

数学文化与高考试题的融合研究

刘凡帆, 倪仁兴

绍兴文理学院数理信息学院, 浙江 绍兴

收稿日期: 2023年2月17日; 录用日期: 2023年3月20日; 发布日期: 2023年3月27日

摘 要

数学文化融入高考试题已经成为一种趋势, 在一定程度上彰显了数学文化的重要性。数学文化与高考数学试题融合的形式主要分为国外数学成就、数学在人类文明中的贡献、数学的人文价值和中华民族的数学成就四类。通过对2017年~2022年高考数学全国卷中数学文化与高考试题融合的内容、题型和具体试题进行分析, 给出了数学文化与高考试题融合的一些建议。

关键词

数学文化, 高考试题, 试题分析, 改进建议

Research on the Integration of Mathematical Culture and College Entrance Examination Questions

Fanfan Liu, Renxing Ni

School of Mathematical Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Feb. 17th, 2023; accepted: Mar. 20th, 2023; published: Mar. 27th, 2023

Abstract

It has become a trend to integrate mathematical culture into the college entrance examination questions, which to some extent shows the importance of mathematical culture. The form of integrating mathematics culture and college entrance examination mathematics questions is mainly divided into four categories: foreign mathematics achievements, the contribution of mathematics to human civilization, the humanistic value of mathematics and the mathematics achievements of the Chinese nation. Based on the analysis of the contents, types and specific test questions of the integration of mathematical culture and college entrance examination questions in the 2017~2022

national college entrance examination mathematics volume, some suggestions are given for the integration of mathematical culture and college entrance examination questions.

Keywords

Mathematical Culture, College Entrance Examination Questions, Analysis of Test Questions, Suggestions for Improvement

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学文化从广义上讲,不仅仅指的是数学史,它还包含了数学的思想、精神、方法、观点、语言、数学发展中的人文成分以及数学与社会的联系等[1]。数学文化的系统提出从历史上可以追溯到1981年,美国数学家 Raymond L. Wilder [2]在其著作《作为文化体系的数学》中提出“数学是一个由于其内在力量与外在力量共同作用而处于不断发展和变化之中的文化系统”,该理论的提出不仅从哲学的角度赋予数学生机与活力,还极大地丰富了文化的内涵,在国内外掀起了一波研究热潮。M. Kline 论述了数学与人类文化以及自然科学发展之间的关系,他认为数学是一种主要的文化力量;1992年,孙小礼等人,在其著作《数学与文化》一书中汇总了国外数学名家对数学文化的哲学思考,充分揭示了数学文化的内涵,肯定了数学文化的价值,此后引起国内学者的广泛关注和深入研究。直到2017年新修订的《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称《标准》)中明确提出高考命题中要融入数学文化[3],新课标的出台,无疑将数学文化推向一个新的高度,预示着数学文化融入数学教育已经成为一种趋势。本文以高考试题为切入点,研究2017年~2022年高考数学全国卷中涉及的数学文化内容,从数学文化融入高考试题的价值、方式以及具体试题分析三方面展开探讨。最后,从题型、内容等方面给出数学文化与高考试题融合的一些建议。

2. 数学文化与高考试题融合的价值

随着新课程改革的不断推进,立德树人教育方针的深入贯彻,高考数学试题势必也要随之变化。近年来,高考试题与数学文化相融合,打破传统出题方式,不再单一考察所学知识点,不再只是掌握做题方法,也不再是通过题海战术便能取得高分的唯分数论。其目的是贯彻落实素质教育,培养学生的数学眼光,会用数学抽象的形式观察问题,透过题目表面,看清题目本质。其次,锻炼学生的数学思维,会以逻辑推理的方式思考方法,解决难题。学生不仅会解数学题,还能推广到日常生活中,学以致用。

数学文化融入高考试题,可以让学生在做题的同时汲取知识的养分,渗透中华民族的传统文化,领略伟大的数学成就,学习数学家的优良品质,还能了解数学最新的研究成果,孕育兴趣的种子,为将来确定职业方向提供更广阔的平台。

数学文化融入高考试题,促进了数学与其他学科、多领域的融合,使得数学不再枯燥乏味,能够培养学生学习数学的乐趣,同时,为学生了解知识提供渠道,打开学生视野,不再局限于眼前的题目,有助于构建完整的知识结构体系。

3. 数学文化与高考试题融合的形式

由于《标准》中首次明确提出将数学文化纳入考试范围,高考试题开始有意识地渗透数学文化的内

容。又因为高考全国卷的使用范围最广, 本文重点分析 2017 年~2022 年全国卷中涉及数学文化的题目, 据统计共有 24 题。题型均为选择题和填空题, 其中选择题 20 题、填空题 4 题。题目以基础题为主, 整体难度偏低。如图 1 所示, 2017 年~2021 年高考全国卷中数学文化试题数量波动较大, 2021~2022 年趋于平稳; 其中以选择题为主, 填空题很少, 且只出现在 2019 年和 2021 年, 其他题型未曾出现。

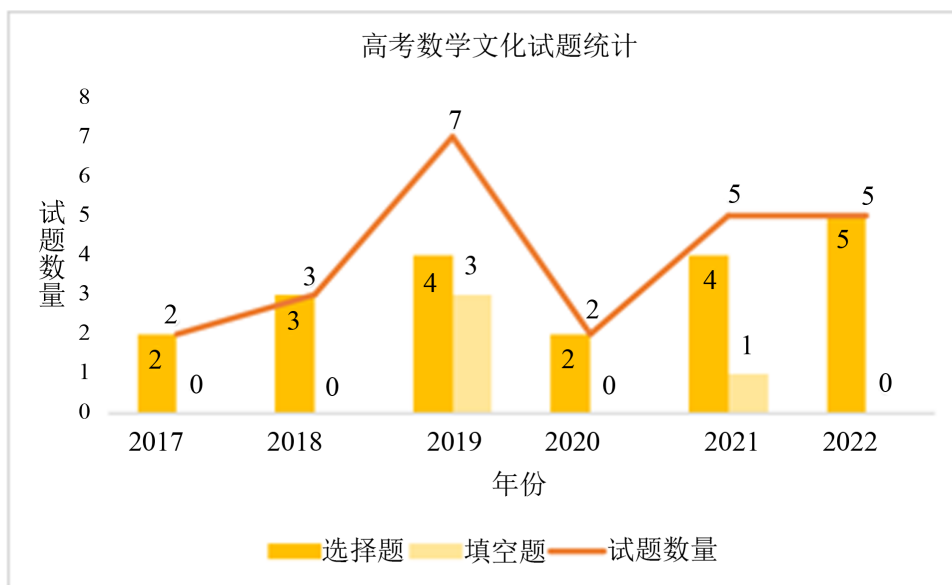


Figure 1. Statistics of mathematical culture questions in the national college entrance examination from 2017 to 2022

图 1. 2017 年~2022 年高考全国卷数学文化试题统计

分析 2017 年~2022 年高考试题中有关数学文化的题目, 并结合王峥[4]的研究, 笔者将数学文化融入高考试题的形式主要分为以下四类: 国外数学成就、数学在人类文明中的贡献、数学的人文价值、中华民族的数学成就。其中, 国外数学成就主要指国外数学家、数学名著、国外经典题目等; 数学在人类文明中的贡献主要指数学在科技、生活、社会发展等方面的贡献; 数学的人文价值主要指数学美、传统文化等人文方面的价值; 中华民族的数学成就主要指中国数学家、数学著作、国内经典题目等。笔者按照上述分类统计, 国外数学成就有 2 题, 数学在人类文明中的贡献有 9 题, 数学的人文价值有 7 题, 中华民族的数学成就有 6 题。

4. 数学文化与高考试题融合的案例

本章以 2017 年~2022 年全国数学卷中试题为例, 进一步探讨数学文化与高考试题四种融合形式的方式。

4.1. 国外数学成就

例 1 (2018 全国 I/理 10)如图 2, 来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形。此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC , 直角边 AB , AC 。 $\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为 I, 黑色部分记为 II, 其余部分记为 III。在整个图形中随机取一点, 此点取自 I, II, III 的概率分别记为 p_1 , p_2 , p_3 , 则()。

- (A) $p_1 = p_2$ (B) $p_1 = p_3$ (C) $p_2 = p_3$ (D) $p_1 = p_2 + p_3$

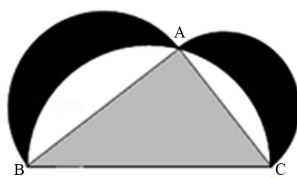


Figure 2. Graph of example 1

图 2. 例 1 图

解析: 此题以古希腊数学家希波克拉底的“月牙定理”为背景, 进行数学文化渗透, 如图 2: 设 $BC = 2r_1$, $AB = 2r_2$, $AC = 2r_3$ 分别求出 I, II, III 所对应的面积, 即可得到答案选 A 本题考察几何概型的概率问题, 属于基础题, 考查学生的数学运算、数学抽象、逻辑推理的数学学科核心素养, 此题展示了希波克拉底的数学研究成果——月牙定理, 即三个半圆所围成的两个月牙形的面积之和等于直角三角形的面积, 促进了“化圆为方”的研究。学生体会数学的应用价值, 感受数学家的理性精神和不断探索的进取之心。

4.2. 数学在人类文明中的贡献

例 2 (2022 全国乙/理 4) 嫦娥二号卫星在完成探月任务后, 继续进行深空探测, 成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造卫星, 为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值, 用到数列 $\{b_n\}$:

$$b_1 = 1 + \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = 1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad b_3 = 1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, \quad \dots, \text{ 以此类推, 其中 } a_k \in N^* (k=1, 2, \dots) \text{ 则 } ().$$

- (A) $b_1 < b_5$ (B) $b_3 < b_8$ (C) $b_6 < b_2$ (D) $b_4 < b_7$

解析: 此题以嫦娥二号卫星为背景, 进行数学文化渗透, 此题运用特殊值法求解更为简单, 不妨设, 依次可得 $b_1 = 2$, $b_2 = \frac{3}{2}$, $b_3 = \frac{5}{3}$, $b_4 = \frac{8}{5}$, $b_5 = \frac{13}{8}$, $b_6 = \frac{21}{13}$, $b_7 = \frac{34}{21}$, $b_8 = \frac{55}{34}$, 故选 D。属于中档题, 考查学生数学运算、逻辑推理的数学学科核心素养。本题对于方法的选择尤为关键, 特殊值法可大大减少运算量, 缩减做题时间, 此外通过观察 $b_1, b_2, \dots$ 的值发现所得结果为斐波那契数列相邻两数的比值, 发现其中规律, 可更为快速的推出结果。做题的同时感受数学在高新技术产业中的作用, 体会数学的应用价值。

4.3. 数学的人文价值

例 3 (2021 新高考 I/16) 某校学生在研究民间剪纸艺术时, 发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折, 规格为 $20 \text{ dm} \times 12 \text{ dm}$ 的长方形纸, 对折 1 次共可以得 $10 \text{ dm} \times 12 \text{ dm}$, $20 \text{ dm} \times 6 \text{ dm}$ 两种规格的图形, 它们的面积之和 $S_1 = 240 \text{ dm}^2$, 对折 2 次共可以得到, $10 \text{ dm} \times 6 \text{ dm}$, $20 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}$ 三种规格的图形, 它们的面积之和 $S_2 = 180 \text{ dm}^2$, 以此类推, 则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为_____; 如果对折 n 次, 那么 $\sum_{k=1}^n S_k = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}^2$ 。

解析: 此题以民间剪纸艺术为背景, 进行数学文化渗透, 第一小题按对折列举即可; 第二小题根据规律可得 S_n , 再根据错位相减法得结果。本题考查数列求和和相关知识, 考查学生正确运用归纳法、错位相减法的数学方法, 体会数学的审美价值, 考查学生数学运算、逻辑推理、数学抽象的数学学科核心素养, 同时体验中华民族传统剪纸艺术的实践过程, 感受传统文化之美、对称美。

4.4. 中华民族的数学成就

例 4 (2019 全国 I/理 6) 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化。每一“重卦”由从下到上排

列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻 “——” 和阴爻 “- - -”, 如图 3 就是一重卦。在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是()。

- (A) $\frac{5}{16}$ (B) $\frac{11}{32}$ (C) $\frac{21}{32}$ (D) $\frac{11}{16}$

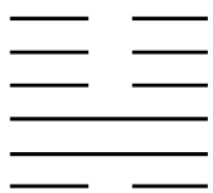


Figure 3. Graph of example 4
图 3. 例 4 图

解析: 此题以中国古代典籍《周易》中的重卦问题为背景, 渗透数学文化, 主要考查利用两个计数原理与排列组合计算古典概型问题, “重卦”中每一爻有两种情况, 该重卦恰有 3 个阳爻是相同元素的排列问题。本题在考查排列、概率知识的同时, 渗透中华民族传统经典, 了解“重卦”知识, 考查学生的数学运算、逻辑推理的数学学科核心素养, 体会数学的文化价值, 考查化归与转化的数学思想。

综上所述, 数学文化与高考试题的融合主要通过国内外的数学成就、数学对人类文明发展的贡献以及数学的人文价值等方式来呈现。此外, 研究发现这些题目主要是选择题和填空题。数学文化往往作为背景渗透进高考试题, 题目本身的难度其实并不高, 更多考察的是学生的审题和理解能力, 因此只要学生能仔细地阅读题干, 理解其中有关数学文化的背景, 求解往往并不困难。总之, 数学与文化的融合最终碰撞出了耀眼的火花, 数学文化融入高考试题一方面为其增添了生机与活力, 使得数学不再是枯燥乏味的数字与符号。另一方面, 能够汲取数学养分, 体会数学的价值, 感受数学美, 增加文化底蕴。

5. 数学文化与高考试题融合的建议

通过对 2017~2022 年高考数学全国卷的分析发现, 近几年比较注重数学应用方面, 科学技术领域的相关试题有所增加, 如 3D 打印技术、航天技术等。同时也存在一些问题, 其一, 数学文化相关试题的题型比较单一, 均为选择题和填空题, 且选择题占绝大多数; 其二, 数学文化内容类型较少, 主要侧重于数学名著, 如《算法统宗》《海岛算经》等, 与中华优秀传统文化之间的融合不多。因此数学文化与高考试题的融合在试题类型和试题内容方面还有进一步的改进空间, 在试题类型和内容选取上应更加多元化。

5.1. 增加数学文化试题数量, 拓展数学文化试题类型

由图 1 知, 2017 年~2022 年全国卷中涉及数学文化的试题数量较少, 一套试题中至多有 1~2 道涉及数学文化, 且总数量有所波动, 为加强数学文化渗透, 应适当增加数学文化试题数量。

在题型上, 不仅仅局限在选择题、填空题上, 尝试编写渗透数学文化的创新开放题, 还可与简答题融合等。例如:

例 5 如图 4, 已知足球场球门宽约为 5 米, 一球员从距 B 点 5 米的 C 点(点 A、B、C 均在球场边线上), 沿与 AC 成 45° 角的 CD 方向带球, 试问该球员能否在射线 CD 上找到一点 P, 使得点 P 为最佳射门点(即 $\angle APB$ 最大)? 若能找到, 求出这时点 P 与点 C 的距离; 若找不到, 请说明理由。

解析: 此题为米勒问题的应用, 属于隐性的数学文化, 没有将数学文化作为背景出现, 而是在解题过程中发现与国外数学家米勒所提出的“米勒问题”本质相同。题型为简答题, 融合方式属于国外数学成就。如图 5 所示, 作经过点 A、B 且和直线 CD 相切的圆, 切点为 P, 此时 $\angle APB$ 最大。再利用三角

形相似的性质, 易得此时 $PC = 5\sqrt{2}$ 。

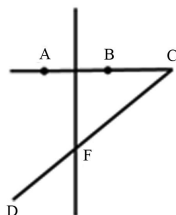


Figure 4. Graph of example 5

图 4. 例 5 图

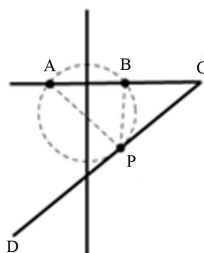


Figure 5. Analytical graph of example 5

图 5. 例 5 解析图

5.2. 丰富数学文化试题内容

(1) 可对陈题进行创新, 从不同的视角对同一材料进行变化, 发掘出多种考点的数学文化题目。例如, 斐波那契数列的题目层出不穷, 可以从数列、算法、逻辑、二项式定理等多个视角进行考查[5]。除了发掘新的数学文化内容外, 在已发现的数学文化题目基础上进行改编也是一种不错的选择, 尤其对于古代数学成就而言, 如例 1 希波克拉底的月牙定理, 在运用同一定理解题下, 可以变换不同的出题方式, 例 1 将月牙定理与几何概型相结合, 并且其中的三角形为直角三角形, 可以将其推广为钝角三角形, 求月牙形的面积等题目。

(2) 多科普一些新兴领域、前沿技术等, 播撒兴趣的种子, 为学生未来发展提供多种选择。例如, 5G 技术、3D 打印技术、人工智能等。随着科学技术的蓬勃发展, 培养新时代人才时要关注最新动态, 及时传播新思想, 了解新技术。在题目中将前沿技术作为文化背景, 有利于学生感受数学与科技的紧密联系。如例 2, 在研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值时运用到数列知识, 在考察数学知识的同时联系航天技术, 体会数学的应用价值。

(3) 多发掘中华民族博大精深的传统文化, 可以让学生更多的了解历史, 了解前辈们的优秀成果, 学习他们身上优秀的精神品质。少数民族中的数学文化是中国数学文化的重要组成部分。例如, 侗族风雨桥建筑中蕴含着丰富的数学文化, 将其作为文化背景的题目可以考察三角函数的计算、等差数列的运用、平移和曲线逼近的思想方法、平面镶嵌、对称变换等等[6]。中华优秀传统文化是中华民族的根与魂, 作为中华儿女要继承和发扬中华优秀传统文化。如例 3 中的剪纸技艺是中国最古老的民间艺术之一, 例 4 中的八卦知识出自中国古代论述万物变化的典籍《周易》, 都与数学知识相结合, 在解决题目中体会数学的文化价值。

(4) 进行多学科、多领域的融合, 促进各学科、各领域间深度交融。例如, 将物理、化学、生物、地理、音乐、美术等学科与数学问题相结合, 突显数学这一基础学科的重要性。其他学科内容与数学知识

相融合, 可以丰富数学文化试题的内容, 从多角度考察数学知识, 体会数学与其他学科的紧密联系, 有利于数学的多元化发展。

参考文献

- [1] 顾沛. 数学文化[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2017.
- [2] Wilder, R.L. (1981) *Mathematics as a Cultural System*. Pergamon Press, Oxford.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [4] 王嵘. 数学文化融入中学教科书的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2022, 31(1): 19-23.
- [5] 陈银辉, 葛文明. 数学文化融入高三课堂的实践与思考——以斐波那契数列为例[J]. 中学数学月刊, 2020(10): 27-30.
- [6] 吴秀吉, 罗永超. 侗族风雨桥建筑艺术中的数学文化[J]. 数学通报, 2019, 58(5): 10-13.