

A Note on the Teaching Method of Definite of Definite Integral

Hangliang Li, Huili Pei

College of Mathematics and Information Science, Hebei University, Baoding Hebei
Email: lihongliang003@126.com

Received: Feb. 10th, 2020; accepted: Feb. 21st, 2020; published: Feb. 28th, 2020

Abstract

The high degree of abstraction of the concept of definite integral makes the teaching of definite integral face various tests. This article analyzes the educational problems encountered in the teaching of definite integral concepts and the current teaching situation, and discusses and practices the reform of definite integral teaching methods and teaching content.

Keywords

Definite Integral, Teaching Methods, Interest Education

定积分概念教学方法思考

李洪亮, 裴慧丽

河北大学, 数学与信息科学学院, 河北 保定
Email: lihongliang003@126.com

收稿日期: 2020年2月10日; 录用日期: 2020年2月21日; 发布日期: 2020年2月28日

摘 要

定积分概念的高度抽象性, 使得定积分的教学面临各种各样的考验。本文通过对定积分概念教学实践中遇到的教育问题及教学现状进行分析, 对定积分教学方法和教学内容的改革进行探讨与实践。

关键词

定积分, 教学方法, 兴趣教育

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

基础科学是现代科技发展的基石。基础学科的发展和人才储备受到各个国家的重视。中国的基础学科近些年来也有了跨越式的发展。数学一直被公认为理工科学的基础。随着数据分析的广泛应用, 数学现在更是支撑着理工学科, 社会学科, 甚至人文学科的发展。我国的数学教育发展迅速, 但也存在着一些问题的[1] [2] [3] [4]。本文针对微积分课程实践中遇到的教学问题, 探讨高等数学教育的改进方法。

微积分是高校经管类专业的基础课, 学生对微积分知识的理解和掌握程度, 影响后继课程的学习, 专业发展以及工作质量[5]。如何使抽象的微积分理论知识变得直观易懂? 如何让大学生摆脱对微积分的恐惧和厌倦, 使他们愿意学好微积分? 如何教会学生运用所学知识解决实际问题? 这些始终是微积分教学过程中不可避免的问题。在本文, 我们聚焦定积分概念, 探讨微积分的教学方法。

2. 定积分概念的导出背景

1609年至1619年间, 德国天文学家 Kepler 提出了著名的“行星运动三大定律”:

- 1) 行星在椭圆轨道上绕太阳运动, 太阳在此椭圆的一个焦点上。
- 2) 从太阳到行星的向径在相等的时间内扫过相等的面积。
- 3) 行星绕太阳公转周期的平方与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比。

这是天文学上划时代的发现(Newton 正是在证明这些定律的过程中发现了万有引力定律, 进而创立了现代天体力学), 而且也是数学发展史上的重要里程碑。

一方面, 在古希腊的数学家们发现了圆锥曲线的性质之后的一千八百多年以来, 人们从未想到过, 这样的纯数学结果居然会有如此辉煌的实际应用价值。

另一方面, 为了确定第二定律, Kepler 将椭圆中被扫过的那部分图形分割成许多小的“扇形”, 并近似地将它们看成一个一个小的三角形, 运用了一些出色的技巧对它们的面积之和求极限, 成功地计算出了所扫过的面积, 见图 1。在其卓有成效的工作中, 已包含了现代定积分思想的雏形。

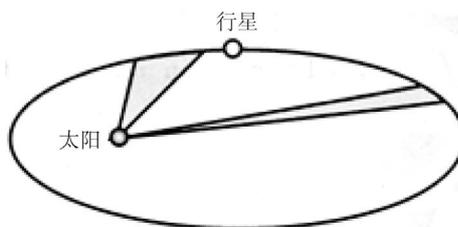


Figure 1. Three laws of planetary motion

图 1. 行星运动三大定律

例如, 求由两条直角边和一条抛物线 $y = x^2$ 所围成的所谓曲边三角形的面积, 可以采用以下的做法:

用步长 $h = 1/n$ 将 $[0, 1]$ 分成 n 个长度为 h 的小区间, 其分割点为 $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$ 。先在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 构造以 h 为底、以 $f(x_{i-1}) = x_{i-1}^2$ 为高的小矩形, 则所有这些小矩形的面积之和为

$$S'_n = \sum_{i=1}^n h \cdot x_{i-1}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 ;$$

再在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 构造以 h 为底、以 $f(x_i) = x_i^2$ 为高的小矩形, 则所有这些小矩形的面积之和为

$$S_n'' = \sum_{i=1}^n h \cdot x_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

上述过程图示见图 2

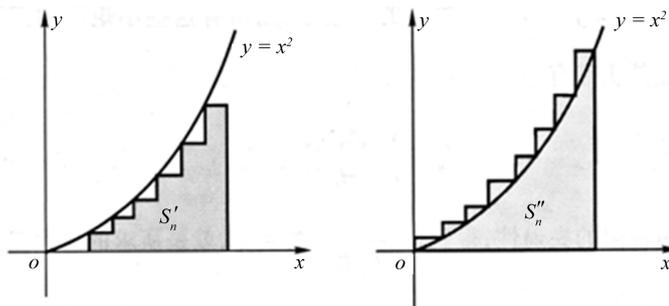


Figure 2. Calculate the area of a curved triangle
图 2. 计算曲边三角形的面积

设曲边三角形的面积为 S , 则有

$$S_n' < S < S_n''$$

利用数学归纳法, 容易证明

$$\sum_{i=1}^n (i-1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

与

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n'' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

由极限的夹逼性, 可知曲边三角形的面积为

$$S = \frac{1}{3}$$

求解曲边三角形面积的方法。进过抽象加工, 数学家导出下面的定积分定义。

3. 定积分的定义

设 $f(x)$ 是定义于 $[a, b]$ 上的有界函数, 在 $[a, b]$ 上任意取分点 $\{x_i\}_{i=0}^n$, 作成一种划分

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

并任意取点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 。记小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 并令

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i)$$

若当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在, 且极限值既与划分 P 无关, 又与对 ξ_i 的取法无关, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积。和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

称为 Riemann 和, 其极限值 I 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

这里 a 和 b 分别被称为积分的下限和上限。在上面的定义中, 要求 $a < b$ 。当 $a \geq b$ 时, 规定

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

并由此得到

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

定积分概念是微积分课程中最长的定义, 也是最难理解的概念之一。其高度的抽象性和计算的技巧性, 使得教学目的的实现在实际操作中遇到各种困难。分析并梳理定积分教学过程中遇到的实际问题是接下来的工作。

4. 定积分教学问题分析

针对前面提到的定积分教学实践问题, 剖析形成原因, 才能更好制定相应的教学计划, 改进教学方法, 改善教学效果。

4.1. 学习目标不明确

教学中, 学生学习定积分的定义往往是没有目标的, 没有学习的动力。专业发展需要决定了课程设置, 在专业知识还没有学习的情况下, 学生自然不知为何学定积分。定积分教育内容艰深难懂, 没有明确学习目标的支撑, 学生不能在学习过程中全身心投入。明确学习目标是高等教学工作者必须解决的问题, 调动学生发挥主观能动性, 自觉投入精力到学习中去。

4.2. 知识点高度抽象

定积分的概念具有高度抽象性的特点, 为什么定积分定义中极限与划分没有关系? 极限也与 ξ_i 的取法无关? 这些不能利用常见的客观存在进行解释, 理解知识点对学生有难度。定积分的教学面临一个难题——如何讲授那些高度抽象的知识点。

知识的凝练, 是历史环境推动的。为解决实际问题, 学者根据客观现象进行抽象, 将客观规律浓缩到定积分的概念中。看似抽象的数学概念, 其实都有实际背景。知识点的发展历程可以帮助学生体会抽象知识点的实际效用, 加深理解。

4.3. 学习定积分的低效性

定积分的概念高度抽象, 计算技巧性很强。熟练掌握定积分知识点, 需要学生体会定积分的意义, 在此基础上, 针对定积分的应用, 学习多种技巧, 将知识应用于解决问题。因此, 学习数学分三个层面:

理解定积分的含义; 运用技巧计算定积分; 融会贯通定积分与微分和不定积分, 建立课程知识体系。

5. 针对定积分教学问题的教学方法探讨

针对定积分教学过程中遇到的这些问题, 在实践教学中采用的教学方法。

5.1. 兴趣培养教学法

兴趣培养教学法具有前瞻性, 全面性特点。定积分教学过程中, 针对高度概括性抽象性, 利用知识点的应用前景进行讲解, 帮助学生体会知识点对所学专业解决问题带来的便捷。定积分教学过程中, 定积分用黎曼的名字命名, 即定积分的原名叫做黎曼积分。这表明我国在数学方面的研究处于落后地位。国家需要擅长数学的人才改变这种局面, 钱伟长等前辈的事迹, 让学生体会“祖国的需要就是我的专业”中的伟大情怀, 凸显中国学者为数学科学发展所作的贡献, 带动学生的学习兴趣, 激励学生在专业问题的研究热情。

5.2. 数学史教学法

数学史教学法具有联想, 追本溯源特点。教学中艰深难懂的知识点, 利用知识点所涉及的数学发展史说明, 解释定积分概念的提出动机, 产生背景。激发学生联想所学数学知识是与实际问题紧密相连的, 帮助学生克服对理解抽象概念的恐惧心理, 提高学生对相应知识点的学习兴趣。在定积分概念的讲解前, 介绍定积分的产生背景: 牛顿和莱布尼兹为了解决运动学和几何学问题, 不约而同的提出了定积分的概念。数学史教学法需要授课教师熟悉所授课程的发展历史, 各个知识点的研究背景。授课过程中, 知识点发展历程帮助学生将知识点具体化, 形象化。

5.3. 数学建模教学法

数学建模教学法具有实践性, 启发性特点。通过布置求物质的质量体积作业, 让学生在解决实际问题的过程中, 体会定积分的意义, 效用以及运用的技巧。实践作业的实施, 学生通过解决实际问题, 达到学以致用教学效果。数学建模教学法, 需要教师具有数学建模知识, 对知识点在相关专业的应用有一定认识, 利用讲授的知识点创建数学建模问题, 激发学生在解决实际问题过程中掌握知识。

6. 总结

本文归纳定积分概念教学实践过程中所遇问题, 通过分析学生遇到这些问题的原因, 针对性的采用相应的教学方法和教学方式: 兴趣培养教学法, 数学史教学法, 数学建模教学法。激发学生的学习兴趣, 培养学生的创新精神, 让学生初步感受数学的魅力。

基金项目

本文得到河北大学“课程思政改革试点课程”建设项目(KCSZ-02-044, KCSZ-02-127); 大学生创新创业训练计划项目(S201910075027X)的资助和支持。

参考文献

- [1] 余达锦, 杨淑玲. 创新创业教育背景下高等数学教学方法研究[J]. 江西财经大学学报, 2013(4): 122-128.
- [2] 杨合松. 双创教育背景下的高等数学教育创新研究[J]. 吉首大学学报, 2017(2): 207-209.
- [3] 周静静. 高等数学教学存在的问题及对策[J]. 西部素质教育, 2017(8): 207-209.
- [4] 张浩然. 高等数学教育创新模式的探索与思考[J]. 黑龙江科学, 2018(11): 26-27.
- [5] 胡俊娜. 财经类院校微积分课程教学改革与实践[J]. 纳税, 2020, 14(1): 291.