Advances in Education 教育进展, 2023, 13(8), 6129-6140
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.138955

Hans汉斯

“融变式，保质量”的初中数学作业设计问题

——以反比例函数图象与性质一节为例

应依珂，黄思婕，苏子棋，尹幼奇*

绍兴文理学院数学系，浙江 绍兴

收稿日期：2023年7月21日；录用日期：2023年8月21日；发布日期：2023年8月28日

摘 要

双减政策出台后，学生学习“质”与“量”的平衡面临挑战，如何合理设计作业使学生在减负的基础上充分掌握知识内容就成为中学教师亟待思考的问题。本文结合变式理论与波利亚“怎样解题”表，以浙教版八年级下册第六章第二节反比例函数图象与性质一节为例，提出了作业设计的六点可行建议。

关键词

双减，作业设计，变式理论，波利亚“怎样解题”表

The Problem of Designing Middle School Mathematics Homework with “Blending Variants and Ensuring Quality”

—Taking the Section on Image and Properties of Inverse Proportional Function as an Example

Yike Ying, Sijie Huang, Ziqi Su, Youqi Yin*

Department of Mathematics, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Jul. 21st, 2023; accepted: Aug. 21st, 2023; published: Aug. 28th, 2023

Abstract

After the introduction of the Double Subtraction Policy, students face challenges in learning the

*通讯作者。

文章引用: 应依珂, 黄思婕, 苏子棋, 尹幼奇. “融变式, 保质量”的初中数学作业设计问题[J]. 教育进展, 2023, 13(8): 6129-6140. DOI: 10.12677/ae.2023.138955

balance between "quality" and "quantity". How to reasonably design homework so that students can fully grasp the knowledge content on the basis of reducing the burden has become an urgent problem for middle school teachers to think about. This paper combines the theory of variation and Polliat's "how to solve problems" table, taking the section of inverse proportional function image and nature in the second section of Chapter VI of Eighth grade II of Zhejiang Education Press as an example, Six feasible suggestions for homework design were proposed.

Keywords

Double Subtraction, Homework Design, Variant Theory, Polliat's Table of "How to Solve Problems"

1. 引言

以减轻义务教育阶段过重“作业负担”和“校外培训负担”、促进学生全面发展为目的双减政策，向学校系统组织教学、教师有效开展教学提出了更高要求。由学生作业数量减少所导致其对学习内容的不理解、知识本质的不把握和成绩不尽如人意是“双减”背景下的潜在矛盾[1]。从哈里斯·库伯的研究[2]中可知，仅在合理的范围内，作业量增加与初中生数学成绩有正相关关系。变式理论和波利亚怎样解题表为中学教师进行合理的作业设计提供了科学的理论指导。以下，笔者将以浙教版八年级下册第六章第二节反比例函数图象与性质一节为例，探究教师在“双减”背景下初中数学作业的设计思路。

2. 理论简介

波利亚“怎样解题”表指出，解决数学问题的方法大致可以分为“弄清问题”、“拟定计划”、“实现计划”、“回顾反思”这四个步骤，每一个步骤之下具有多种基于具体环境的解题策略。该表不仅有利于学生寻找数学解题思路从而顺利解题，也有利于学生掌握数学知识，提高自身数学素养[3]。

张念宏在《中国教育百科全书》中指出：“变式是掌握概念的方法之一，它是这样一种思维形式：从不同的方面去揭示事物的关键特性，最后能帮助人们抽象出事物的本质属性[4]。”教师将变式训练应用于数学教学、学习过程，有利于帮助学生从多角度、深层次地去理解知识点。同时，教师结合相关变式理论，通过“删除怪题难题”、“精简题型”、“删减重复简单题”等方式合理进行课堂作业和课后作业设计，使学生能够从习题中去巩固相关概念、积累数学解题活动经验、体悟数学思维方法、激发数学学习兴趣，从而在“双减”背景下真正平衡学生作业的“质”与“量”。通常的，变式训练可以分为两大模块[5]：一为概念、定理、公式的变式训练，另一模块为例题、习题的变式训练。概念、定理、公式的变式训练主要是针对概念的内涵与外延，例如一些数学概念、公式、定理设计变式问题；例题、习题的变式训练主要是通过一题多解、一法多用、一题多变等方法设计习题。

3. 设计思路

在笔者选取的“6.2 反比例函数图象与性质(一)”中，本小节所涉及的“反比例函数”、“轴对称”、“象限”等相关概念在先前的学习中已经涉及，故本节最重要的就是让学生历经反比例函数图象产生的过程[6]，总结归纳出其图象位置与对称属性的相关定理，并在此过程中积累数学活动经验，通过相关例题习题的变式训练学会分析反比例函数图象，提高从函数图象中获取信息的能力。

Table 1. Polliat's table of "How to Solve Problems"
表 1. 波利亚"怎样解题"表

	波利亚"怎样解题"表
弄清问题	未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否肯？要确定未知数条件是否充分？
	画张图，引入适当的符号。
	把条件的各个部分分开，你能否把它们写下来？
拟定计划	你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？
	你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？
	看着未知数!试着想出一个具有相同(或相似)未知数的熟悉的问题。
	这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题，你能利用它吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？
	你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？
	回到定义去。
	如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题，你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？
	你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其他部分，这样对于未知能确定到什么程度？它会怎样变化？
	你能不能从已知数据导出某些有用的东西？
	你能不能想出适合于确定未知数的其他数据？
	如果需要的话，你能不能改变未知数和数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？
	你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？
实现计划	实现你的求解计划，检验每一步骤。
	你是否能清楚地看到这一步是正确的？你能否证明这一步是正确的？
回顾反思	你能否验证这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能否一下子看出它来？
	你能不能把这个结果或方法用于其它的问题？

3.1. 注重巩固习题的基础概念

知识从获取到完全掌握需要不断进行练习，基础知识点虽然难度较低但依旧需要给予充分的重视。教师在作业设计时注重基础习题的设置，可以帮助学生熟练基础知识概念、基本数学技能的练习，也为学生日后高端知识的探究与获取提供了保障，一举三得。反比例函数图象的位置特征与对称性是本节课的基础也是本节课的重点，故本节作业设置题 1 和题 2，两题分别考查学生能否对反比例函数的位置进行判断以及是否能够巧妙运用反比例函数图象的中心对称性。

题 1：下列反比例函数的图象分别在哪两个象限？

(1) $y=\frac{4}{x}$；(2) $y=-\frac{2}{x}$.

【分析】本题已知反比例函数解析式，未知函数图象的象限位置，可以根据 k 的正负来判断各反比例函数图象所在象限的位置.

【解答】解：对于 $y=\frac{4}{x}$，其反比例系数 $k=4>0$，∴它的图象在一、三象限；对于 $y=-\frac{2}{x}$，其反

比例系数 $k=-2<0$，∴它的图象在二、四象限。

题 2：如图 1，已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象的一个分支如图，请补画它的另一个分支。

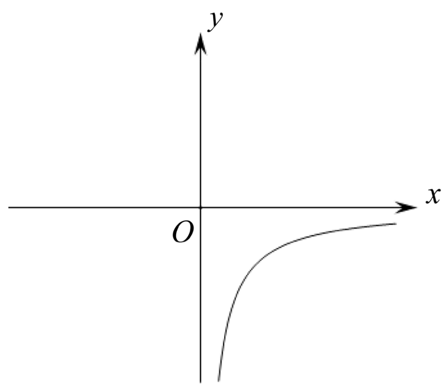

Figure 1. Inverse proportional function
图 1. 反比例函数

【分析】此题主要考查反比例函数图象的中心对称性，已知反比例函数的其中一个分支在第四象限，未知另一分支的象限，可以通过反比例函数的中心对称性推断出未知的另一分支在第二象限，并且与已有分支图象关于坐标原点成中心对称。

【解答】解：如下图 2

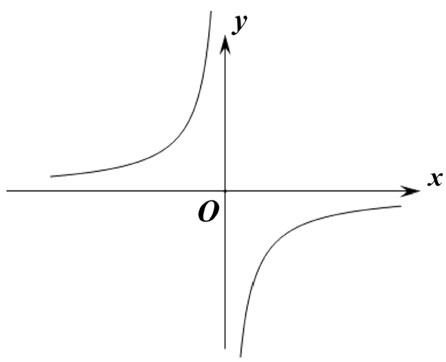

Figure 2. Solution to problem one
图 2. 问题一的解

3.2. 注重挖掘习题的一题多变

波利亚曾形象地指出，好问题同好蘑菇有些相像，它们都成堆的生长，找到一个以后，你应当在周围找一找，很可能附近就有好几个[7]。此句意指从一道习题出发，通过变条件、变结论、条件结论同时变式等多种手段，使原来的一道题变成一类题，再由一类题变为多类题，即进行一题多变的变式训练。通过一题多变的训练方式，可以增强习题的生动性与趣味性，学生也可以从多角度地对变化的题目进行比较与思考，提高自身的思维能力与创新精神。学会"根据反比例系数 k 的正负判断图象位置"是本节的重要知识点，题 1 已涉及该知识点，为了促进同学进一步巩固，通过变条件的方法设计了题 3，题 3 的第(1)题将反比例系数 k 设置为变量，给出图象位置让学生探究 k 的取值范围，使学生进一步巩固知识点，同时也考查了学生的整体思想与逆向思维。此外，第(2)题再次变化了条件，要求学生结合一次函数

的知识进行思考，提高学生思虑问题的全面性。

题 3：已知在直角坐标系中，反比例函数 $y=\dfrac{3m-1}{x}$ 的图象在第一、三象限内。

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 若一次函数 $y=(1-m)x+2$ 的图象经过第一、二、三象限，求 m 的取值范围。

【分析】本题主要考查了反比例函数的性质，第(1)题已知函数图象在一、三象限，未知 m 范围，把 $3m-1$ 看成一个整体，可将其视作反比例系数 k，根据图象位置来判断 k 的正负即可求解；进一步，本题还对第(2)题进行了一个变式，通过变条件(增加一个条件)再来求解 m 的取值范围，已知一次函数图象在一、二、三象限，未知 m 的取值范围，只要利用一次函数的性质并结合第(1)题的结论求解即可.

【解答】解：(1)由于函数图象在一三象限，$\therefore k>0$，即 $3m-1>0$，解得 $m>\dfrac{1}{3}$。(2)由于一次函数图象经过一、二、三象限，$\therefore 1-m>0$，解得 $m<1$，结合反比例函数中 m 的取值范围，得到最终结果为 $\dfrac{1}{3}<m<1$。

3.3. 注重特定知识的一法多用

波利亚在得到某一解题方法后提问“能在别的什么题目中利用这个结果或这种方法吗[5]”，这是进行一法多用变式。一法多用的变式训练是将解决某一问题的方法加以归纳总结，形成技巧，并用以解决其他问题。通过这种变化，可达到多题归一的目的，培养学生知识、方法的迁移能力。反比例函数图象具有中心对称性是学生在本节课需要重点掌握的内容，对于看似不同的问题，实际上本质相同。为抓住本质实现一法多用，故这里设置题 4 和题 5，这两道题的解题关键均为“反比例函数具有中心对称性”。此外，学生在遇到已知函数图象上点的坐标时，也往往会想到将点代入到函数表达式中，即代入法，以此求得函数再进行求解，易见该法对于这两题同样适用。

反比例函数图象的位置特征也是本节课的重点，掌握反比例函数图象位置与反比例系数 k 的正负息息相关至关重要，为将反比例函数图象与 k 的几何意义有机结合，这里特设置题 6，层层深入、循序渐进地设计变式，题 6 的三小题的解题关键均在于掌握“k 的几何意义”，并辅以根据图象位置判断 k 取正还是取负。通过题 6 的设置，学生能进一步把握住同一知识点的本质，对学生形成严密的逻辑思维能力也有极大助益。

题 4：已知点 $(2,-1)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象上，那么这个函数图象一定经过点( )。

A. $(-2,-1)$	B. $(-2,1)$	C. $(-1,-2)$	D. $(2,1)$

【分析】本题主要考查反比例函数图象的中心对称性，已知点 $(2,-1)$ 在函数图象上，未知反比例系数，根据反比例函数图象具有中心对称性可得图象上这点关于坐标原点的中心对称点必也在函数图象上，以此得到答案；本题也可通过反比例函数图象上点的坐标求得函数表达式进行求解，所有在反比例函数上的点的横纵坐标的积等于比例系数，本题未知比例系数，已知反比例函数经过 $(2,-1)$，通过横纵坐标相乘可得比例系数，再根据 $k=x\cdot y$，将每个选项代入，得到答案。

【解答】解：法一：根据反比例函数图象关于坐标原点成中心对称，点 $(2,-1)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象上，则点 $(2,-1)$ 关于坐标原点的中心对称点 $(-2,1)$ 也一定在反比例函数图象上，故本题选 B。

法二：点$(2,-1)$在反比例函数上，可知$k=2\times(-1)=-2$，选项中，横纵坐标相乘等于−2 的只有 B 选项，故本题选 B。

题 5：如图 3，双曲线$y=\frac{k_1}{x}$（k_1为常数，$k_1\neq 0$）与直线$y=k_2x$（k_2为常数，$k_2\neq 0$）相交于 A，B 两点，如果 A 点的坐标是$(1,2)$，那么 B 点的坐标为

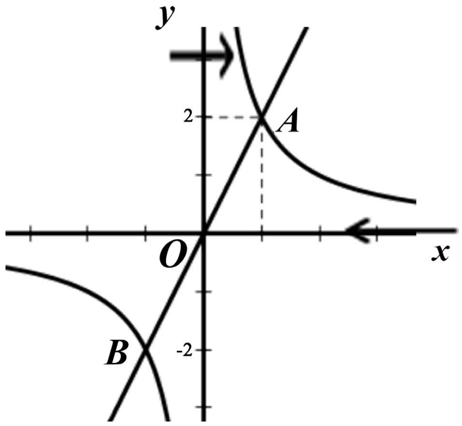

Figure 3. Hyperbola image
图 3. 双曲线图像

【分析】本题主要考查了反比例函数及正比例函数图象的中心对称性，本题已知 A 点坐标，以及点 A 是反比例函数和正比例函数的一个交点，未知 B 点坐标，所以可直接根据图象的中心对称性得到 B 点的坐标；本题也可通过反比例函数与正比例函数的交点坐标求得两函数表达式再进行求解，本题未知比例系数，已知两图象交点 A$(2,-1)$，解得函数表达式后联立易得到 B 点坐标。

【解答】解：法一：∵A 点的坐标为$(1,2)$，根据中心对称性可得 B$(-1,-2)$。

法二：∵A 点的坐标为$(1,2)$，∴双曲线为$y=\frac{2}{x}$，直线为$y=2\cdot x$，将这两个函数表达式联立，解得 B$(-1,-2)$。

题 6：已知反比例函数$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$过点 A，过点 A 作 x 轴的垂线，交 x 轴于点 B，点 C 为 y 轴上一动点，连结 AC。

(1) 如图 4，若 AC⊥y 轴，如图，长方形 ABOC 的面积为 4，则 k 的值是

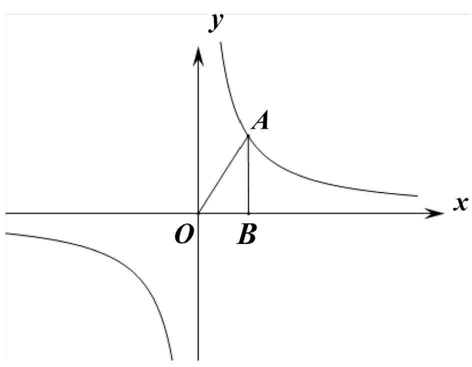

Figure 4. Inverse proportional function
图 4. 反比例函数

(2) 如图 5，若点 C 移动到 O 点，△AOB 面积为 1，则 k 的值是

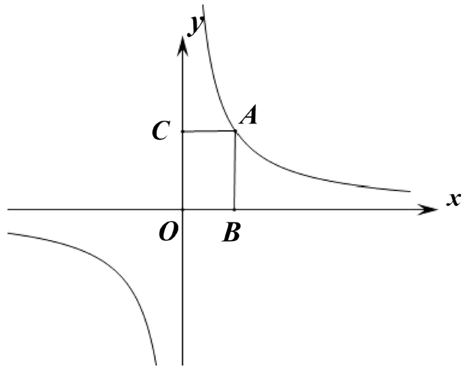

Figure 5. Inverse scale function graph obtained by moving point C
图 5. 移动点 C 得到的反比例函数图

(3) 如图 6，若直线 $y=mx$ 与双曲线相交于 A，D 两点，$S_{\Delta ABD}=1$，则 k 的值是

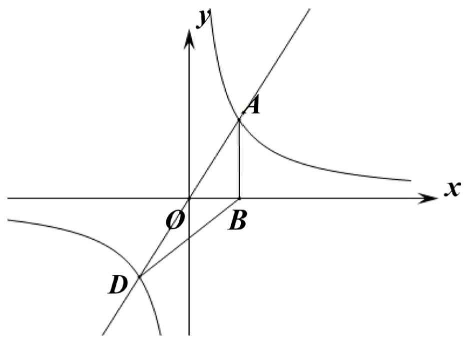

Figure 6. Hyperbola intersecting with straight line $y = mx$
图 6. 与直线 $y = mx$ 相交的双曲线

【分析】本题主要考查了反比例函数中 k 的几何意义，对于这三小题，需要考虑一个大前提，即根据反比例函数图象位置判断 k 的正负。对于第(1)题，已知矩形 ABOC 的面积为 4，未知反比例系数 k 的值，可设点 A 坐标为(x,y)，通过 $x\cdot y=k$，得到 k 的值；第(2)题，已知 Rt△ABO 的面积，未知反比例系数 k 的值，通过 k 的几何意义可知 $S_{\Delta ABO}=\frac{|x\cdot y|}{2}=\frac{|k|}{2}$，即可求得 k 的值；第(3)题，已知△ABD 的面积，未知反比例系数 k 的值，将△ABD 分割为△ABO 与△BOD，并且由题目易知点 A，D 关于坐标原点中心对称，从而点 A，D 的横、纵坐标的绝对值均相等，因此△ABO 与△BOD 的面积相等，所以 $S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}$，接下来参照第(2)题，易求得 k 的值。

【解答】解：设点 A 坐标为(x,y)，由于点 A 在第一象限可知，$x,y>0$。根据反比例函数图象在一、三象限，可得 $k>0$。

(1) 已知 $S_{矩形ABOC}=4=x\cdot y=k$，即得 $k=4$。

(2) 已知 $S_{\Delta ABO}=\frac{x\cdot y}{2}=\frac{k}{2}=1$，∴ $k=2$。

(3) ∵A，D 为正比例函数与双曲线的交点，∴A，D 关于坐标原点成中心对称，∴点 A，D 的横、纵坐标的绝对值均相等，∴△ABO 与△BOD 的面积相等，∴ $S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}=\frac{k}{2}$，∴ $k=1$。

3.4. 注重探究习题的一题多解

波利亚曾经说过，掌握数学就意味着要善于解题；更是在《怎样解题》中提到，在回顾所完成的解答时，时刻提醒自己“能以不同的方式推导这个结果吗[8]”，也就是一题多解变式。在数学习题练习时，通过一题多思、一题多解、一题多讲等形式将学生从单一的思维模式中解放出来，引导学生从不同角度、不同方位对同一来源材料快速联想及思考问题，探求不同的解决方案，从而拓广学生思路，培养学生思维的敏捷性。描点法绘制反比例函数的图象也是本节内容的重点，是学生感受数形结合思想的主要方法。为了使学生对描点法进行巩固，同时打破学生对函数图象绘制只能用描点法的刻板印象，这里特设置题7，给定两个特别的反比例函数，要求学生利用描点法画出两函数的图象。此题关键在于发现两函数的反比例系数互为相反数的隐藏信息(两函数关于 x 轴对称)，要求学生能多维思考，发现同一问题的不同解法，旨在培养学生思维的多样性。

题 7：用描点法画出反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 和 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象。

(1) 列表：

x	…
$y=\frac{2}{x}$	…
$y=-\frac{2}{x}$	…

(2) 在图 7 坐标系中描点，并用光滑曲线顺次连结各点。

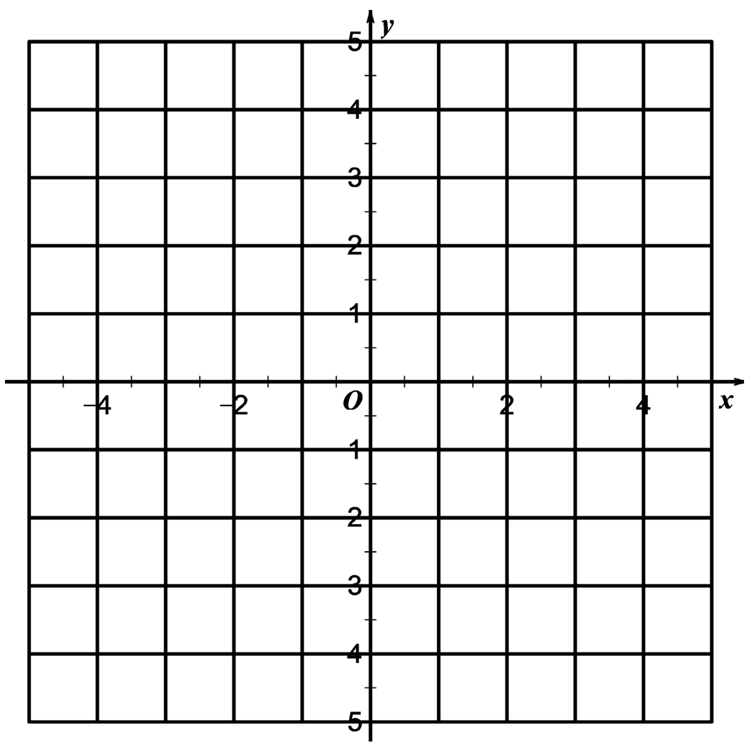

Figure 7. Coordinate system
图 7. 坐标系

【分析】本题主要考查的是反比例函数图象的画法——描点法，已知函数解析式，未知函数图象，可以通过列表、描点、连线的方法直接绘制；此外，除了描点法，可以发现两函数的反比例系数互为相反数，即两函数关于 x 轴对称，可在用描点法绘制出的 $y=\frac{2}{x}$ 的基础上关于 x 轴对称绘制出 $y=-\frac{2}{x}$。

【解答】解：如下表 2。

Table 2. Inversely proportional function $y=\frac{2}{x}$ and $y=-\frac{2}{x}$

表 2. 反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 和 $y=-\frac{2}{x}$

x	…	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	…
$y=\frac{2}{x}$	…	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	−1	−2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	…
$y=-\frac{2}{x}$	…	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	−2	−1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	…

(2) 如下图 8。

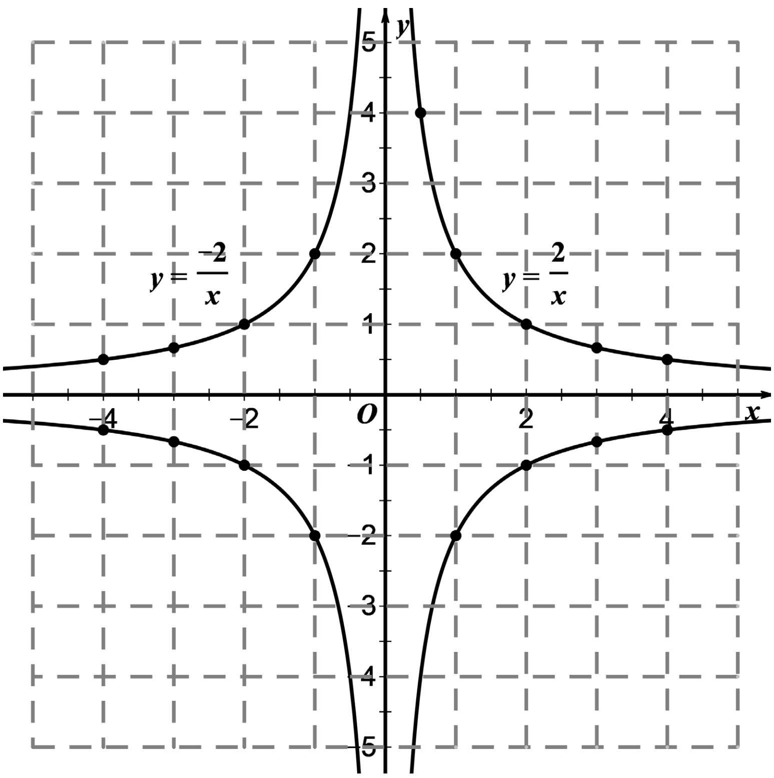

Figure 8. Image of inverse proportion function in coordinate system
图 8. 反比例函数在坐标系中的图像

3.5. 注重相关知识的综合应用

随着时代的发展与进步，学生的教育模式发生了巨大的转变，在汲取传统教学模式精华的基础上更

加强调学生的主体地位，更加注重学生综合素质的培养。因此，提高学生综合应用的能力势在必行。综合应用能力的培养是数学教学中的一个重点，同时也是一大难点。部分教师受应试机制影响，仍选用“题海战术”进行训练，墨守成规的教学方式、机械重复的课后练习消磨了学生学习数学的兴趣，缺少注重对学生综合应用能力的培养。

为改变这种状况，这里通过变式，设计题 8，以最少的题量涵盖本节所有的知识点，同时注重知识形成过程，培养学生应用数学能力。本题本身的难度并不大，但细看另有玄机，各小题之间看似独立实际上紧密关联：第(1)题转变条件(k 的正负)与结论(反比例函数的图象位置)，要求根据反比例函数的图象判断 k 的正负，考查了学生的逆向思维；第(2)题对前面所学的代入法进行了巩固，同时所求值可通过第(1)题结果得到验证；第(3)题对本节课的另一重要内容——反比例函数图象的中心对称性进行了应用，同时所绘图象可根据第(2)题所得反比例函数表达式进行验证。

题 8： 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象的一支如图 9 所示，它经过点 $\mathrm{B}(-4,2)$。

(1) 判断 k 是正数还是负数；

(2) 求这个反比例函数的表达式；

(3) 补画这个反比例函数图象的另一支。

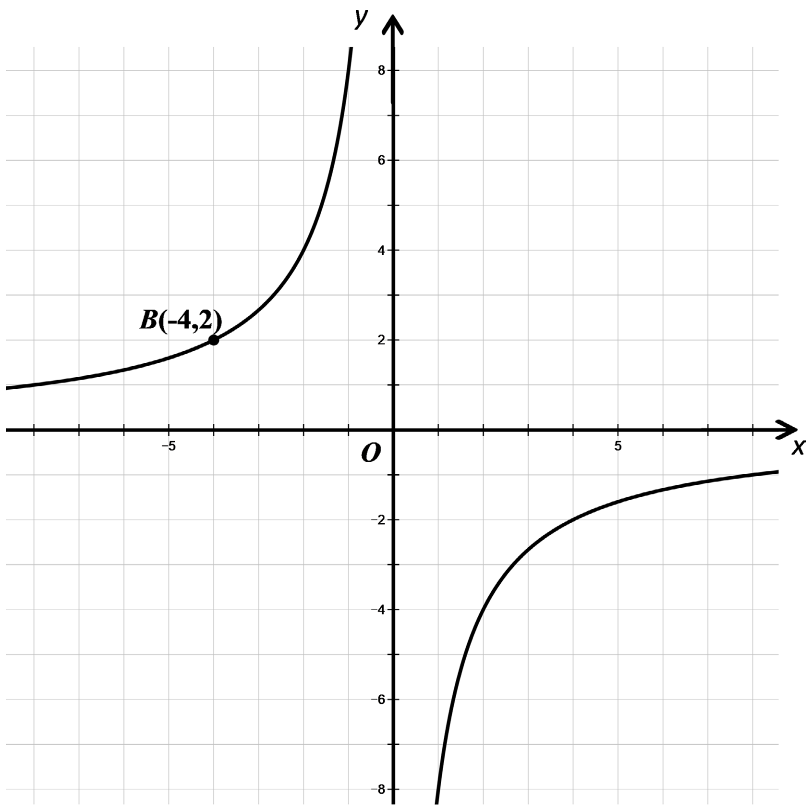

Figure 9. Inverse proportional function passing through points (−4, 2)
图 9. 经过点(−4, 2)的反比例函数

【分析】本题综合考查本节课的重点知识，在第(1)题中，未知反比例系数 k 的正负，已知反比例函数经过 $\mathrm{B}(-4,2)$，点 B 位于第二象限，根据反比例函数的另一表达式 $x\cdot y=k(k\neq 0)$ 易判断 k 的正负；第(2)题中，未知反比例函数的表达式，已知图象上一点的坐标，可将该点坐标代入函数得到解析式，同时

根据第(1)题所得反比例系数 k 的正负可对此题所得 k 值进行验证；第(3)题中，已知该反比例函数图象的一支曲线，未知另一支，根据反比例函数图象的中心对称性易画得另一支曲线，同时通过描点法对第(2)题所得函数表达式进行绘制容易验证此题绘制是否正确.

【解答】解：(1) ∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象的一支在第二象限，∴图象上的点的横坐标与纵坐标异号，即 $k=x\cdot y<0$。

(2) 将图象上点 B 的横坐标为-4，纵坐标 2 分别代入表达式 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，得 $2=\frac{k}{-4}$，解得 $k=-8$，∴所求的反比例函数的表达式是 $y=\frac{-8}{x}$。

(3) 在已知图象上分别取一些点 A，B，C，D，作出它们关于原点中心对称的点 A'，B'，C'，D'，然后用光滑曲线把它们依次连结，这样就得到反比例函数 $y=\frac{-8}{x}$ 的图象中的另外一支。

具体解答见下图 10。

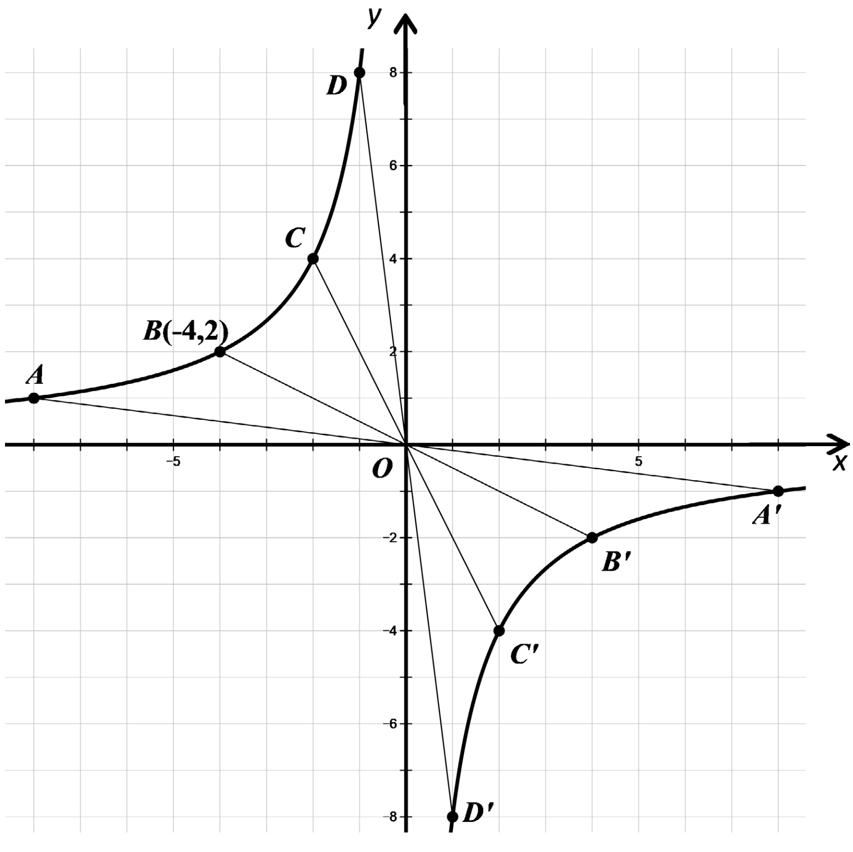

Figure 10. Another branch of the inverse proportional function
图 10. 反比例函数的另一支

3.6. 注重分层设计与操作实践

分层设计，指的是布置作业时要有难易梯度和深浅层次。辩证唯物主义认为，人的认识有阶梯性、局限性。学生，作为发展中人，其认识自然也有阶段性和局限性。不同年龄段、不同层次班级的学生，甚至同一年龄段、同一班级的学生，其认识水平、思维水平均存在着较大差异，这些差异决定了变式教

学必须服从量力性原则。因此，这里将题目划分为必做题(题 1~题 8)和选做题(题 9)，既保证了所有学生对本节课基础、重点知识的掌握，更考虑到了能力较强的学生对反比例函数图象的深层思考。题 9 的设置立足课程的重点内容：反比例函数图象关于坐标原点成中心对称，要探究其其他对称性质。实际上，在题 7 描点法绘制反比例函数上，学生在“列表”阶段已经容易发现反比例函数图象还有其他对称性质，题 9 的设置可综合考查学生的观察、实践操作、推理论证的能力，以此积累多种活动经验，具有一定的探索性和挑战性。

题 9：我们知道，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象关于坐标原点成中心对称.仔细观察，反比例函数的图象还具备怎样的对称性？你能设计一个实验来验证你的判断吗？在班上交流你的方法，你能用推理的方法证明你的判断吗？

【分析】本题已知反比例函数关于坐标原点成中心对称，未知它的其他对称性，通过观察反比例函数图象，可以发现它具有轴对称性，进一步，通过实践操作及理论推理可证得反比例函数图象关于 $y=x$ 和 $y=-x$ 对称。

【解答】解：反比例函数具有轴对称性，关于 $y=x$ 和 $y=-x$ 对称。

实验：任意绘制一个的反比例函数，比如 $y=\frac{1}{x}$，将其分别沿 $y=x$ 和 $y=-x$ 对折发现曲线均能重合；同样地，任意绘制一个反比例系数为负的函数同样满足。

推理：设 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 上，则 $y_0=\frac{k}{x_0}$，$\therefore x_0=\frac{k}{y_0}$，$\therefore \mathrm{P}'(y_0,x_0)$ 也在 $y=\frac{k}{x}$ 上，而点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ 关于 $y=x$ 对称的点为 (y_0,x_0)，$\therefore$反比例函数关于 $y=x$ 对称。同理，$\mathrm{P}''(-y_0,-x_0)$ 也在 $y=\frac{k}{x}$ 上，从而可证反比例函数关于 $y=-x$ 对称。

4. 小节

综上，本文结合波利亚“怎样解题”表以及变式理论，立足基础知识，引入变式思维，在注重不同学生的学习能力和综合素质的情况下，设计出了适用于反比例函数图象与性质一节的“保质且保量”的作业。但是，本文所提出习题的“保质且保量”仅仅局限在作业设计理论角度考量，想要学生真正灵活掌握知识，仍然需要不断考虑实际教学，作业讲解等相关教育环节，这些考虑也将成为我们日后重点探究方向。

基金项目

绍兴市教育科学规划课题(SGJ2023067)；浙江省教育厅科研项目(Y202147418)。

参考文献

[1] 石万红. “双减”背景下的初中数学教学创新性研究——以反比例函数的图象与性质为例[J]. 中学课程辅导, 2023(16): 108-110.

[2] Cooper, H. (1989) Homework. Longman, New York, NY, 49 p.

[3] 苏国东. 题组变式 起承转合——以“反比例函数与图形面积”一课的设计为例[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2021(18): 15-17.

[4] 张念宏. 中国教育百科全书[M]. 北京: 海洋出版社, 1991.

[5] 徐晓东. 例谈初中数学教学中的变式训练[J]. 中学数学: 初中版, 2009(18): 4-5.

[6] G.波利亚. 怎样解题[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 52-57.

[7] 徐军. 由一道复数题寻找周围的“蘑菇” [J]. 数学教学, 2005(4): 15-16.

[8] 郃桂琴. 例谈波利亚“怎样解题表”在初中数学解题教学中的运用[J]. 数理天地(初中版), 2022(20): 2-3.