

《九章算术》及衍生文献中“方田”的数学与哲学观念交汇

陈一可

内蒙古师范大学科学技术史研究院, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2025年9月22日; 录用日期: 2025年10月12日; 发布日期: 2025年10月27日

摘要

《九章算术》作为中国古代数学的经典, 其“方田章”在阐释田地面积计算时, 展现出了数学智慧与哲学思想。本文通过比较汉代刘徽《九章算术注》、唐代李淳风“九章算术疏”和宋代杨辉《详解九章算法》中田地名称、分类及算法的异同, 剖析其背后哲学观念的演变。

关键词

《九章算术》, “方田章”, 哲学思想, 刘徽, 李淳风, 杨辉

The Intersection of Mathematical and Philosophical Concepts in “Square Field Chapter” of “The Nine Chapters on the Mathematical Art” and Its Derivative Literature

Yike Chen

Institute for the History of Science and Technology, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia

Received: September 22, 2025; accepted: October 12, 2025; published: October 27, 2025

Abstract

“The Nine Chapters on the Mathematical Art,” as a classic of ancient Chinese mathematics, showcases mathematical wisdom and philosophical thought in its “Square Field Chapter” when explaining the

calculation of land area. This article analyzes the evolution of the underlying philosophical concepts by comparing the similarities and differences in the names, classifications, and algorithms of fields in Liu Hui's "Commentary on the Nine Chapters on the Mathematical Art" from the Han Dynasty, Li Chunfeng's "Annotations on the Nine Chapters on the Mathematical Art" from the Tang Dynasty, and Yang Hui's "Detailed Explanation of the Nine Chapters Algorithm" from the Song Dynasty.

Keywords

"The Nine Chapters on the Mathematical Art", "Square Field Chapter", Philosophical Thought, Liu Hui, Li Chunfeng, Yang Hui

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《九章算术》是我国西汉中期(公元前一世纪)辑为定本的一部不朽的算学典籍。它作为世界古典数学名著,与古希腊欧几里得《几何原本》东西辉映,成为人类文明史上极其珍贵的科学文化遗产。^[1]其中,《九章算术》将“方田章”作为首章,足以说明其在农耕文明中的核心地位。在查阅中国古代数学书籍的过程中,发现不同时期数学家们都有对《九章算术》田地名称进行增补或者细化,但其背后却凝聚着中国古代数学家对数字与图形间的深层洞察与理解。

本文将围绕汉代刘徽《九章算术注》、唐代李淳风“九章算术疏”以及宋代杨辉《详解九章算法》进行深入研究,并结合相关史料,通过横向对比来探究不同时代对同一土地类型的命名、分类及其计算方法的差异,借此,本文能够挖掘这些数学概念与中国古代哲学思想的内在联系,为跨学科研究提供新的视角与思路,进一步拓展数学史与哲学交叉研究的边界。

2. 刘徽《九章算术注》:实用主义与朴素经验

2.1. 汉魏田地名称与分类概述

张苍、刘徽通过对《九章算术》有关内容的阐述,提出了许多新的创造性见解,给出了许多《九章算术》所没有的新方法、新思想、新理论,从而使中国古代数学在《九章算术》的基础上又大大向前发展了一步。^[2]其把田地名称主要分为8类,分别为:方田、圭田、邪田、箕田、圆田、宛田、弧田、环田。

“方田”顾名思义,就是我们所谓泛指矩形或正方形形状的田地;“圭田”是指三角形形状的田地,“圭”是指古代帝王、诸侯举行隆重仪式时所用的玉质礼器,上尖下方,形似三角形。“邪田”是指一组对边平行且一腰与底边垂直的梯形,即现代几何中的直角梯形。在古代文言文中,“邪”意为“不正”,指非矩形的倾斜状田地;“箕田”是指两腰不相等长、两底平行但长度不等的梯形。“箕”来源于古代扬米去糠的工具——簸箕,因梯形田像簸箕而得名;“圆田”是《九章算术》“方田章”中定义的圆形田地,其面积算法是中国古代数学史上对圆的最早系统性研究;其次,“宛田”中“宛”在古代译为屈曲。其主要指中央隆起的田,类似于球冠,有点像倒扣的碗形状;“弧田”的概念就是最早在《九章算术》中被提出,主要是指圆弧与其所对的弦围成的平面图形,在现代我们称为“弓形”;最后,“环田”形状是由两个同心圆所围成的平面环带,即同心圆环,其算法彰显了中国古代对复合几何图形的精确计算能力。

在《九章算术注》中,汉代田地名称多来源于日常器物或几何形状的直观描述,例如:“圭”是指古

代帝王、诸侯举行隆重仪式时所用的玉质礼器，上尖下方，形似三角形；“箕”是古代用于扬米去糠的工具——簸箕，与梯形田相似，而弧形与环形都对应着“弧田”和“环田”。

2.2. 计算方法：直观与经验法则

在汉代，这 8 种不同的田地形状中，对于其面积计算方法也可以分为三大类。“方田”属于第一类，其面积公式为：“广纵相乘得积步。”也就是我们现代数学所讲到的长方形、正方形面积公式：长 $\times$ 宽 = 面积。“方田”的面积计算公式代表着最直接和经验性的表达，强调“实”的获取。此外，这种矩形面积计算的方法也代表着依赖观察与思辨的朴素唯物主义观点，认为数学是对现实世界的直接反映，追求实用价值。

“圭田”、“邪田”、“箕田”则属于第二类，它们的面积公式大体都通过“并而半之”、“盈补虚”等方法转化为“直田”。“圭田”是以“半广以乘正从，或半正从以乘广。”这句话中“广”这里指一个底边、“正从”指高，整句话的意思就是我们现代三角形求面积公式——底 $\times$ 高/2；“邪田”是以“并两斜，半之，以乘正从；或并两广乘半从；或并两广乘从，折半。”其中，两斜/两广指梯形两底边，意思就是将两底边相加，除以二，再乘以高；或将两底边相加，乘以高的一半；或将两底边相加后乘以高，再对半平分。对于“邪田”面积公式的记载体现了中国古代数学的算法灵活性——同一问题提供多种计算路径，适应实际测量中数据处理的便利性，印证了古代的实用主义思想。“箕田”的方法也类似：“并踵、舌而半之，以乘正纵。”其意为：将下底和上底相加后取平均值，再乘以垂直高度。刘徽从《周易》《周礼》及其郑玄注、《管子》《论语》《墨子》《老子》《庄子》《考工记》《左氏传》，以及《史记》《淮南子》《论衡》等先秦及两汉典籍中汲取了大量思想资料和逻辑方法，用于数学创造。^[3]正因此，第二类田地计算公式蕴含了一种朴素的守恒观念，认为通过几何变换，将复杂形状转化为简单形状，面积守恒。这反映了对事物内在结构和潜在秩序的认知，也充分体现了逻辑简化和问题转化的思想。

第三类土地类型则为“圆田”、“宛田”、“弧田”、“环田”。第三类土地都采用古代圆周率 $\pi \approx 3$ ，通过简单近似公式“半周、半径相乘”求圆田面积，即取圆周长的一半，乘以半径。其中，“弧田”面积以“以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一”为公式计算。“弦”具体指弓形底边，“矢”具体指弓形高。直译则是用弦长乘以矢高，再将矢高平方，两个结果相加后除以二。《九章算术》在计算“弧田”面积时看作近似为“三角形 + 半正方形”的组合。正如戴凤明学者评价刘徽：“刘徽的这种思维形式是利用主体已在头脑中建构的数学表象模式(长方体)对具有部分特征相同的数学对象(一般平面图形)进行模式补形实施整合的思维形式。”^[4]但在复杂曲线图形计算时，更强调基于经验的近似，而非严密的几何推导，反映了汉代数学在抽象层面上的局限性。总之，在汉代已经开始形成数字与图形之间的初步关联：尽管近似，但已尝试采用数值方法量化图形完成面积计算。

3. 李淳风“九章算术疏”：精微思辨与哲理阐发

3.1. 唐代数学发展的时代背景

唐代作为中国古代数学发展的黄金时期，一方面，延续自隋朝的科举制度将数学纳入考试科目，直接推动了注疏学的盛行——学者们开始解读并创新数学典籍，以适应教学之需。其次，唐代儒释道三教的思想交融是中国古代哲学的一次深刻思维碰撞，尤其在对“理”、“道”、“数”核心概念的探究上，展现出超越单一学派的理论深度，这也让唐代数学发展带有一定的哲学色彩。

3.2. 李淳风“九章算术疏”对田名与方法的精微阐释

李淳风在“九章算术疏”提出“幂”与“积”之辨，引来对“广纵相乘得积步，此积谓田幂”的深刻

思考。李淳风提出“幂是方面单布之名，积乃众数聚居之称。”其中，他指出“积”是指多个数字在一起相乘或相加得到的总结果；而“幂”是指像用一块布平铺覆盖那样，用来表示一个平面区域面积大小的特定名称。李淳风这种象征唐代“求实”的时代作风，强调概念的精确性，追求“循名责实”的严谨态度，反映了儒家正名思想在数学领域的体现。另外，在对“幂”和“积”的区分上，实际是对面积单位与数量总和的抽象思考，但实际正是从具象到抽象的哲学飞跃。

李淳风并未推翻刘徽的割圆思想，而是在其基础上进行深化和拓展，加入大量的注解和实例，丰富了“割圆术”的科学性和实用性。其方法将圆不断分割为无数小扇形，求其面积，以趋近圆面积。他强调“割之弥细，所失弥少”，“以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”。^[5]他认为真理存在于“精微”之处，是对数学真理的执着追求。正是这种无限分割与逼近的抽象思维，体现了对“无限”与“极限”的初步认知，与道家“道生一，一生二，二生三，三生万物”的生成论有异曲同工之妙。

“盈补虚”原理所谓减少多余的，补充不足的，使其相互平衡，便于运算。在唐代“九章算术疏”中该原理应用范围更广，且刘徽对其有更深入的理解。其将“盈补虚”原理上升到普适的“出入相补”原则，体现了对事物内在规律普遍性的认识。“盈”与“虚”的相互转化、相互补充形成了整体的守恒，契合了中国哲学中阴阳相衡、对立统一的思想。

3.3. 李淳风“九章算术疏”的统合与发展

李淳风“九章算术疏”作为中国古代数学典籍的集大成者，将前代数学成就梳理完善，体现了儒家学术的一统化取向。在封建社会和农耕文明背景下，“方田章”的改进始终以“经世致用”与“格物穷理”为导向。有唐一代特别注重数学教育、研究的举措，促进了宋元时期数学高峰的出现。^[6]总结下来，唐代数在强调实用价值的同时，也注重对数学原理的深入探讨，为宋代“格物致知”的兴起奠定基础。

4. 杨辉《详解九章算法》：系统化与理性回归

4.1. 宋代数学的社会背景与儒学复兴

宋代打破了各种科学知识被贵族阶层所垄断的局面，开始了知识大众化的传播历史。当然，这种新的历史局面的出现，与宋代印刷术和科举制的相对发达有关。^[7]宋代商品经济繁荣推动商人文化水平与社会地位提升，促使数学融入日常经济生活。同时，佛道思想传播冲击儒学权威，儒家学者通过理论创新与体系重构，重塑儒学思想内涵与社会影响力。

4.2. 杨辉对“方田章”田地名称的详细分类与实践创新

杨辉在《详解九章算法》中，改变《九章算术》传统、复杂的土地类型分类，将“方田章”中的土地计算方法细分为“直田法”、“里田方田法”、“圭田法”、“斜田法”、“圆田法”、“畹田法”、“弧田法”、“环田法”等 15 种算法。这种分类方法契合宋代商品经济需求，通过归纳复杂土地类型并附公式及计算规则，体现宋代民间算学的系统化与科学化。其中，杨辉明确区分“直田法”与“里田方田法”：前者为“广、从相乘为实”的矩形面积基础公式；后者引入“里”作为计量单位，并规定“一里之积三百七十五亩”的换算关系。该区分既强调不同单位下的精确换算与面积计算，也反映宋代土地丈量对精细化的需求，有助于统一单位、提升实际操作效率。

杨辉在圆田、畹田、环田计算中，沿用刘徽、祖冲之等前代数学家的高精度圆周率，摒弃误差较大的“古率”。其在圆田法中提到：“圆田法曰：半周、半径相乘；半周自乘三而一；周自乘十二而一，径自乘三之四而一；周径相乘四而一，半径自乘三之；密率，周自乘，又七因之，如八十八而一；徽术，周自乘，又二十五乘三百一十四而一。”^[8]并通过罗列“古率”、刘徽“徽率”、李淳风“李率”及祖冲之

“祖率”的计算结果，清晰展现各数值间的差异，以此凸显精确计算的重要意义。这种对计算精度的执着追求，本质上体现了宋代数学家群体的治学理念：强调对数学原理精确性的严格恪守，反映出当时数学研究向科学化、严谨化发展的趋势。

4.3. 杨辉思想的哲学内涵

杨辉以精密的推理和严谨的验证，诠释了对数学原理透彻探究、精准掌握的治学准则。这种基于事实、崇尚理性的学术态度，与宋代理学“格物穷理”的核心思想形成了跨越学科的深层共鸣。“格物穷理”作为程朱理学的核心观点，指通过探究事物以穷尽天理，达到对世界的根本认识。这种强调系统观察与归纳的世界观，促使杨辉在数学研究中追求“统之有宗，会之有元”，即建立有纲有目的分类体系，将零散的数学知识系统化，体现出理学思维在科学领域的渗透与影响。南宋陈知几评价杨辉时说：“钱塘杨辉以廉饬己，以儒饰吏，吐胸中之灵机，续前贤之奥旨。”^[9]杨辉秉持“知易行难”的经世哲学，主张数学服务实践。他强调数学命题应源于实际并经实践检验，这种“学以致用”的理念，奠定其“实用数学先驱”地位，也彰显了宋代儒学“知行合一”的治学传统，推动数学研究助力社会发展。

5. 总结

从田地名称的演变中，可以看出汉唐宋哲学思想的变迁与发展。从直观命名到系统分类。汉代刘徽对于田地的命名倾向于具象化表达，大多都来源于古代的器物和其具体的形状。在唐代，李淳风寻求通过几何变换揭示不同形状间的内在联系，开始进行对事物内在规律普遍性的认识，将“盈补虚”原理上升到普适的“出入相补”原则。再到宋代，杨辉在名称上进行细致的分类，并强调单位转换，体现了对“形”在不同条件下表示的抽象把握。

从经验法则到“穷理尽性”。汉代时，数学多为解决实际问题的“术”，方法源自经验总结，重实用而轻原理。唐代李淳风以“割圆术”为代表，将数学从“术”提升至“理”，通过探究“数”与“形”规律、辨析“幂”与“积”概念，推动数学向理论化发展。宋代杨辉继承“穷理”思想，强调计算的“精密”与“实用”，将理性精神融入田地丈量等实践，落实理学“格物致知”理念，强调数学理论与现实双重价值。

中国古代数学家对圆周率的探索，实现了从实用到理论精确的跨越。汉代以 $\pi \approx 3$ 满足基础应用，体现数学的务实性。唐代李淳风借“割圆术”引入极限思想，将 π 计算推向理论高度；宋代杨辉在田亩、工程实践中运用精密 π 值，既展现数学对“真”、“精”的执着，也呼应当时理学思潮对事物规律的探究。

《九章算术》中“田地名称”的演变是中国古代数学发展的独特标识，既展现计算技术进步，也反映一种注重算法构造性，与应用问题紧密结合，并试图为计算方法提供合理解释的数学传统。受先秦重实践思想影响，中国古代数学紧密结合生产实践，融入哲学思考提升理论高度。“方田章”从实用走向抽象，实现“知行合一”，其发展蕴含的哲学价值，值得重审其在全球数学史的地位。这启示当代：科学发展需要理论与实践协同，二者融合才能推动知识体系创新。

参考文献

- [1] 李继闵. 九章算术校证[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1993: 1-3.
- [2] 周瀚光, 孔国平. 刘徽评传[M]. 南京大学中国思想家研究中心, 编. 南京: 南京大学出版社, 1994: 15.
- [3] 郭书春. 关于《九章算术》及其刘徽注的研究[J]. 传统文化与现代化, 1997(1): 73-79.
- [4] 戴风明. 刘徽的形象思维与《九章算术注》中的几何理论[J]. 山东教育学院学报, 2001(6): 98-99.
- [5] 九章算术新校上[M]. 郭书春, 汇校. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014: 20-21.
- [6] 苏文慧. 李淳风与“算经十书”的注释[J]. 文史杂志, 2022(2): 49-52.

- [7] 吕变庭. 杨辉算书及其经济数学思想研究[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 193-194.
- [8] 任继愈. 中国科学技术典籍通汇: 数学卷 1 [M]. 郑州: 大象出版社, 2015: 1006.
- [9] 郭熙汉. 杨辉算法导读[M]. 武汉: 湖北教育出版社, 1997: 454.