

数学史融入数学教学的研究与思考

——以二元一次方程组为例

严 靛, 戴厚平*

吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2023年1月10日; 录用日期: 2023年2月7日; 发布日期: 2023年2月14日

摘 要

学习数学史, 将数学史融入数学教学中, 不仅能扩展学生的视野, 还能提升学生对数学的认识, 数学不再是单纯的理科知识, 也蕴含文科的身影, 了解数学的发展史、某一知识的发现史, 帮助学生更好地理解数学, 学习数学。本文以初中数学中二元一次方程组为例, 探讨为何、如何将数学史融入数学教学中, 并进行教学设计和教学反思。

关键词

数学史, 重构式, 二元一次方程组

Research and Thinking on the Integration of Mathematics History into Mathematics Teaching

—Taking Binary Linear Equations as an Example

Liang Yan, Houping Dai*

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Jan. 10th, 2023; accepted: Feb. 7th, 2023; published: Feb. 14th, 2023

Abstract

Learning the history of mathematics and integrating it into mathematics teaching can not only broaden students' horizons, but also enhance students' understanding of mathematics. Mathe-

*通讯作者。

mathematics is no longer a pure science knowledge, but also contains the figure of liberal arts. Knowing the development history of mathematics and the discovery history of a certain knowledge can help students better understand and learn mathematics. Taking the binary linear equations in junior middle school mathematics as an example, this paper discusses why and how to integrate the history of mathematics into mathematics teaching, and makes teaching design and reflection.

Keywords

History of Mathematics, Reconstruction Type, Binary Linear Equations

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

将数学史融入数学教学中,除了能让学生汲取更多的数学思想养料之外还能提升学生学习数学的兴趣、增加学习数学的自信、提高学习数学的动机。虽然将数学史融入数学教学当中的呼声很高,但是具体实施操作起来还是比较困难,在数学教科书中,确实融入了不少数学史的内容,但是有学者调查研究发现,数学史一般是以附加式和顺应式的方式呈现在数学课本的阅读材料以及题目当中,而以重构式的方式呈现数学史和把数学史添加在正文中的情况却比较少。重构式是借鉴或重构知识的发生、发展历史,以发生法来呈现知识[1],即模仿数学家发现数学的方式营造一个数学发现的情境,让学生自己体验数学的发现过程。用这种方式来学习数学,不仅能吸引学生学习的兴趣,还能给学生留下很深的印象,因为这个知识点是他们自己自主探究出来的知识。虽然这种教学方式能产生很好的效果,但是由于设计难度较大,重构式的课堂还比较少。本文以二元一次方程组为例,构建一个重构式的教学设计,一是对重构式课堂的一个尝试,二是通过教学实践检验所设计是否能取得一个好的效果。

2. 研究背景

从算式到方程,是计算的进步,方程在人教版的教材中出现了三次分别是七年级上册第二章,七年级下册第八章,九年级上册第二十二章。通过二元一次方程组在教材中出现的位置我们可以知道,学生学习二元一次方程组不仅是对前面所学的知识进行加强和延伸,同时对以后要掌握的知识点奠定了牢固的基石。数学教材中一些的知识虽然会重复出现,但是每一次的出现都会是螺旋上升、不断深入的,很明显,学好二元一次方程组是学好方程非常有利的中间力量,也是对方程的学习的一次深入,值得引起我们的重视。同时,二元一次方程组对培养学生的素养也有着十分重要的作用,在这一章节中,还能培养学生的符号意识、数据分析能力、运算能力、模型思想、应用意识等。

3. 教学现状

在数学教学中融入数学史并不是为了历史而历史,而是要使数学史发挥其独特的作用[2]。有很多教师都认为数学史融入到数学教学当中很重要,可是由于教师的数学史知识水平有限,很难恰当地将数学史融入到教学当中,在讲授二元一次方程组的过程中,很多教师都是用生活实例(例如用篮球联赛中的场数和得分关系)来引入二元一次方程,然后在巩固知识的小结当中通过讲授《九章算术》中的例题为了融入数学史而融入数学史,可能教师能够把这堂课讲的很好,学生能听懂,但是并没有很好地融入数学史,

也没有发挥数学史融入到数学教学当中的意义和作用, 对培养学生的人文素养也没有起到很好的作用。

4. 教学设计与实践

4.1. 教学目标解读

通过阅读其他教学设计可以发现, 所有的教学目标都大同小异: 学生能够了解二元一次方程组以及其解的含义, 会列、解二元一次方程组; 能够在学习过程中体会数学建模思想、培养学生分析问题和解决问题的能力; 能够提升学生的合作交流能力以及学习数学的自信心。如何设计才能达到这些教学目标呢? 首先要先通过引入一个例子, 让学生看到具体的二元一次方程组是什么样子, 教师再着重介绍二元一次方程组的定义。二元一次方程组的解也同样如此, 先让同学们自己试着解方程, 教师再作具体的解释, 这样学生自己心中对这个知识点先有一个大概的框架, 再由教师的指正和补充来完善对此概念的理解。之后给出一个例题, 让学生们自己尝试列并解方程组, 教师进行评价, 并帮助学生们学会列和解二元一次方程组。在这一课程进行之中, 教师让学生自己尝试、小组之间互相交流、请同学起来发表自己的看法等种种教学行为均是为了提高学生学习的兴趣、培养学生的学习能力、提升学生学习的自信心。

4.2. 教学重难点

重点: 能弄清二元一次方程组及它们解的含义, 会用二元一次方程组来表示实际问题的数量关系。

难点: 能针对具体问题准确列出二元一次方程组。

4.3. 教学过程(只呈现新授环节)

(一) 创设情境, 引入课题。

回顾我们先前学习过的方程以及一元一次方程组以及它们的定义。选取富有趣味性的历史名题[3], 例如展示出《四元玉鉴》中情境“隔墙听得客分银, 不知人数不知银, 七两分之多四两, 九两分之少半斤, 几多客人几两银?”(题中半斤为八两, 古时一斤等于十六两。)题意是: 有若干客人分银子, 每人分七两银子则还多出四两银子, 每人分九两银子又少八两银子, 请问有多少客人和多少两银子[4]? 请同学们读题、列出方程并解答。学生此时会用以前学过的一元一次方程来解决问题。

解: 设有 x 个客人, 则可列方程 $7x+4=9x-8$, 解得 $x=6$, 通过计算可以得出银子的两数为 $7 \times 6 + 4 = 46$ (两)

答: 有 6 个客人和 46 两银子。

此时, 教师向学生解释用一元一次的方程即设一个未知数可以解决这个问题, 但是这个题目中有两个未知数, 启发学生可不可以列两个未知数来解决这个问题, 给学生 5 分钟时间讨论并尝试列出方程。

大多数学生可能会列出两个方程 $7x+4=y$, $9x-8=y$, 于是教师就向学生介绍, 这就是二元一次方程, 让学生们通过看这两个方程自己组织语言给二元一次方程下一个定义, 讲解完二元一次方程的定义之后, 然后再向学生提问, 如果我们分别求这两个方程能不能把这两个方程中的 x 和 y 的值求出来, 学生会发现不能, 这里老师顺势向同学们介绍我们写二元一次方程组时, 要注意用符号“ $\{$ ”括起来来表示,

例如本题可列为 $\begin{cases} 7x+4=y \\ 9x-8=y \end{cases}$ 表示它们是一个整体, 缺少其中一个方程便求不出来 x 和 y 的值, 同时也让

学生自己给二元一次方程组下一个定义。

【设计意图】通过给出《四元玉鉴》中的题目, 向同学们介绍在古代有人开始尝试用二元一次方程组代替一元一次方程组解决问题, 教师让同学们自己动手尝试列出二元一次方程, 学生们自己通过小组合作列出方程, 并自己给二元一次方程和二元一次方程组下定义, 这一过程就是学生在进行知识的再创

造,就像数学家们发现知识一样自己来发现知识的产生过程,学生们会对二元一次方程(组)有更好的理解,这样在判断一个方程组是否是二元一次方程组时就不容易出错。同时还培养了学生的合作交流能力和学习数学的信心。

继续用学生自己列出的方程 $7x+4=y$, $9x-8=y$, 教师选取 $7x+4=y$ 作为例子, 讨论 x 和 y 的值, 例如当 $x=1$ 时, $y=11$, 当 $x=2$ 时, $y=18$, 教师将班上同学分为两组, 一组求 $7x+4=y$ 的可能的解, 一组求 $9x-8=y$ 可能的解, 学生们自己就会发现每个方程都会有无数解, 将它们写的可能的解展示在黑板上, 发现这两个方程都有一个解为当 $x=6$ 时, $y=46$, 教师可以说这组解是这两个方程的公共解, 而公共解其实就是二元一次方程组 $\begin{cases} 7x+4=y \\ 9x-8=y \end{cases}$ 的解。

【设计意图】通过让学生自己列出这两个二元一次方程解的可能性, 观察可能的解就可以发现公共解即二元一次方程组的解, 让学生理解了二元一次方程组解的含义, 并培养了学生的观察能力和归纳总结的能力。

如果按上面的方式找二元一次方程组的公共解肯定会很麻烦, 教师接着提问再让同学们尝试通过以前学过的知识解一下 $\begin{cases} 7x+4=y \\ 9x-8=y \end{cases}$ 这个方程组, 因为在之前学习一元一次方程的时候, 同学们都已经在做题的时候用过整体代入的方法, 那这时学生们自己就可以试着用代入的方法来解决这个问题, 记 $\begin{cases} 7x+4=y & \text{①} \\ 9x-8=y & \text{②} \end{cases}$, 将①式 $y=7x+4$ 代入到②式中, 得到 $9x-8=7x+4$, 这时通过解一元一次方程就可以

得出 $x=6$, 再将 $x=6$ 带入到①式中可得 $y=46$, 于是得出这个方程组的解为 $\begin{cases} x=6 \\ y=46 \end{cases}$, 到这里, 同学们也得到了验证, 前面所说的公共解就是二元一次方程组的解, 进一步让同学们理解了二元一次方程组的解就是这两个二元一次方程的公共解, 而且用这种方式解, 明显比上面列举的解法要简单得多。教师此时就向学生介绍, 你们刚刚运用的这种解法有一个名字, 叫做代入消元法, 就是未知数的个数由多变少, 逐个求解, 这种思想也是数学思想中的消元思想, 在今后学习中, 我们通过消元思想还可以解决其他类似的问题。之后, 教师让同学们将解题过程写一遍, 请一位同学在黑板上板书, 教师可以在黑板上规范解题过程。

【设计意图】学生通过先前所接触过的知识, 自己能够用代入消元法解题, 教师又给予了学生自己发现知识的机会, 教师只需要引导学生, 并用专业术语向学生强调该知识点, 学生的记忆能更加深刻。而且还让学生学会了数学思想中的消元思想, 最重要的, 在黑板上规范解题过程, 能够使养成良好的学习习惯。

为继续学习加减消元法, 教师引导学生将 $\begin{cases} 7x+4=y \\ 9x-8=y \end{cases}$ 转换为左边含有未知数、右边只有数字的形式 $\begin{cases} 7x-y=-4 & \text{①} \\ 9x-y=8 & \text{②} \end{cases}$ 让学生们仔细思考, 还有什么办法能够解出这个方程组? 让学生再进行小组讨论, 提前

预习过课本知识的学生肯定会有解题思路。讨论结束之后, 请各小组同学表达想法, 学生回答用②式减①式来消去 y , 由② - ①可得 $9x-y-(7x-y)=8-(-4)$, 去括号可以得到 $9x-y-7x+y=8+4$, 消去 y , 得到只含有 x 的式子 $2x=12$, 于是便可求出 $x=6$, 进而可得 $y=46$, 于是求出此二元一次方程组的解为 $\begin{cases} x=6 \\ y=46 \end{cases}$, 并请一名同学在黑板上演示, 教师总结, 这种方式叫做加减消元法。这是有学生就会

问这是消去 y , 那我用的消去 x 可以吗? 教师这时还能启示全班学生, 如果我们想先消去 x 那应该怎么

做呢? 此时班级的大部分同学应该能想到找到 x 的两个系数的最小公倍数, 因为要消掉 x , 那么应该是 $② \times 7 - ① \times 9$, 列出算式就可以得出答案。教师在这里就可以向学生介绍在《九章算术》中, 刘辉指出这种方法“互乘相消发”, 先把两个式子的系数互乘, 然后看系数的同异, 同则减, 异则加, 同学们会发现刘辉的算法和我们在课堂上探究出来的一模一样, 而且这种方法还能推广到多元, 这需要同学们自己在下课之后继续探究, 看看刘辉所说的是不是真的, 这样还能给下节课的知识留下悬念, 诱导学生自己自觉复习下一节课的内容。

【设计意图】通过引入的例子继续学习加减消元法, 让学生自己思考, 教师只进行引导和总结。同时还能让同学们发现一个题目多种解法, 锻炼学生的发散思维。最后讲解刘辉也是这样解决二元一次方程组时, 学生们会更加兴奋, 而且知识点会记忆的更加牢固。

到这时, 整个单元的新知识点就已经学习完毕。教师再出示几个例题供学生巩固, 最后进行小结, 本堂新授课就此结束。

5. 教学反思

本单元所需要教授的新知识点用一节课的时间讲解完毕, 也属于大单元教学方法, 但最需要突出的还是重构式的教学方式, 通过数学史的一个例子, 整堂课学生处于主动学习的地位, 教师引导学生自主探索, 自己发现问题并解决问题, 重走二元一次方程组的产生与发展过程[5], 自己思考出解二元一次方程组的解法, 不仅印象深刻, 而且也提升了学习数学的自信心。

虽然是重构式的教学方式, 但是若是想让学生在数学史的浸润下能更好的体会数学的有趣与魅力, 还应结合附加式和顺应式的呈现方式, 让同学们对数学由更深的了解。例如在让同学们进行巩固练习时, 可以用《九章算术》、《孙子算经》等古书中的例题, 学生可以了解到古代人用二元一次方程组来解决生活当中的实际问题, 体会二元一次方程组的实用性。

在重构式的教学当中, 多次要求同学们自己进行探究, 这一过程有好有坏, 教学活动中的“沟通”与“合作”十分重要, 若是同学们能够在教师的引导下解决问题, 那么教师预设的教学过程能够顺利进行, 若是有不少同学思维不够大胆, 不敢发散思维, 没有按教师预想的思维走, 教学活动中存在“伪探究”, 那么教师应该在上课的过程当中及时调整, 所以说, 这个教学设计是基于基础较好的学生而产生的, 教师要注意在教学过程中注意要适应学生的个性差异。

6. 总结

数学史融入到数学教学中, 可以引起学生的注意, 而以重构式的呈现方式将数学史融入到数学课堂中, 让学生对数学知识进行“再创造”, 更能调动学生的学习的积极性, 感受到学习的喜悦。但在这一过程中, 虽然学生是学习的主体, 但是教师在课堂上同样也发挥着重要作用。首先, 教师要具备丰富的数学史知识, 要从概念的历史发生、发展角度促成学生的理解[6]。教师应该阅读数学史, 参与数学史相关的讲座, 参与学校数学史的研究课题, 不断提升自己的专业知识。其次, 教师要了解学生, 要了解学生知识储备, 若是数学基础不好的学生, 靠自己发现数学知识的可能性较小, 所以教师要根据学生的具体情况来进行教学设计。而且, 在进行教学设计过程中, 要注意课程的连贯性, 所讲的内容要通俗易懂, 结合实际。

数学史的增加, 不仅能影响学生的学习效果, 还能提升教师自身的教学水平, 而且还能培养学生的探究精神、合作意识、发散思维; 提升学习数学的自信心; 锻炼学生的“四能”等。

基金项目

湖南省学位与研究生教育改革研究项目(项目编号: 2020JGYB221)。

参考文献

- [1] 张东年, 贾随军. 数学史在初中数学教科书中的运用研究——以北师大版为例[J]. 数学教学研究, 2022, 41(5): 13-17+30.
- [2] 张薇. 数学史融入数学教学的教学案例探究——基本不等式的证明教学案例[J]. 数学学习与研究, 2022(16): 92-94.
- [3] 汪晓勤. HPM 视角下二元一次方程组概念的教学设计[J]. 中学数学教学参考, 2007(10): 48-51.
- [4] 林革. 中国古算书与二元一次方程组[J]. 中学生数理化(七年级数学)(配合人教社教材), 2020(5): 21-22.
- [5] 黄贤明. 数学史渗透数学教学的微思考——以“有理数”单元为例[J]. 中学数学月刊, 2022(6): 49-51.
- [6] 陈碧芬. 数学史“重构式”融入小学数学教学的研究——以“认识厘米”为例[J]. 课程·教材·教法, 2017, 37(1): 69-74.