Astronomy and Astrophysics 天文与天体物理, 2014, 2, 13-19
Published Online April 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aas
http://dx.doi.org/10.12677/aas.2014.22002

Hans汉斯

Look Back on Early History (50 Years) of Relativistic Celestial Mechanics (1916-1966)

Linsen Li

School of physics, Northeast Normal University, Changchun
Email: dbsd_lls@aliyun.con

Received: Jun. 30th, 2014; revised: Jul. 31st, 2014; accepted: Aug. 5th, 2014

Abstract

The development of Relativistic Celestial Mechanics had been undergone through the research of the problems of one-body, two-body (including lunar theory), many-body and rotating liquid body from the view point of the researched history. It had been undergone through the research of rigorous solution, post-Newtonian approximation, parametrized post-Newtonain method and high order post-Newtonian approximation method (post-post Newtonian approximation method). This paper only looks back mainly on the history of the early research of the relativistic celestial mechanics (1916-1966) (50 years).

Keywords

Development of Relativistic Celestial Mechanics, History of Early Research (1916-1966), Look Back

相对论天体力学早期研究史的回顾50年(1916~1966)

李林森

东北师范大学物理学院，长春
Email: dbsd_lls@aliyun.con

收稿日期：2014年6月30日；修回日期：2014年7月31日；录用日期：2014年8月5日

摘　要

本文对相对论天体力学早期研究史(前半个世纪)做了回顾(1916~1966)。回顾了好些天文物理学着在前半个世纪在这个学科领域中所取得的研究成就，其中包括对相对论一体问题，二体问题和多体问题的研究结果，特别包括了二体问题中中心体自转以及自转液体星的形状和平衡理论的一些研究结果：给出了这些研究的文献。

关键词

相对论天体力学，早期研究史(1916~1966)，回顾

1. 引言

自从 1915 年爱因斯坦发表广义相对论后 1916 年好些作者将广义相对论推广到太阳系天体的运动理论。如果说这是相对论天体力学的开始，那么到 2016 年这个学科已发展一个世纪的历史了，取得了可喜的研究成果。相对论天体力学的发展从研究的历史来看经历了对一体问题，二体问题(包括月离理论)以及多体问题和自转液体星的研究；从研究方法来看经历了严密求解，后牛顿近似，参数化的后牛顿近似方法以及高阶后牛顿近似法(2 阶后牛顿 2 PN)。(2.5 PN 和 3.5 PN)和最新的 DSX 方法等。早期研究的历史(前半个世纪)主要研究一体问题，二体问题和多体问题，严密求解，近似解法以及将这些问题和研究方法应用在太阳系天体轨道运动和双星轨道后牛顿效应，后期也应用于人造卫星的运动理论。这些理论首先由 Eienstein，de Sitter 等人开始着手研究的，特别 Eienstein，Infeld 和 Hoffmann 等人的深入研究。本文回顾了自从 1916 年相对论天体力学创建后在前半个世纪各学者研究的历史。

2. 相对论一体问题的早期研究史的回顾

相对论天体力学的研究首先是从一体问题开始的。相对论一体问题就是利用 Schwarzschild 度规来研究实验粒子在质量 M 为引力源周围的引力场中的运动问题。这理论自 Einstein 建立广义相对论后就开始着手有人研究，理论结果在好多天体力学书中都已给出[1]-[4]。对于这理论的研究方法不外乎有二种：一种是用 Schwarzschild 度规做变分后得到轨道方程；另一方法也是利用度规推出 Hamilton-Jacobi 方程，从而得到特性曲线方程，然后再推出轨道方程。对轨道方程求解也用两种方法，一种是逐次解非齐次常微分方程；另一种是利用椭圆函数表示的完全可积解，利用此解可以确定动径 r，纬度和经度的坐标变化。利用 Weirstrass 椭圆函数来表示解：

$u=\alpha/r=W\left(\dfrac{\psi+\beta_1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}$，需要解 u 的三次代数方程，故有三个根。根据三个根相同或不相同可讨论相对论一体运动的各种特性。三个根不同时有拟椭圆，拟抛物线，拟双曲线和三个根相同时有圆的周期轨道等。对于轨道半径 $r>3\alpha=3GM/c^2$，得到稳定轨道，对于 $r<3\alpha$ 得到不稳定轨道。这些结果的讨论已在文献[2]中给出了。

其次就是从轨道方程推出摄动分量 S，T，W，然后代人高斯摄动方程再求轨道要素变化的广义相对论效应，其中有用真点角为自变量也有用平近点角 M 为自变量表示摄动量。解法按二体问题在平面运动求解后给出后牛顿效应，这已在文献[1]-[4]给出了此结果。

除利用 Schwarzschild 度规外还有用 de Sitter，Weyl 度规推出轨道方程，由此得到摄动变量 δr 和 $\delta\vartheta$ 解，当将解中的- λ 略去时就同 Schwarzschid 度规推出的结果相一致[5]。为了将一体问题应用到人造卫星的运

动理论上，Mevittie (1958)和 Pamels & Mevittie (1966)将 Schwarzschild 度规场转换成 Weyl 和 Levi-civita 给出的轴对称的度规引力场，后推出轨道方程，由此得到考虑地球扁球体时人造卫星的近星点进动的式子[6] [7]：

$$\delta\omega = 2\pi\left\{\frac{3m}{p}+\frac{JR_E^2}{p^2}+\frac{1}{4}\frac{J_2R^2\left(2-e^2\right)}{p^4}\right\} \tag{1}$$

相对论一体问题中中心体除考虑质量和扁度(四及矩)外就是中心体自转的问题。这问题首先是由 Thirring (1918)所完成，并得到由于中心体自转对轨道要素产生的摄动影响。最后将理论应用于卫星轨道的效应计算上[8]。Lense & Thrring (1918)利用弱场近似方法并将天体力学中的轨道要素变化摄动方程的解应用于行星和月球轨道的效应计算上[9]。Bogdorowskii (1959)进而发展了这种理论，也推得轨道要素变化的摄动量并将理论应用于人造卫星的轨道效应上。所用的方法在推出 S.TW 三分量时两者略有不同[10]。

3. 相对论二体问题的研究史的回顾

Einstein 于 1915 年建立广义相对论后从 1916 年就有人着手研究相对论二体问题和多体问题，到 60 年代可分为以下几个阶段研究过程：

(1) Droste，de Sitter，Livi-Civita，Eddington 和 clark 等人的研究

Droste (1916)首先讨论了相对论的 n 体问题，但他并没有把理论应用在天体运动上[11]。其后 de Sitter (1916~1917)将 Droste 的理论稍加修改并把它应用到天文问题上[12]。此外他还根据广义相对论理论研究了行星和月球的运动理论[13]。de Sitter 给出 n 体度规表示，然而在 de Sitter 的推导过程有理论误差，该误差导致有长期加速度[14]。以后 Levi-Civita (1937)也研究了相对论的多体问题，并将相对论的二体问题应用于双星的质心绝对轨道运动上并给出双星每一世纪质心速度的增量值[15] [16]。其结果是：双星的质心 G 的长期加速度是沿着向主星的近星点的半长轴。此外在他的理论中也引用了 de Sitter 的研究，但他没有取 de Sitter 所包括的误差的公式。Eddington 和 Clark (1938) [17]根据 de Sitter 给出的 n 体的世界线的式子推出 n 体的运动方程，但所推出的 n 体方程式是对 de Sitter 方程的改正，除最后两项同 de Sitter 所推出的有所不同外，其它各项同 de Sitter 所推出的各项相对应，而 de Sitter 的结果最后项的系数有一个误差。Eddington 和 Clark 又将其 n 体问题的运动方程化为二体问题的运动方程，然后又化为质心坐标方程。结果在 Edington 和 Clark 的理论中如在 Levi-Civita 理论中那种质心的长期加速度是不存在的。经过 Eddington 等人的研究，对于二体系统，结果证明，整个系统没有加速度。在二体问题中对于计算小的项是利用近似牛顿求解法，在 n 体问题中相对应的近似牛顿解是不存在的。

(2) 建立在 E-I-H 方法基础上的二体问题的研究

在 Eddington 等人研究二体问题的同时，Einstein & Roberson (1936)，Einstain，Infeld，Hoffmann (1938)也开始建立二体问题的完整理论体系。这体系是先从场方程推出二体的运动方程，即给出把有限质量当做引力场的奇点的二体运动的近似方程，即 E-I-H 方程，它包括了用简单标号的奇点代表球对称的非自转物体。方法的特点是先用 $h\mu\nu$ 将场方程分离成 n 的二次和高阶的线性项并取 c^{-2} 项作为一阶后牛顿近似(称为 PPN 近似)来推出二体的运动方程。运动方程涉及坐标条件和选择，这方法称为 E-I-H 方法[18]-[21]。他们只推出 n 体运动方程并化为二体运动方程，但没有给出解。Roberson (1938) [22]立即由 E-I-H 方法推出的运动方程化为二体运动方程，并将二体问题限制在平面上得到了二体运动方程的积分。将此结果同样应用于双星的近星点进动，得到进动量为[22]

$$\delta\omega = \frac{3GM}{c^2p}\theta \tag{2}$$

式中 $M = m_1 + m$，它比一体问题所得到的结果更精确，这个相对轨道受着质量为双星的两个质量之和的引力场所支配，此外，双星的质心速度也表示不出有相对效应的长期变化，这同前面 Levi-Civita 的结果是一个惊奇的对照。

Infeld (1953~1954) [23] [24]对 E-I-H 方法又进一步做了发展和改进。他的方法是建立在所引入的奇点通过 δ 函数所构成的能量－动量密度张量为媒介而变成运动方程。同时他又将运动方程和坐标条件的关系进一步做了研究。他也同样推出行星近日点进动式子[23]：

$$\delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 6m\pi/p \tag{3}$$

结果近日点进动在某种情形下不依赖于坐标。

Brunberg (1958)进一步深入讨论了坐标条件同 n 体运动方程的联系并得到一些有益的结果[25]。

Narlikar 和 Roa (1955)也同样从场方程推出运动方程[26]。Roa (1960)用类似的 I-E-H 方法，但所采用的坐标系 $x\mu$ 和坐标条件同 Robertson 有所不同。由于 Robertson 没有保证观测坐标系是和 $x\,\mu$ 一系相同，所以 Rao 计算了所有参考系中的近日点进动。他推得在旧和新坐标系中的二体运动方程式，然后他将 x-系转换 x^*一系的运动方程，最后成为在极坐标下的近日点进动方程，积分后得到水星近日点进动式子：[27]

$$\delta\omega = \lambda^2\left(\frac{3M}{P} - \alpha\right)\vartheta \tag{4}$$

这个结果同 Roberson 所推出的结果略有不同，在第二项引出一个 α 项，α 为一常数。Rao 的理论其所以有如此结果，这是因为运动方程依赖于所用的坐标条件。

在二体问题中带有自转的二体运动方程首先由 Ryabinushka (1957)着手研究的。他对旋转物体运动的研究利用 Infeld 的方法，但在他的能量动量张量的假设中做了错误[28]。Tulczyjew (1959)研究了将两个自转物体的系统当做引力场的奇点来讨论的近似运动方程。他所用的方法建立在 Infeld (1954) [24]给出的方法基础上的。他推出了两个自转物体的系统的运动方程，并对运动方程做了积分后得到了以等角速度的轴线运动的新相对论效应。所推出的二体系统有自转的后牛顿运动方程也相当冗长。将运动方程化为二体问题平面上的极坐标方程后积分之，则得到二体带有自转时的近星点进动式子[29]。

$$\delta\omega = 2\pi\alpha = 6\pi\frac{M}{P}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{S}{J}\right) \tag{5}$$

式中 $J = \sqrt{MP}$ (轨道角动量)，S 为自转角动量。

这结果同二体非自转系统所得的结果多了第二项。这结果也符合在一体问题中中心体自转情形的 Lense-Thirring 的结果。

(3) 建立在 Fock-Papapetrou 理论基础上的二体问题的研究

和 E-I-H 的奇点方法相平行的另一方法，是用能量一动量密度来研究二体问题的 Fock 等人的方法。这方法已由 Fock 和 Papapetrou 等人所完成。这方法主要考虑了二体系统的自转的运动理论。Fock (1939)首先研究了非自转的球对称体的情形，这方法等价于 Infeld 的结果[30]，Fock 利用二体系统的 Lagrange 作用量推出相对轨道的运动方程，最后解近星点进动方程后得到近星点进动的式子[31]：

$$\delta\omega = 6\pi\alpha/p \quad (\text{每周转}) \tag{6}$$

式中 $p = a(1-e^2)$，$\alpha = GM/C^2$，$m = m_1 + m_2$

St. Kalitzin (1958)根据 Fock 给出的带有自转的二体系统的 Lagrange 作用量 L，其中 L 包括二体均有自转情形的作用量。他首先研究二体系统的中心体有自转情形时的问题解。最后他求得这种近星点进动式子是[32]

$$\delta\omega = \frac{6\pi G\left(m_1+m_2\right)}{c^2 a\left(1-e^2\right)} - \frac{16\pi G m_2 r_0^2 \omega_{12}}{5c^2 d^{3/2}\left(1-e^2\right)^{3/2}\sqrt{G\left(m_1+m_2\right)}} \tag{7}$$

式中第二项为中心体自转产生的效应项，m_2，r_n，ω_{12} 为中心体的质量，半径和自转角速度。最后他将上述理论结果应用于卫星轨道的近星点进动的计算上。

St. Kalitzin (1959)随后又研究在二体系统中二体均有自转情形，即将二体均有自转的拉氏作用量代入 Lagrange 运动方程，得到 $u = 1/r$ 的二阶线性齐次方程，求解后便得到二体系统中二体均有自转时的近星点进动式子[33]。

$$\begin{aligned}\delta\omega = {} & \frac{6\pi G\left(m_1+m_2\right)}{a\left(1-e^2\right)c^2} - \frac{16\pi G\left(m_1 r_1^2 \omega^{(1)}\cos i_1 + m_2 r_2^2 \omega^{(2)}\cos i_2\right)}{5c^2 a^{3/2}\left(1-e^2\right)^{3/2}\sqrt{GM}} \\ & - \frac{12\pi G\left(m_2 r_1^2 \omega^{(1)}\cos i_1 + m_2 r_2^2 \omega^{(2)}\cos i_2\right)}{5c^2 a^{3/2}\left(1-e^2\right)^{3/2}\sqrt{GM}}\end{aligned} \tag{8}$$

St. Kalitzin 最后将此结果应用于双星系统的近星点进动的计算上。St. Kalitzin 的研究结果是对 Fock 理论在二体问题上的良好应用及发展。

对于二体问题的自转物体的运动方程的另一研究，是建立在 Papapetrou 理论基础上的理论。前面的 E-I-H 方法主要讨论限制在球对称情形，而 Papapetrou 方法(1951)应用物体内部和真空相同的场方程来研究非对称情形的二体系统的运动方程[34]。Haywood (1956) [35]曾利用 Papapetrou 方法进一步研究了带有自转情形的二体运动方程，但是他所研究的属于自转物体保持球对称且一个物体的运动方程只依赖于第二物体的自转，而不依赖于它自身的自转。此外所推得的运动方程在一定条件下又化为 E-I-H 方程和 Papapetrou (1951)所推得的两个球对称的运动方程，然而在 Haywood 理论中忽略了和 R/r 成比例的项，其中 R 为物体半径的量级，r 是二体之间的距离。

4. 相对论自转液体星的平衡形状的研究

自转液体星的平衡形态(形状和稳定)，是经典天体力学中的组成部分，这理论已由 G. H. Darwin，H. Jeans，J. H. Poincarě，A. M. Liapounoff (A M Ляпунов)和 L. Lichtenstein 五大学派所完成，其研究的理论结果比较成熟，但相对论自转液体星的平衡形态研究虽然也很早，很不成熟。

首先研究相对论自转液体星的平衡形态理论的要 Akeley (1931) [36]他于 1931 年首先找出相对论自转液体星和经典自转液体星的对应关系。这关系称为第一近似。然后他又给出自转液体星的引力场，这被称为第二近似。最后他推出相对论情形的麦克劳林椭球体的平衡形态的理论式子。然而在相对论情形中确没有 Maclaulin 椭球体和 Jacobi 椭球体的精确解。Clark (1941) [37]也研究了相对论自转液体星的平衡形状；也给出相对论的麦克劳林椭球体的平衡形态式子，同时他(1947)还研究了自转的内聚系统的引力场并将其应用于双星的引力能耗损问题上[38] Florides 等(1962)讨论了广义相对论中的自转液体星的引力场，其中讨论了自转液体星的牛顿模型和相对论模型，给出了相对论模型中密度和压力同引力能之间的关系式[39]。在那以后 Boyer (1965)研究了广义相对论的自转的液体星的平衡问题[40]。他利用 Kerr 度规讨论了自转液体内部区域的一些情形。

关于相对论中的自转液体星的运动方程最早已由 Papapetrou (1951)给出，后由 Haywocd (1956)所发展，他们深入研究了自转液体为球体情形的二体自转时运动方程的解，其结果已在前节概述了，在此就不再重述。

5. 小结

(1) 如果说相对论天体力学开始于 1916 年，那么到 1966 年它走过了前半个世纪的历史。可以说相对论天体力学在前半个世纪研究的成果为后半个世纪的研究打下了良好的基础，它推动了后半个世纪相对论天体力学的发展。因此研究和总结前半个世纪相对论天体力学的研究史很有意义。

(2) 从引用的参考文献来看，相对论天体力学在前半个世纪的研究主要由物理学工作者参与研究完成的。随着天文仪器的精确度提高，相对论效应在天体力学中被显示出来，这才被天文学家所重视，才有了广义相对论在天体力学中广泛应用于各类天体轨道运动的理论和观测上。我们可以看到并断言，目前和今后随着天文仪器的精确度不断提高，相对论天体力学在后半个世纪在理论和观测上才有较大的发展。

6. 展望

本文回顾了前半个世纪(1916~1966)相对论天体力学发展史，那么后半个世纪这个学科又有较大的发展，从研究太阳系的相对论天体力学外已扩大和发展到外太阳系的行星运动的相对论效应[41]，此外也扩展到恒星系统的相对论天体力学[42]。有关后半个世纪前 30 年以前国外相对论天体力学研究的进展可见文献[42]。自从 1994 年引用的文献后又经历了 20 年，相对论天体力学在国外又有较大的发展。至于相对论天体力学研究在国内起步较晚些，到 70 年代末期才开始好些作者着手研究此学科，文[43]曾介绍和报导 1973~1992 年国内研究相对论天体力学的进展概况，可是自 1992 年以后到现在 22 年间在国内又有较大的发展。可以预言相对论天体力学今后在国内外会有更大的发展。

参考文献 (References)

[1] Chazy J. La theorie de la relativite et la Mecanique Cèleste. Paris: Gauthier-villar, 1928.
[2] 荻原雄祐. 天体力学基础(上). 东京: 河出书房, 1947.
[3] Clemence G M. Rev. Mod. Phys, 1947, 19: 361.
[4] Finlay-Freundlich E. Celestial Mechanics, Chapter xv. London, New York, Paris, Los Angeles: Pergamon Press, 1958.
[5] Anderson D, Lorell, J. AiAA. Journal, 1963, 6: 1372.
[6] Mevittie G C. Astron. J, 1958, 163: 448.
[7] Pamels A G, Mcvittie G C. MN.RAS, 1966, 4: 483.
[8] Thirring H. Phys, Zeits, 1918, 3: 23.
[9] Lense, J, Thirring, H, Phys . Zeits, 1918, 19: 156.
[10] Bogorodskii, A F. Astron Zh (USSR), 1969, 136: 883.
[11] Droste J. Proc. Acad. Soc. Amst, 1916, B19: 447.
[12] de Sitter W. Proc. Acad. Soc. Amst, 1916, 19: 367.
[13] de Sitter W. MNRAS, 1916, 76: 699.
[14] de Sitter W. MNRAS, 1977, 77: 155.
[15] Levi-Civeta T. Amer. J. Math., 1937a, 59: 222; 1937b, 225.
[16] Levi-Civita T. The n-Body Problem in General Relativity. Dordrecht: Netherlands, 1964.
[17] Eddington A S, Clark G L. Proc. Roy. Soc., 1938, 166: 465.
[18] Einstein A, Infeld L, Hoffmann B. Ann. Math., 1938, 39: 65.
[19] Einstein A, Infeld L. Ann. Math., 1940, 41: 455.
[20] Einstein A, Infeld L. Can. J. Math., 1949, 1: 209.
[21] Einstein A, Roberson H P. Phys. Rev., 1936, 49: 404.
[22] Robertson H P. Ann. Math., 1938, 39: 101.
[23] Infeld L. Can. J. Math., 1953, 4: 17.
[24] Infeld L. Act. Phys. Polon., 1954, 13: 87. (in Latin)

[25] Brumberg. Astron. Zh. (USSR), 1958, 135: 893.
[26] Narlikar V V, Rao B R. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1955, 21: 416.
[27] Rao B R. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1960, 26: 168.
[28] Pyabinushka A P. Soviet Phys. JETP, 1957, 4: 935.
[29] Tulczyiew. Acta. Phys. Pol., 1959, 18: 37.
[30] Fock V A. J. Phys. (USSR), 1939, 1: 81.
[31] Fock V A. The Theory of Space, Time and Gravitation. New York: Pergamon, Translated by N. Kemmer, 1959.
[32] St. Kalitzin N. IL Nuovo Cimento B, 1958, 9: 365.
[33] St. Kalitzin N. IL Nuovo Cimento B, 1959, 11: 178.
[34] Papapetrou A. Proc. Phys. Soc., 1951, 64: 57, 302.
[35] Haywood J H. Proc. Phys. Soc., 1956, 69: 2.
[36] Akeley E S. Phil. Mag., 1931, 11: 330.
[37] Clark G L. Proc. Roy. Soc., 1941, 177: 227.
[38] Clark G L. Proc. Cambrig. Phil. Soc., 1947, 43: 164.
[39] Florides P S, Synge J L. Proc. Roy. Soc., 1962, 270: 467.
[40] Boyer R H. Proc. Cambrig. Phil. Soc., 1956, 61: 527.
[41] Li L S. Astrophys. & Space Sci., 2012, 339: 323.
[42] 易照华, 黄珹, 李林森. 天文学进展, 1994, 1: 3-10.
[43] 李林森, 黄珹. 人造卫星观测与研究, 1993, 1: 17.