

数学归纳法在高中数学中的应用

孙媛媛, 王立波

北华大学数学与统计学院, 吉林 吉林

收稿日期: 2022年9月22日; 录用日期: 2022年10月19日; 发布日期: 2022年10月26日

摘要

数学归纳法是一种重要的数学论证方法, 也是高中阶段选修部分的重要内容。但是, 同学们对数学归纳法缺少全面认识, 在证明过程中常常出现错误。本文通过查阅有关资料并结合自身所学总结了数学归纳法的证明步骤, 归纳了不等式证明的常用方法, 整理了学生常犯错误类型并在文章最后提出了一些教学建议。

关键词

数学归纳法, 不等式, 证明方法, 教学建议

The Applications of Mathematical Induction in Senior High School Mathematics

Yuanyuan Sun, Libo Wang

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: Sep. 22nd 2022; accepted: Oct. 19th, 2022; published: Oct. 26th, 2022

Abstract

Mathematical Induction is not only an important mathematical argumentation method, but also an important elective course in high school. However, many students lack understanding of mathematical induction and always make mistakes in the process of proof. This paper mainly analyzes the following four contents by reviewing relevant books and my own learning. First, the steps of proof are summarized. Second, the common methods of inequality proved by mathematical induction are summarized. Third, summarize the types of mistakes students often make. Finally, this paper puts forward some reasonable suggestions.

Keywords

Mathematical Induction, Inequality, Proof Method, Teaching Suggestion

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

“数学归纳法”是高中数学的重要组成部分，内容体系中蕴含着深刻的数学思想方法。著名数学家拉普拉斯曾经说过：“即使在数学里，发现真理的主要工具也是归纳和类比。”[1]但是很多同学不能准确理解数学归纳法的原理，在使用数学归纳法进行不等式证明时经常出现错误。本文将数学归纳法为主展开研究，概述了数学归纳法的步骤，以人教版A版为例对该部分内容进行了教材分析，总结了不等式证明的几种方法并进行了错因分析来帮助同学们更好的应用数学归纳法。

2. 数学归纳法的步骤

采用数学归纳法来证明一个与正整数 n 有关的命题时，一般按照以下两个步骤进行：

1) 归纳奠基：证明当 $n = n_0$ ($n_0 \in N^*$) 时，命题成立；

2) 归纳递推：以“当 $n = k$ ($k \geq n_0, k \in N^*$) 时命题成立”为条件，推出“当 $n = k + 1$ 时命题也成立”。

数学归纳法不同于一般的归纳，它是经过严格的演绎证明的。同学们在解题过程中经常会在归纳假设中出错，因此需要牢记以上两个步骤缺一不可。

说明：具体证明步骤参照如下结构流程图(图1)。

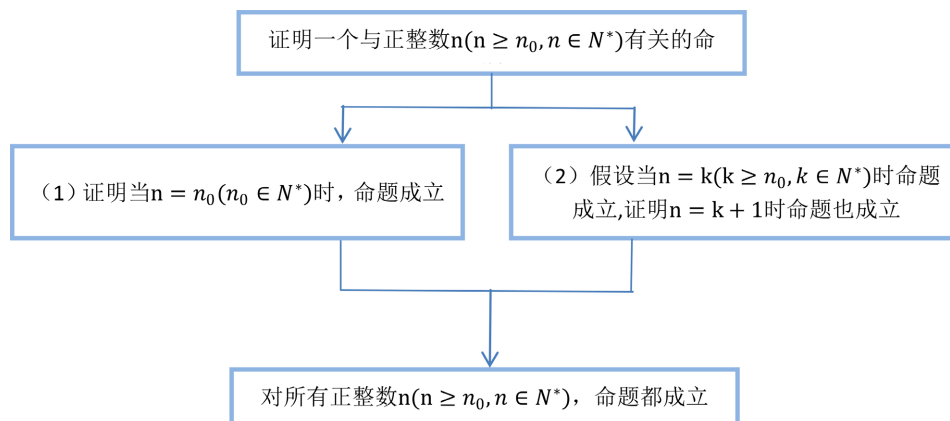


Figure 1. Structure flow chart of mathematical induction

图1. 数学归纳法结构流程图

3. 数学归纳法的重要性

数学归纳法是一种特殊的数学演绎证明方法，用于证明与正整数有关的数学命题，某些时候是其他方法难以替代的。我国著名数学家华罗庚指出：“数学归纳法这个方法很重要，学好了，学透了，对进一步学好高等数学有帮助，甚至对认识数学的性质，也会有所裨益。”[2]

数学归纳法除了作为一种重要的证明方法之外, 还可以培养学生的数学思维能力。数学归纳法通常是在先对大量的事实进行观察后, 对归纳概括出的结论采用数学归纳法的证明方式, 这个过程完成了从特殊到一般的转化, 并且为学生提供了一种新的思维方式, 即观察 - 归纳 - 猜想 - 证明。

4. 数学归纳法的教材分析(以人教版 A 版为例)

在人教版 A 版选择性必修第二册教材中, 数学归纳法在数列一章第四小节。教材中以一个探究问题展开讲解。问题如下:

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 计算 a_2 , a_3 , a_4 , 猜想数列的通项公式, 并进行证明。

之后以多米诺骨牌游戏为情境类比概括出数学归纳法的一般步骤。教科书一方面通过引例提出猜想, 寻求证明猜想的方法; 另一方面挖掘“骨牌原理”, 类比“骨牌原理”寻找和构建递推关系, 呈现了数学归纳法产生的必要性与合理性。

具体说来, 教科书采用的编写思路是: 设置探究栏目引出如何证明与正整数 n 有关的数学命题的问题, 引发学生对数学归纳法的学习兴趣 → 挖掘多米诺骨牌全部倒下的原理(以下统称“骨牌原理”) → 类比、迁移“骨牌原理”, 获得证明数学命题的方法 → 推广得到数学归纳法的原理。因此, 数学归纳法的形成过程, 蕴含了类比、迁移、从特殊到一般的抽象过程。这种编排方式符合弗赖登塔尔和华罗庚先生对如何正确学习数学归纳法的阐释, 把用数学归纳法才能解决的问题呈现在学生面前, 使学生在形成直观认识的基础上发现这个方法。

1) 强化引例引导功能。为了使學生感受引入数学归纳法的必要性, 教科书引入一个递推关系简洁明了、但其通项公式不能用常规方法严格证明的数列问题, 并设置探究栏目进一步说明常规证明方法在解决这一问题时的不足, 然后指明寻求新方法的方向: “通过有限个步骤的推理, 证明 n 取所有正整数时命题都成立”。

2) 深度挖掘“骨牌原理”为了突出“现实情境 - 数学问题 - 数学形式化”的研究轨迹, 教科书详细分析了“骨牌原理”, 并通过思考栏目, 引导学生分析使所有多米诺骨牌都能倒下的两个条件:

- ① 第一块骨牌倒下;
- ② 任意相邻的两块骨牌, 前一块倒下一定导致后一块倒下。

3) 概括、提炼数学归纳法的原理有了以上铺垫, 数学归纳法原理的得出是非常自然、水到渠成的。需要指出的是, 教科书只是结合具体问题抽象出数学归纳法的原理。在教学中, 教师还可根据学生的实际, 利用拓展资源让学生了解数学归纳法的其他形式, 帮助学生加深和拓展对数学归纳法原理的认知。

5. 数学归纳法在高中数学中的应用(不等式证明)

5.1. 放缩法证明不等式[3]

放缩法: 重点在于找到一个合适的中间量, 将不等式的一边进行变大或变小的操作, 通过不等式的传递性来证明命题。

举例: 证明 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ 成立

证明: ① 当 $n = 2$ 时, 原不等式显然成立;

② 假设当 $n = k$ 时, 有不等式 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k} (k \geq 2)$ 成立,

那么, 当 $n = k + 1$ 时, 不等式左右两边同时加上 $\frac{1}{(k+1)^2}$, 有

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)^2} < 2 - \frac{k^2 + k}{k(k+1)^2} = 2 - \frac{1}{k+1}$$

即证得当 $n = k + 1$ 时原不等式成立。

综上所述, $\forall n \geq 2, n \in N$, 都有上述不等式成立。

5.2. 替代法证明不等式

在一些不等式的证明过程中, 由于归纳假设的形式不好利用, 需要将不等式中的一些项替换成其它项的形式, 从而完成不等式的证明。

举例: 证明 $2^n > n^2, (n \in N, n \geq 5)$ 成立。

证明: ① 当 $n = 5$ 时, 左边 $= 32 > 25 =$ 右边, 原不等式显然成立;

② 假设当 $n = k$ 时, 有不等式 $2^k > k^2$ 成立,

则有 $2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1$,

因此, 当 $n = k + 1$ 时, 不等式也成立。

综上所述, 原不等式 $2^n > n^2, (n \in N, n \geq 5)$ 得证。

5.3. 传递法证明不等式

用传递法来证明不等式, 最重要的就是要找到一个合适的中间量来过度, 这里主要运用了不等式的传递性, 即“如果 $x > y, y > z$; 那么 $x > z$ ”。

举例: 若 $0 < a < b$, 证明 $a^n < b^n (n \in N)$ 。

证明: ① 当 $n = 1$ 时, $a < b$, 原不等式显然成立;

② 假设当 $n = k$ 时, 有不等式 $a^k < b^k$ 成立,

则 $a \cdot a^k < a \cdot b^k < b \cdot b^k$,

即有 $a^{k+1} < b^{k+1}$ 成立,

故证得当 $n = k + 1$ 时原不等式。

综上所述, 原不等式得证。

5.4. 比较法证明不等式

这种方法在不等式的证明中也是比较常见的, 主要包括比值以及差值比较法。

除了以上列举的四种不等式证明的应用, 还包括反证法证明不等式、综合法证明不等式等等。

6. 学生在学习数学归纳法的问题

6.1. 概念上的困难

学生在学习数学归纳法时经常会将其与归纳的概念混淆。归纳法是在有限的例子中, 通过寻找规律, 大胆猜想概括出一般性结论的方法。很多重大的数学发现都归功于归纳法的巨大作用, 比如哥德巴赫猜想的提出, 但是通过归纳得出的结论并没有经过严密的证明, 尤其是在运用不完全归纳法时。因此, 通过归纳得出的结论有可能是错误的, 比如著名的“费马猜想”。但是数学归纳法并非如此, 数学归纳法

是通过严密的演绎证明得出的结论, 因此, 结论是完全正确的。

6.2. 在证明过程中的常见错误

1) 不用假设导致错误

举例: 用数学归纳法证明 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, ($n \in N^*$)

错证: ① 当 $n=1$ 时, 等式左边 $= 1 =$ 右边, 所以等式成立;

② 假设当 $n=k$ 时, 等式成立,

则有 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ 。

那么当 $n=k+1$ 时,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1] = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

即当 $n=k+1$ 时, 等式成立。

由①②可得, 对任意 $n \in N^*$, 等式皆成立。

分析: 用数学归纳法证明第②步骤时, 在从“ k ”到“ $k+1$ ”的过程中, 要把 $n=k$ 的命题作为给定条件, 在此基础上推导出 $n=k+1$ 时的命题。所以在推导过程中, 要使用 $n=k$ 时的条件, 本解法错因是对假设设而不用。

正解: ① 当 $n=1$ 时, 等式左边 $= 1 =$ 右边, 所以等式成立;

② 假设当 $n=k$ 时, 等式成立,

则有 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ 。

那么当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1] \end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时, 等式成立。

由①②可得, 对任意 $n \in N^*$, 等式皆成立。

2) 不能深刻理解数学归纳法两个步骤的内涵

举例: 当 n 为正奇数时, $7^n + 1$ 能否被 8 整除?

错证: ① 当 $n=1$ 时, $7+1=8$ 可以被 8 整除, 所以命题成立;

② 假设当 $n=k$ 时, 命题成立, 即 $7^k + 1$ 可以被 8 整除,

那么当 $n=k+1$ 时, $7^{k+1} + 1 = 7(7^k + 1) - 6$, 不能被 8 整除,

因此, $7^n + 1$ 不能被 8 整除, 故命题不成立。

分析: 机械套用归纳奠基、归纳递推两个步骤, 忽略了题目中所给出的 n 为正奇数的已知条件, 导致证明错误。

正解: ① 当 $n=1$ 时, $7+1=8$ 可以被 8 整除, 所以命题成立;

② 假设当 $n=k$ 时, 命题成立, 即 $7^k + 1$ 可以被 8 整除,

那么当 $n = k + 2$ 时, $7^{k+2} + 1 = 7^2(7^k + 1) + 1 - 7^2 = 49(7^k + 1) - 48$ 。

因为 $7^k + 1$ 可以被 8 整除, 并且 48 能被 8 整除, 所以, $7^{k+2} + 1$ 可以被 8 整除。

所以, 当 $n = k + 2$ 时, 命题成立。

由①②可得, 当 n 为正奇数时, $7^n + 1$ 能被 8 整除。

3) 没有弄清楚从 k 到 $k + 1$ 的跨度

举例: 用数学归纳法证明 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$ 。

错证: ① 当 $n = 1$ 时, 左边 = $\frac{13}{12} > 1 =$ 右边, 不等式显然成立;

② 假设当 $n = k$ 时, 命题成立, 即有 $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1$ 成立,

那么当 $n = k + 1$ 时, $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3(k+1)+1} > 1 + \frac{1}{3k+1} > 1$,

即证得当 $n = k + 1$ 时, 不等式成立。

由①②可得, 原不等式成立。

分析: 上述证明过程中, 从 k 到 $k + 1$ 的变化只增加了一项, 根据题目所给的不等式可以看出, 分母是相邻的自然数, 因此不等式左边从 k 到 $k + 1$ 应该增加了 $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3(k+1)} + \frac{1}{3(k+1)+1}$, 三项。所以上述证明过程是错误的。

正解: ① 当 $n = 1$ 时, 左边 = $\frac{13}{12} > 1 =$ 右边, 不等式显然成立;

② 假设当 $n = k$ 时, 命题成立, 即有 $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1$ 成立,

那么当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3(k+1)} + \frac{1}{3(k+1)+1} \\ &= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} \right) + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3(k+1)} + \frac{1}{3(k+1)+1} - \frac{1}{k+1} \\ &> 1 + \left[\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} - \frac{2}{3(k+1)} \right] \\ &= 1 + \frac{6(k+1)}{9k^2+18k+8} - \frac{6(k+1)}{9k^2+18k+9} \\ &> 1 \end{aligned}$$

即证得当 $n = k + 1$ 时, 不等式成立。

由①②可得, 原不等式成立。

以上是一些学生在应用数学归纳法时容易出现的问题, 因此, 同学们应该深刻理解数学归纳法“归纳奠基”与“归纳递推”两个步骤是相互依存、缺一不可的。只有将二者有机结合起来, 才能保证整个证明过程的准确性。

7. 教学建议

虽然在高中教材中对数学归纳法的要求并不高, 原因在于课程标准讲其划分到了选学内容, 但是考试中对数学归纳法的要求并没有放低, 可以说命题率还是比较高的。因此, 教师对该部分内容的讲解应

该做更深一步的探讨。在实际学习中,很多同学不能正确区分数学归纳法与归纳法之间的关系,也不能准确理解数学归纳法的两个步骤,在归纳假设,从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的过渡中经常出现各种各样的错误。因此,教师在讲解该部分内容时,应该更加注重基本原理的教学,给出具体实例并列举错误形式来加深同学们的理解。

对数学归纳法进行多方面的价值分析,不应该只是为了高考成绩对其进行题目上的专项训练。在对数学归纳法的学习中,师生应该注意到数学归纳法的潜在价值,比如说,可以锻炼学生的数学思维,有助于提升学生的抽象概括能力等等。

参考文献

- [1] 李朋,陈艳妮.谈归纳类比对数学发现的作用[J].陕西师范大学继续教育学报,2006(S1):255-257.
- [2] 华罗庚.数学归纳法[M].上海:上海教育出版社,1964.
- [3] 石萌萌.数学归纳法在不等式证明中的一些应用[D]:[硕士学位论文].西安:西北大学,2018.