

# 高等数学课程中结合我国科技新成就的教学设计研究

——以天问一号火星探测为例

杨 超

广东外语外贸大学, 数学与统计学院, 广东 广州  
Email: yangchao@gdufs.edu.cn

收稿日期: 2020年12月5日; 录用日期: 2020年12月30日; 发布日期: 2021年1月7日

---

## 摘 要

2020年7月天问一号的成功发射是我国科学技术发展的一项重大成就。这一重大成就的背后, 离不开数学科学的发展和支撑。我们探讨如何结合火星探测器的飞行轨道设计问题, 在高等数学的课堂中引入这一微分方程的边值问题的实际例子, 加强学生对相关数学概念的理解和对高等数学学习的兴趣, 培养学生树立对我国科技事业贡献自己力量的理想, 并引导学生为之奋斗。

## 关键词

高等数学, 天问一号, 轨道设计

---

# Teaching Advanced Mathematics with the New Technological Achievements of China

—Using the Tianwen-1 Spacecraft as an Example

Chao Yang

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong  
Email: yangchao@gdufs.edu.cn

Received: Dec. 5<sup>th</sup>, 2020; accepted: Dec. 30<sup>th</sup>, 2020; published: Jan. 7<sup>th</sup>, 2021

---

## Abstract

The first spacecraft of China to explore Mars, Tianwen-1, was launched successfully in July 2020.

**This is a tremendous technological achievement of China. In this paper, we study the importance and practical plan of incorporating Tianwen-1 as an example in teaching the concept and application of differential equations in the course of advanced mathematics. This will motivate the interest of the students in learning advanced mathematics, as well as help them establish a goal in strengthening the science and technology of China.**

## Keywords

Advanced Mathematics, Tianwen-1 Spacecraft, Trajectory Design

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

高等数学是大学理科、工科、医科、金融等学科的公共基础课。在教学实践中，往往面临教学课时紧张，学生感到课程内容较难等客观情况的制约。如何调动学生的积极性，让学生在课程中学到终身受益的知识，是大学数学教学工作常常思考的问题。

2020年7月23日，在我国海南文昌卫星发射中心，长征五号火箭把重达五吨的天问一号火星探测器成功送入轨道。天问一号开启了半年多的征程，将于2021年初抵达火星并开展绕、落、巡三大任务[1]。这是我国航天事业的一个新的里程碑，每一位中国人都为此骄傲和自豪。这一巨大成就的背后，也离不开数学的应用与支撑。我们应该借此机会，在高等数学课程的教学，引入天问一号火星探测器的例子，促进教学的效果。

本文探讨在高等数学课程中，结合天问一号火星探测器的轨道设计问题进行教学的意义和可行性分析，并给出由此问题引出的微分方程的概念与应用的具体教学实践方案。

## 2. 在高等数学教学中引入天问一号轨道设计问题的意义和可行性

2016年12月，习近平总书记对高校思想政治工作做出了重要指示，强调高校思想政治工作根本在于做人的工作，中心环节在于立德树人，核心在于提高人才培养能力。大学数学教学中，可以结合国家科技发展中的重大进步，激发学生立志成才的信心，努力打好数学基础，做好将来为祖国建设添砖加瓦的准备。而天问一号探测卫星的成功发射，标志着我国探索太阳系的步伐迈出了坚实的一步。把天问一号背后的数学问题引入到高等数学的课堂，有利于学生直观地感受到科技在国家发展中的重要地位，并且了解到高等数学课程中学习到的知识与此密切相关。这就激发了学生学习的主动性。

2019年7月，科技部、教育部、中国科学院和自然科学基金委四部委联合制定并发布了《关于加强数学学科研究工作方案》。培养优秀人才是其中的一个关键，在高等数学的课堂中结合科技发展新成就来引导和培养学生的学习兴趣，也是把这一方案落实到实处的重要举措。

在我国高校普遍使用的高等数学教材中，都用一章专门讲述微分方程的求解。但教材中的应用的例子有些过于陈旧，也没有和我国的科技进步结合起来，难以激发学生的兴趣。天问一号的轨道设计问题，就是微分方程最生动的应用。在微分方程章节的教学中，加入天问一号的例子，可以增强课堂的活力，使学生感受到数学不再枯燥。在天问一号成功发射前后，网络上许多科普平台或自媒体也借此进行了科普。但我发现这些科普文章大多着重于解释火星地形地貌、火星生命迹象等和物理、化学和生物等学科

相关的知识。与数学关系密切的飞行轨道问题，各类科普文章往往都只是浅尝辄止地提了一下霍曼转移轨道的概念。大众科普中对天问一号火星探测中所涉及的数学问题的忽视令人感到惋惜，这错失了一个极好的展示数学的重要性的机会。有高等数学基础的学生，都完全具备了理解探索火星的轨道设计中的基本数学问题的能力。因此，借助高等数学课堂，引导学生了解数学在其中所起到的重要的作用，可填补社会大众科普中被忽略的遗憾。

此外，除了少部分物理相关专业，大部分学习高等数学的学生都没有数学物理方程等后继课程。虽然他们具备了一定的高等数学基础，但是若独立阅读轨道动力学等教材或专著时，由于专门术语过于晦涩等各种原因，可能会感到力不从心，失去了进一步了解的信心。所以，在高等数学课堂上，更值得教师用天问一号的例子给予学生恰当的引导，帮助学生突破障碍，用高等数学中的语言和记号来深入浅出的向学生阐明其中的基本问题和方法。学生在教师的引导下举一反三，增加自我学习的能力。

### 3. 轨道设计的问题分解思想

火星探测器的轨道设计是一个复杂的工程问题，也是一个数学建模问题。把一个大问题分解成几个小问题是解决实际问题的重要思想，我们通过火星探测的轨道设计问题，向学生介绍这个重要思想方法，培养学生数学建模解决实际问题的能力。

对火星探测器而言，我们可以把其整个飞行轨迹分解成三段[2]，相应地对应了三个问题(图 1)。

第一段，从火星发射，到探测器与火箭分离，再到探测器飞出地球引力作用范围。在这一段中，地球引力、火箭的推力和空气阻力都影响着火箭和探测器的飞行。其中从火箭分离到飞出地球引力范围这一段，可近似认为飞行器只受到地球引力作用以双曲线逃逸轨道飞离地球。

第二段，从飞出地球的引力范围，到飞入火星的引力范围。这个过程中，除了少数的几次中途修正和深空机动以外，基本上只受太阳引力作用，飞行轨道是一条以太阳为焦点的椭圆轨道，称为地火转移轨道。一般选取接近于霍曼转移轨道的方案。

第三段，飞入火星引力范围后，探测器启动近火刹车，减慢速度，以便被火星引力捕获而进行环绕火星轨道。由于探测器携带推进剂有限，探测器距离地球太远无法实时控制，这一步的精准减速也非常重要，否则若时机没有把握好，机会转瞬即逝，飞离火星就难以再飞回来了。这一段中，火星引力起到主要作用，也可以近似看成一个二体问题。



**Figure 1.** Illustration of the trajectory to Mars in 3 sections: Earth on the left, Mars on the right, and the spheres of gravity influence are represented by dashed lines

**图 1.** 三段轨道示意图：左边为地球，右边为火星，虚线表示引力作用范围

前面提到，很多网络科普只强调了霍曼转移轨道，这实际上只对应了上述三段轨道中的第二段，而忽略了轨道设计问题的整体性和三段之间的连接性。

### 4. 用边值问题求解地火转移轨道

霍曼轨道指的是如图 2 所示的一种轨道设计方案。在一个理想的近似模型下，假设地球和火星都是

以圆周轨道绕太阳公转。霍曼转移轨道为一条以太阳为焦点的椭圆轨道，以地日距离为该椭圆轨道的近日点，且以火日距离为该椭圆轨道的远日点。因此，刚好飞行半个椭圆在远日点处达到火星轨道，这需要火星刚好运行到该处才行。由此倒推在发射时刻，地日连线和火日连线必须为大约 40 度左右。这样的机会因地球和火星公转的速度不同，每 26 个月才有一次，被称为火星探测器的发射窗口。

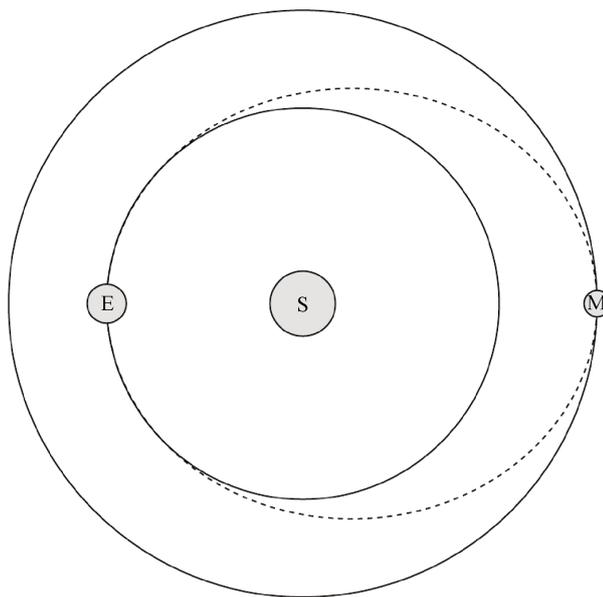


Figure 2. The Hohmann transfer orbit  
图 2. 霍曼轨道示意图

按照霍曼转移轨道，我们在发射阶段，借助火箭的推力把探测器加速推进椭圆轨道。因为火星引力约为地球的三分之一，在探测器接近火星时，用自身携带的燃料减速，以便被火星的引力捕获而进入绕火星轨道。这样的霍曼轨道方案，总体上是最节省燃料的。

在实际的发射计划中，受到天气、发射场地理位置、火箭性能等各种因素的影响，不可能完美地按照理论上的霍曼轨道飞行，而必须在窗口期内的连续多天设计和计算不同的发射和地火转移轨道计划，以确保发射万无一失。在这个一个月左右的窗口期内，地火相对位置和理想位置接近，所以总的来说都是比较节省燃料的，接近理论上的最优霍曼转移轨道设计。据报道，这次天问一号的发射，连续 14 天每天设计了 3 条不同的轨道，共 42 条轨道，每条轨道的发射窗口时间为 10 分钟。可见，为了我国首次自主火星探测计划的成功，科技工作者做了大量的数学计算。

那么，每条轨道究竟是如何计算出来的呢？我们根据地球和火星的运行轨迹，选定一个从地球出发的时间和空间位置，并且选定一个到达火星的时间和空间位置，而中间的飞行阶段只受到太阳引力的作用，可以用牛顿第二定律和万有引力定律来描述。所以，这就建立了一个典型的微分方程边值问题：

$$\begin{cases} -\frac{GM}{\|r\|^3}r = \ddot{r}, \\ r(0) = r_0, \\ r(T) = r_T. \end{cases} \quad (1)$$

上式中  $G$  为万有引力常数， $M$  为太阳的质量， $T$  为总飞行时间， $r(t)$  就是待求解的探测器关于时间  $t$  的飞行轨迹函数。这个微分方程的边值问题(1)在文献中称为 Lambert 问题[3] [4]。这个问题在人类向太空

发射探测器之前就被深入研究并且有成熟的求解方法。这个例子也充分说明了数学基础研究具有前瞻性。

由边值问题得到数值解后,我们就可以算得火星探测器在特定时间地点飞离地球引力范围时的速度。根据这个速度,我们再反推计算出器箭分离的时间位置和速度,然后再由此设计火箭的发射计划,以便火箭精准地把探测器送入预定轨道。类似地,我们也根据抵达火星引力范围的时间地点和速度来设计和计算最后的近火刹车方案,这一步有待根据实际飞行过程中我们在地球上对探测器的实际监控数据进行调整。

由此可见,第二段地火转移轨道的设计是整个轨道设计的关键和入手点。而第一段火箭发射和第三段探测器的近火制动因受到的作用力较多,其涉及的数学问题相对于第二段也更复杂一些。因此,选择第二段地火转移轨道的计算问题作为高等数学课堂微分方程的例子是比较合适的。网上的一些对天问一号的科普局限于介绍霍曼转移的理想情形,而我们结合微分方程边值问题向学生讲解,有助于让学生明白在实践中是如何具体应用的。

## 5. 小结和展望

我们阐述了在高等数学课程中引入天问一号的例子进行教学的重要性,并且给出了如何进行教学的具体方案。根据以往教学检验,学生对星际探索兴趣比较浓厚,结合天问一号进行教学对调动学生课堂的主观能动性将会起到积极作用。在2020年度秋季学期的高等数学课上,笔者已经把这一设计进行了教学实践,在第一节课开场白中用天问一号的轨道设计作为例子说明高等数学课程的重要性,课堂效果良好。对有兴趣的同学,我们还应该考虑课后如何进一步引导学生深入学习相关知识。如火箭发射阶段可以向学生介绍齐奥尔科夫斯基理想火箭方程,这也是我们今后的高等数学教学中如何更好地结合我国航天科技成就值得继续探讨的问题。

## 基金项目

广东外语外贸大学引进人才科研启动项目(299-X5219228),广东外语外贸大学横向项目(297-ZW200011)。

## 参考文献

- [1] Wan, W.X., Wang, C., Li, C.L. and Wei, Y. (2020) China's First Mission to Mars. *Nature Astronomy*, **4**, 721. <https://doi.org/10.1038/s41550-020-1148-6>
- [2] 耿光有, 王珏, 侯锡云, 等. 长征运载火箭发射地火直接转移轨道研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2020, 46(1): 20-28.
- [3] Kluever, C.A. (2018) *Space Flight Dynamics*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- [4] Hintz, G.R. (2015) *Orbital Mechanics and Astrodynamics*. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-09444-1>