

将思政元素融入高等代数课堂教学的探索与实践

尹小艳*, 杨丹丹

西安电子科技大学数学与统计学院, 陕西 西安

收稿日期: 2022年10月10日; 录用日期: 2022年11月9日; 发布日期: 2022年11月16日

摘要

本文总结和分享了作者在数学类专业基础课程《高等代数》的课堂教学中融入课程思政的探索和实践, 即通过知识课堂、实践课堂、人文课堂的有机融合, 构建“知识传授有深度、思维培养有力度, 实践应用有广度、能力提升有高度, 文化熏陶多角度、价值引领有温度”的高等代数“三课六度”课程思政课堂教学体系。

关键词

立德树人, 高等代数, 课程思政, 课堂教学

Exploration and Practice of Ideological and Political Education in Advanced Algebra Classroom Teaching

Xiaoyan Yin*, Dandan Yang

School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an Shaanxi

Received: Oct. 10th, 2022; accepted: Nov. 9th, 2022; published: Nov. 16th, 2022

Abstract

This paper shares and summarizes the exploration and practice of ideological education, including digging out ideology materials and optimizing the teaching design in advanced algebra classroom teaching which has always been the most important and fundamental professional course for all

*通讯作者。

majors in mathematics in universities. To sum up, we construct a “three lessons and six degrees” ideological teaching system by combining organically knowledge, applications and culture edification together in classroom teaching.

Keywords

Moral Education, Advanced Algebra, Ideological and Political Course, Classroom Teaching

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

2016年习近平总书记在全国高校思想政治工作会议上强调,“要用好课堂教学这个主渠道,各类课程都要与思想政治理论课同向同行,形成协同效应”。自此,课程思政成为各高校教学改革的重要方向。目前全国高校各门类课程的思政建设不断走向深入,其中数学类课程思政的探索与实践大多集中在线性代数、高等数学等工科数学公共课程,在思政体系建设[1] [2] [3]、思政案例设计[4] [5] [6]、思政实施途径[7]等方面取得诸多成果。而对数学各分支的专业课程如高等代数、数学分析等,课程思政建设的相关成果较少。

作为数学学科的核心专业课,高等代数课程体系完备、应用广泛、内容抽象、逻辑严密,蕴含丰富的数学智慧和哲学思想,是进行思政融入、培养理性思维、提升科学素养的良好载体。本文结合西安电子科技大学高等代数省级一流课程建设实践,梳理和总结了作者在高等代数课堂教学过程中进行课程思政建设的方法,即通过三个课堂——知识课堂、实践课堂、人文课堂的有机融合,从数学的思维培养、应用价值、哲学观点、美育元素多方面进行思政融入,建设“知识传授有深度、思维培养有力度,实践应用有广度、能力提升有高度,文化熏陶多角度、价值引领有温度”的高等代数课程思政教学体系。

2. 课程思政的教学实践

2020年5月教育部印发的《高等学校课程思政建设指导纲要》指出:“要根据不同学科专业的特色和优势,深入研究不同专业的育人目标,深度挖掘和提炼专业知识体系中所蕴含的思想价值和精神内涵,科学合理拓展专业课程的深度、广度和温度”,为全国各高校在专业课程中践行课程思政指明了方向。据此,我们从思维培养、能力提升、价值塑造三个方面,以课程内容为载体,让每一节课成为知识课堂、实践课堂、人文课堂的有机融合,落实思政元素“在知识传播中实现价值引领,价值塑造中凝聚知识底蕴”。

2.1. 优化拓展知识,强化思维培养,打造“知识传授有深度、思维培养有力度”的知识课堂

我校高等代数课程采用的教材为北京大学数学系前代数小组编写的《高等代数》(第五版)。在教学过程中,我们以“两性一度”为标准,重组优化了个别章节教学内容,并进行适度引申拓展。

比如学习多项式带余除法,推广介绍了秦九韶与中国剩余定理;实对称矩阵正交对角化一节自然拓展,介绍奇异值与奇异值分解;Jordan标准形理论其实就是复矩阵的相似块对角化,由此拓展介绍矩阵Schur分解,即复矩阵的相似三角化;矩阵的逆一节,从可逆方阵推广到任意长方阵,简单介绍矩阵M-P逆及其在最小二乘问题中的应用等。对拓展内容在教学形式上采取了开设培优研讨班、结对互助组等多种形式,注重因材施教、分层教学。

达尔文曾说：“最好的知识是关于方法的知识”。德国哲学家、教育家雅斯贝尔斯在其著作《什么是教育》中也说到：“教育就是一棵树摇动一棵树，一朵云推动一朵云，一个灵魂唤醒另一个灵魂”。在高等代数的日常授课中，更注重以知识为载体，强化学生的数学思维培养。比如，矩阵的标准形理论(相抵标准形、合同标准形、Jordan 标准形)，分别讨论了矩阵在相抵关系(初等变换作用下)、合同关系和相似关系下最简单、最特殊、最本质的形式，因此在讲授过程中，教师需强调这几种关系下的本质不变量及标准形理论中所蕴含的从简单到复杂、从特殊到一般的思维模式；又如有限维线性空间的概念，从大家熟悉的几何空间 R^3 到数域 P 上 n 元有序数组构成的 n 维线性空间 P^n ，再到 P 上任意 n 维线性空间 V_n^P ，在集合概念的基础上，通过加法和数乘这两种封闭性的线性运算使得元素之间形成自成一体的严密结构，完美体现了从具体到抽象的演绎方法；而基的概念，则是通过其中有限个基本元素(空间的基)来研究空间中的所有(无限个)元素，实现从无限到有限的转化。在授课过程中，要带领学生感受线性空间及其基的结构化理论中所包含的从具体到抽象、化无限为有限的数学力量。

两个重要同构($V_n^P \cong P^n$, $L(V_n^P) \cong P^{n \times n}$ ，这里 V_n^P 表示数域 P 上任意 n 维线性空间， $L(V_n^P)$ 表示 V_n^P 上所有线性变换构成的线性空间， $P^{n \times n}$ 表示数域 P 上所有 n 阶方阵构成的线性空间)，分别把 V_n^P 、 $L(V_n^P)$ 中复杂、抽象的元素及运算转化为简单、具体的向量、矩阵及其运算。深刻理解同构关系是讨论线性变换的秩、特征值和特征向量，线性变换的值域空间与核空间的结构等问题的前提和基石，授课过程中要带领学生反复领悟同构对应所蕴含的化抽象为具体的数学智慧。

正如著名数学家华罗庚所言：“数缺形时少直观，形少数时难入微”。在授课过程中，还要注重代数方法与几何直观的有机融合。比如二/三阶行列式的几何意义，二、三阶旋转/反射矩阵的几何意义，矩阵秩的几何意义($\text{rank}(A) = \dim \text{Range}(A) = \dim \sigma V$ ，其中 σ 为矩阵 A 所代表的线性变换)，齐次线性方程组的解的几何意义($\{x | Ax = 0\} = \text{Range}(A')$)，特征值与特征向量的几何意义等，并从数形结合的角度理解和阐释相关的许多结论，带领学生体会数形结合的数学方法及其在解释相关问题时常常为我们带来的“柳暗花明”的惊喜。比如我们可以从几何角度如下解释矩阵乘积的秩不超过其因子的秩以及有限维线性空间上线性变换的维数公式，简洁易懂：

例 1 设 A, B 分别为数域 P 上 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵，证明 $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ 。

证 由矩阵秩的几何意义，矩阵的秩等于其列空间(也称为矩阵的值域)的维数。于是

$$\text{rank}(AB) = \dim(\text{Range}(AB)) = \dim\{ABx | \forall x \in P^s\},$$

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Range}(A)) = \dim\{Ay | \forall y \in P^n\},$$

显然， $\{ABx | \forall x \in P^s\} \subseteq \{Ay | \forall y \in P^n\}$ ，i.e., $\text{Range}(AB) \subseteq \text{Range}(A)$ ，

故 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ 。又由 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B^T A^T) \leq \text{rank}(B^T) = \text{rank}(B)$ ，命题得证。

例 2 (线性变换的维数公式) 设 σ 为数域 P 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，则有

$$\sigma \text{ 的秩} + \sigma \text{ 的零度} = n, \text{ i.e., } \dim \sigma V + \dim \sigma^{-1}(0) = n.$$

证 任取 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ，记 σ 在这组基下的矩阵为 A ，由矩阵秩的几何意义知， $\dim \sigma V = \text{rank}(A)$ ，且对 $\forall \alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n$ ，有

$$\alpha \in \sigma^{-1}(0) \Leftrightarrow Ax = 0, x = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

由 V 与 P^n 的同构知， $\dim \sigma^{-1}(0) = \dim\{x | Ax = 0\} = n - \text{rank}(A)$ ，于是命题显然成立。

当然，高等代数中还包含许多重要的数学思想，如空间分解、等价分类、类比推理(从整数性质类推

到多项式,用直角坐标系类比标准正交基,从几何空间中的长度、夹角等类推欧氏空间相应概念)等,在每节课的内容小结部分,都添加“思维培养”模块,强化数学思维的渗透和熏陶。同时带领学生领略高等代数严密的逻辑美、抽象的形式美、简洁的符号美,打造“知识传授有深度、思维培养有力度”的知识课堂。

2.2. 梳理知识体系,引入丰富案例,打造“实践应用有广度、能力提升有高度”的实践课堂

高等代数内容抽象、体系完备、逻辑严密。在教学中,对抽象概念的讲授,定理、命题的证明,多采取层层设问的方式,带领学生抽丝剥茧,培养学生分析理论问题的能力。此外,为引导学生从整体和宏观层面理解和把握高等代数的知识体系,我们梳理了各章的知识图谱,还特别强调对核心知识点的总结归纳,融会贯通。比如矩阵相似对角化理论,课本中从不同角度给出了近 10 种等价条件,零散地分布在课程内容 10 章中的 7 章,个别命题的证明繁琐复杂[8],作为一次小论文练习,引导同学们利用相关概念间的内在联系,补充了多个重要结论,并给出了这些等价条件的简洁、清晰的新证明[9]。还有诸多类似的例子,比如矩阵可逆性的判定,矩阵的三种关系,线性变换的作用等,都是分散在多个章节中的重要知识点。通过这种总结梳理的练习,强化了对知识内在联系的深刻理解,提升了学生分析和解决理论问题的能力。

高等代数不仅是一门重要的理论学科,在许多实际问题中也有着广泛的应用。在教学过程中,借助于数学建模思想及 Matlab、Geogebra、Python 等应用软件,建设了高等代数应用案例库,包含如线性方程组与 GPS 导航系统,矩阵运算与图像处理(图像加密与解密、美颜相机等),Google 网页排序算法 Pagerank 背后的数学,皮克斯动画中的曲线、曲面细分与矩阵高次幂的计算,向量内积与文本分类,特征值、特征向量与人脸识别等。利用丰富的实践案例激活课堂,让枯燥抽象的概念、定理走出课本,融入丰富多彩的生活,使学生真切体会到数学之力和数学之用,提升了学生分析和解决实际问题的能力,构建“实践应用有广度、能力提升有高度”的实践课堂。

相应地,可以布置一些探索性的实践练习,从特殊或简化的应用案例出发,利用所学的知识分析和解决实际问题,激发同学们的学习热情,增强同学们学习的成就感。比如人脸识别问题,建立班级同学人脸照片库(比如 10 位同学每人 10 张照片,共 100 张图片,用每人 7 张共 70 张图片集做训练集,剩余 30 张做测试集),利用上述步骤进行人脸识别练习,领悟其中的数学原理及特征值特征向量在该问题中的实际意义。比如矩阵运算问题,同学们可以自己选取图片,利用 matlab 读取图片灰度矩阵,进行图片加密、解密,调整亮度、色彩等操作,感受矩阵运算的多姿多彩;又如奇异值分解,可以通过选取适当图片,对其灰度矩阵进行奇异值分解,利用奇异值分解(SVD)给出的矩阵近似,选取不同奇异值个数进行图片的压缩重构,体会 SVD 在图片压缩中的强大功能等。

2.3. 融入人文元素,培养科学精神,建设“文化熏陶多角度、价值引领有温度”的人文课堂

我们从哲学观点渗透、科学精神培养、美学元素熏陶等角度进行价值观的引领与塑造。

2.3.1. 哲学观点渗透

众所周知,高等代数课程中的概念、定理、证明中处处体现着唯物辩证法的划归思想,如简单与复杂、抽象与具体、无限与有限、现象与本质的对立统一与相互转化。如行列式的概念,从 2 阶、3 阶行列式的定义,归纳演绎得出 n 阶行列式的定义公式,体现出从特殊到一般,从低阶到高阶的演绎思想,而行列式的计算,矩阵的“打洞”技巧等则是化一般为特殊、化高阶为低阶的过程。授课过程中也要注意潜移默化地进行这种哲学观点的渗透。又如 n 维向量空间概念的讲授中,引用古希腊哲学家赫拉克利特的名言“人不能两次踏入同一条河流”,引用莫奈名画——不同时刻、不同光影条件下呈现的色彩斑

澜的《睡莲》，从数学角度引入时间分量加以解释的同时，也告诉学生要用发展变化的眼光看待问题；通过知识点总结梳理练习，告诉同学们要注意事物的多面性及其内在的有机联系，多角度全面看待事物等，争取做到让思政元素在课堂中自然流淌。

2.3.2. 科学精神培养

我们整理了课程中出现的诸多中外数学大家的生平简介、成就贡献、逸闻趣事等，在课堂教学中穿插介绍，激发学习热情，培植科研梦想，引导同学们树立正确的人生观、价值观。如南宋著名数学家秦九韶，法国数学家 Hermite (Charles Hermite)、Laplace (Pierre-Simon Laplace)，德国数学家雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi)等。比如在多项式带余除法这一节，补充介绍中国剩余定理时，从“韩信点兵”的典故出发，后又介绍了秦九韶与《数术九章》，著名的数学桥——伦敦桥与道古桥等；学习欧氏空间概念，介绍《几何原本》的同时，介绍了我国更早时期数学著作《墨经》中的几何成就等；讲授分块矩阵初等变换及矩阵合同标准形时，介绍“人民数学家”华罗庚先生及其成就、“梁园虽好，非久居之乡，归去来兮”的事迹等，增强学生们的文化自信和民族自豪感，及对中华民族伟大复兴的使命感。同时结合时政热点进行思政元素挖掘，比如矩阵逆的讲授中，介绍 2020 诺奖得主 Moore Penrose 及其广义逆的工作；推荐华为公司总裁任正非先生关于 5G 与基础数学的采访；立足我校红色基因，通过视频片段介绍“嫦五”总师杨孟飞，首次火星探测任务“天问一号”总师张荣桥等杰出校友的奋斗故事，激发同学们勇于创新、精益求精的“大国工匠”精神和既脚踏实地又仰望星空的科学情怀。

2.3.3. 美学元素熏陶

黑格尔说“数学是上帝描述自然的符号。”德国著名数学家克莱因(F. Klein)也说：“音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科学可改善物质生活，但数学能给予以上的一切。”我们在教学中也注意到人文内涵与美学元素的适当融入。比如在欧氏空间概念一节的教学中，介绍欧几里得生平故事时，引导学生欣赏拉斐尔的不朽名作《雅典学院》中的数学人物(欧几里得、毕达哥拉斯、芝诺等)；介绍欧几里得的伟大著作《几何原本》，从该著作译本封面的名画《手绘手》讲到其作者——荷兰版画家埃舍尔及其著名的数学画作，一定程度上帮助学生陶冶美学情操，提升人文修养。同时，还通过多种渠道，如推荐励志或温情的影视作品(影视作品如《华罗庚》、《美丽心灵》、《模仿游戏》、《知无涯者》、《极限空间》)、网页、论文、公众号等，解读英文词源(如 algebra、matrix、eigenvalue(eigenvector))等多角度进行思政融入，打造有情怀有温度的人文课堂。

3. 结束语

在近几年的教学实践中，经过挖掘梳理思政元素、完善优化教学设计，学生学习热情、课堂气氛、课程成绩及学生评教等方面都取得了很大进展，反映出课程思政融入取得了良好的效果。但是高等代数课程思政建设仍然任重道远，还存在许多不足之处，一些问题也尚在思考中。比如如何更好地避免思政教育和专业教育“两张皮”的现象，真正做到思政教育润物无声却入心、入脑？如何设置思政评价指标，合理量化思政教育效果？在今后的教学过程中，我们将继续着力于思政元素与专业知识的有机融合，补充完善应用和思政教学案例，拓展高等代数课程思政建设及考核的途径方法，秉承初心，立德树人。

基金项目

西安电子科技大学高等代数省级一流课程建设项目资助；西安电子科技大学矩阵分析与计算核心课程建设项目资助。

参考文献

- [1] 彭双阶, 徐章韬. 大学数学课程思政的课堂教学实现[J]. 中国大学教学, 2020(12): 27-30.
- [2] 陈秀卿. 大学数学课程思政探微[J]. 中国大学, 2022, 38(3): 47-51.
- [3] 吴慧卓. 高等数学教学中渗透课程思政的探索与思考[J]. 大学数学, 2019, 35(3): 40-43.
- [4] 潘璐璐, 徐根玖, 台炳龙, 等. 理工类课程实践课程思政的逻辑与方法[J]. 高等数学研究, 2020, 23(1): 22-25.
- [5] 苏涵, 李清栋. 基于课程思政角度的教学设计-常数项级数的概念[J]. 高等数学研究, 2022, 25(3): 72-76.
- [6] 何薇, 陈建龙. 线性代数课程思政教学案例的设计与实践[J]. 大学数学, 2021, 37(5): 47-51.
- [7] 张莉, 王峥. 线性代数课程思政设计与实践[J]. 大学数学, 2022, 38(1): 26-31.
- [8] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [9] 尹小艳, 杨丹丹. 从相似对角化谈高等代数的教与学[J]. 高等数学研究, 2022, 25(4): 7-10.