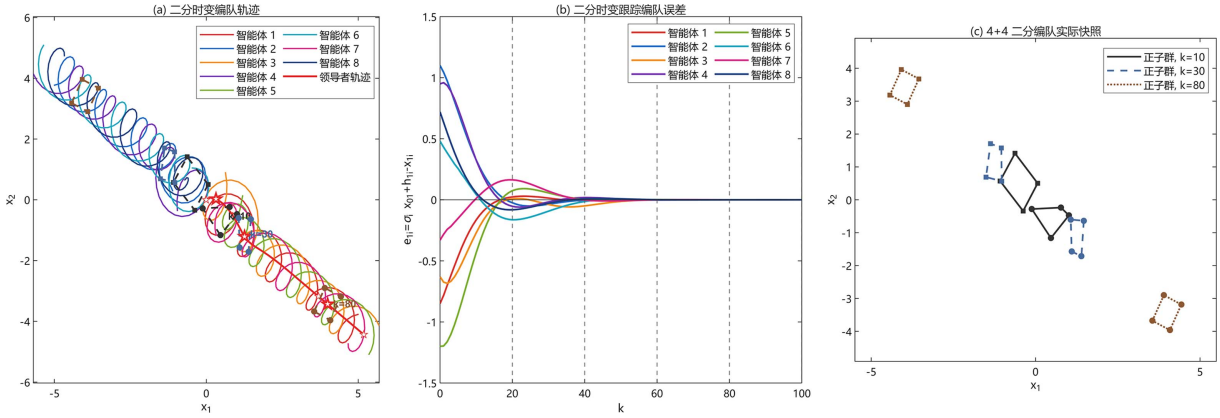


Figure 3. Bipartite time-varying formation simulation under switching topologies with packet loss
图 3. 丢包时切换拓扑下二分时变编队仿真结果

为量化连续丢包对二分时变编队跟踪性能的影响，将所提控制器在无丢包基准($r=0$，即 $\theta_{ij}(k)\equiv 1$)与连续丢包场景($r=0.3,\omega=4$)下进行蒙特卡洛对比，结果见表 1。其中收敛时间定义为均方误差首次进入阈值带 10^{-3} 并保持至仿真结束的时刻。由表 1 可见，两种情况下收敛成功率均达到 100%；丢包场景下的最终均方根误差约为 1.2933×10^{-4}，较无丢包基准(1.0214×10^{-4})增加约 26.6%，平均收敛时间由 71.0 步延长至 72.2 步。这表明所设计控制器对连续丢包具有良好的鲁棒性，丢包造成的性能退化十分有限。

Table 1. Performance comparison under different parameters
表 1. 不同参数下系统性能对比

场景	r	ω	收敛时间 (mean/median/max)	成功率
无丢包	0	1	71.0/71.0/71.0	100%
丢包	0.3	4	72.2/72.0/73.0	100%

Table 2. LMI feasibility matrix in Theorem 1
表 2. 定理 1 的 LMI 可行性矩阵

$r\setminus\omega$	1	2	3
0	✓	✓	✓
0.1	✓	✓	✓
0.2	✓	✓	✓
0.3	✓	✓	✓

为考察丢包率 r 与最大连续丢包数 ω 对 LMI 可行性的影响，对 $r\in\{0,0.1,0.2,0.3\}$、$\omega\in\{1,2,3\}$ 的全部组合求解定理 1 的 LMI，可行性结果见表 2。可以看出，在所考察的参数范围内，LMI 条件对全部组合均可行，表明所设计控制器对丢包具有较宽的适用裕度。进一步观察各组合下 LMI 的最大特征值可以发

现，当 ω 由 1 增大至 3 时，最大特征值由 -7.6×10^{-4} 量级上升至 -4.7×10^{-4} 量级(以 $r=0.3$ 为例)，即最大特征值随 ω 增大而趋向于零，说明更大的连续丢包深度会使稳定性条件趋于保守；相比之下，同一 ω 下改变 r 对最大特征值的影响明显更小。这表明连续丢包的最大深度是限制 LMI 可行性的主导因素，而丢包率的影响相对温和，该结论可为实际系统中缓存深度的选取提供参考。

由上述仿真结果可以看出，有无连续丢包两种情形下的误差曲线几乎重合，仅在收敛过程中存在微小差别，直观印证了所提控制器对连续丢包的鲁棒性。综上，在离散非线性动力学、独立连续丢包、切换有向符号拓扑与二分时变编队共存下，所设计公共 LMI 控制器保证闭环稳定并实现二分时变跟踪编队。

6. 结论

本文研究了连续丢包与切换有向符号拓扑下离散时间非线性多智能体系统的二分时变编队跟踪问题。针对合作边与竞争边并存的通信拓扑，利用结构平衡理论建立有向符号拓扑模型，通过规范变换将二分误差系统转化为无符号系统；构造时变编队补偿状态，使正负子群分别跟踪领导者轨迹及其相反轨迹；采用各链路独立的 Bernoulli 模型描述连续丢包，利用最大时滞上界的缓存数据构造分布式控制协议；针对全部模态构造公共 LMI 条件，求得统一反馈增益。由于所有模态共用同一 Lyapunov-Krasovskii 泛函，公共 LMI 可行时闭环系统在任意拓扑切换下稳定，无需驻留时间条件。未来进一步可研究通信时延与连续丢包并存，以及事件触发机制下的二分时变编队控制。此外，本文假设所有切换拓扑共享同一子群划分，以保证规范变换矩阵 $\mathbf{\Sigma}$ 在全部模式下保持不变；当子群划分随拓扑切换而改变时，可尝试引入切换 Lyapunov 函数或自适应规范变换的方法加以处理，这也是值得深入探讨的方向。并且，采用转移概率已知的马尔可夫链刻画连续丢包过程并在该框架下重新进行稳定性分析，也是值得进一步研究的方向。

参考文献

[1] Jadbabaie, A., Lin, J. and Morse, A.S. (2003) Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**, 988-1001. https://doi.org/10.1109/tac.2003.812781

[2] Wei Ren, and Beard, R.W. (2005) Consensus Seeking in Multiagent Systems under Dynamically Changing Interaction Topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**, 655-661. https://doi.org/10.1109/tac.2005.846556

[3] Olfati-Saber, R. and Murray, R.M. (2004) Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**, 1520-1533. https://doi.org/10.1109/tac.2004.834113

[4] Zhang, J., Yao, Y., Wang, J. and Ding, D. (2024) Distributed Bipartite State Consensus Tracking for Discrete-Time Singular Multi-Agent Systems. *Unmanned Systems*, **13**, 1585-1596. https://doi.org/10.1142/s2301385025420026

[5] Chen, B., Chen, Y.Z. and Zhan, J. (2023) Consensus of Discrete-Time Multi-Agent Systems with Consecutive Packet Losses in Directed Communication Topology. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **45**, 1829-1841. https://doi.org/10.1177/01423312221138892

[6] Chen, B., Chen, W., Su, J. and Shang, X. (2025). Consecutive Packet Loss-Based Consensus Tracking for Discrete-Time Nonlinear Multi-Agent Systems. 2025 *China Automation Congress* (*CAC*), Harbin, 26-28 September 2025, 6895-6901. https://doi.org/10.1109/cac67268.2025.11486919

[7] Altafini, C. (2013) Consensus Problems on Networks with Antagonistic Interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **58**, 935-946. https://doi.org/10.1109/tac.2012.2224251

[8] Valcher, M.E. and Misra, P. (2014) On the Consensus and Bipartite Consensus in High-Order Multi-Agent Dynamical Systems with Antagonistic Interactions. *Systems & Control Letters*, **66**, 94-103. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2014.01.006

[9] Cai, Y., Zhang, H., Zhang, J., Xi, R. and He, Q. (2021) Fully Distributed Bipartite Time-Varying Formation Control for Uncertain Linear Multi-Agent Systems under Event-Triggered Mechanism. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **31**, 5165-5187. https://doi.org/10.1002/rnc.5532

[10] Zhao, X. and Zhang, L. (2024) Adaptive Bipartite Time-Varying Output Formation Tracking of Heterogeneous Multi-Agent Systems. *IEEE Control Systems Letters*, **8**, 394-399. https://doi.org/10.1109/lcsys.2024.3392775

[11] Qin, J., Fu, W., Zheng, W.X. and Gao, H. (2017) On the Bipartite Consensus for Generic Linear Multiagent Systems

with Input Saturation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **47**, 1948-1958. https://doi.org/10.1109/tcyb.2016.2612482

[12] 徐君，张国良，曾静，等. 具有时延和切换拓扑的高阶离散时间多智能体系统鲁棒保性能一致性[J]. 自动化学报, 2019, 45(2): 360-373.

[13] Su, Y.F. and Huang, J. (2012) Two Consensus Problems for Discrete-Time Multi-Agent Systems with Switching Network Topology. *Automatica*, **48**, 1988-1997. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.03.029

[14] 闵海波，刘源，王仕成，等. 多个体协调控制问题综述[J]. 自动化学报, 2012, 38(10): 1557-1570.