

近四年新高考I卷数学卷难度间的比较研究

——兼谈数学新高考I卷的命题趋势

阮梦婷, 倪仁兴, 庄金磊

绍兴文理学院数理信息学院数学系, 浙江 绍兴

收稿日期: 2023年12月5日; 录用日期: 2024年1月4日; 发布日期: 2024年1月11日

摘要

至今全国已有8省采用新高考数学I卷,浙江省从2023年起高考数学也启用新高考I卷。本文采用基于2020年武小鹏和孔企平提出的AHP理论的综合难度模型利用统计方法对近四年全国新高考I卷进行综合难度分析。研究表明:四年中,2022年新高考I卷综合难度最高,2023年次之;新高考I卷重视对基础知识、数学思想方法、知识的综合性和创新性、学生应用意识的考查。这启示我们平时教学应该立足课程标准,在课堂教学中发挥数学的育人功能;关注数学内在逻辑;重视数学思想方法的教学;要在日常教学中培养学生创新思维、应用意识和实践能力,从而更好地发挥高考试题对中学数学教学改革的引导和促进作用。

关键词

新高考, 综合难度, 比较研究

A Comparative Study on the Difficulty of Mathematics Paper of the New College Entrance Examination I in Recent Four Years

—Also on the Proposition Trend of the New Mathematics College Entrance Examination I Volume

Mengting Ruan, Renxing Ni, Jinlei Zhuang

Department of Mathematics, School of Mathematical Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Dec. 5th, 2023; accepted: Jan. 4th, 2024; published: Jan. 11th, 2024

Abstract

Up to now, eight provinces in China have adopted the new NMET I volume, and Zhejiang Province has also started NMET I volume since 2023. In this paper, the comprehensive difficulty model based on AHP theory put forward by Wu Xiaopeng and Kong Qiping in 2020 is used to analyze the comprehensive difficulty of NMET I volume in recent four years by statistical method. The results show that the comprehensive difficulty of NMET I volume in 2022 is the highest, followed by 2023. Volume I of the new college entrance examination attaches importance to the examination of basic knowledge, mathematical thinking methods, comprehensiveness and innovation of knowledge and students' application consciousness, which enlightens us that teaching should be based on curriculum standards and play the educational function of mathematics in classroom teaching, pay attention to the inherent logic of mathematics and attach importance to the teaching of mathematical thinking methods. It is necessary to cultivate students' innovative thinking, application consciousness and practical ability in daily teaching, so as to better play the guiding and promoting role of college entrance examination questions in middle school mathematics teaching reform.

Keywords

New College Entrance Examination, Comprehensive Difficulty, Comparative Study

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

教育部 2023 年 1 月 16 日发文：《关于做好 2023 年普通高校招生工作的通知》[教学（2023）1 号] 中强调，“持续深化考试内容改革……高考命题体现基础性、综合性、应用性和创新性，注重考查关键能力、学科素养和思维品质，注重考查学生对所学知识的融会贯通和灵活运用。”其实，近几年新高考试题的命制一直在致力于压缩死记硬背的内容，减少通过大量刷题提高分数的现象，增加知识点灵活运用的内容。至今为止，全国已有 8 省采用新高考 I 卷，浙江省从 2023 年起高考数学也启用新高考 I 卷。基于以上背景，本文将对近四年数学新高考 I 卷的试题间的综合难度进行比较研究，同时谈一谈数学新高考 I 卷的命题趋势，以期帮助高中数学教师更好地进行针对性教学。

2. 研究对象与研究工具

2.1. 研究对象

2020 年新高考开始至今，教育部考试中心已命制了 4 套数学新高考 I 卷，适用地区已到 8 个省：浙江、山东、福建、湖北、江苏、广东、湖南、河北。本研究将选取以上 4 套新高考 I 卷作为研究对象。

2.2. 研究工具

本文主要参考 2020 年武小鹏、孔企平提出的改进的数学高考试题综合难度模型[1]。该模型将高考试题的难度因素分为七个维度：背景因素、是否含参、运算水平、推理能力、知识含量、思维方向、认知水平，各因素之间分为不同水平，具体划分如下表 1。

Table 1. Specific connotation of influencing factors of comprehensive difficulty model
表 1. 综合难度模型的影响因素具体内涵

因素	水平	内涵	编码
背景因素	无背景	试题中没有出现具体情景, 主要针对数学学科知识本身展开, 不需要进行数学化	A1
	生活背景	数学知识与实际生活背景相关联, 需要进行数学化并进行还原以分析实际问题	A2
	科学背景	该类项目包括多学科的情景, 需要通过分析科学背景特征进而解决学科问题	A3
是否含参	无参数	项目中没有出现参数, 问题仅存在现有静态数据之间的运算和分析	B1
	有参数	项目中至少出现一个参数, 需要对参数进行分析, 项目处于动态变化中	B2
运算水平	简单数值运算	在运算水平上, 项目仅存在数值上的加、减、乘、除及其混合运算	C1
	复杂数值运算	运算不存在符号参与, 但存在复杂运算, 如三角、指数、对数、微积分等	C2
	简单符号运算	运算涉及到简单符号的推导, 基本公式的变形、代数式的运算等	C3
	复杂符号运算	运算涉及到复杂关系的逻辑演绎, 如运动轨迹、参数方程等的计算	C4
推理能力	简单推理	推理过程较为明确, 逻辑相对简单, 并能在 3 步之内得到推理结果	D1
	复杂推理	推理涉及到复杂关系的解析和多种转化, 一般存在 3 步以上的推导	D2
知识含量	简单知识点	项目仅仅围绕一个知识单元展开, 不存在跨章节和跨学科的知识参与	E1
	复杂知识点	依据学科单元划分, 项目涉及不同的两个单元知识参与, 两个知识点的交叉	E2
	大于等于三	项目的设计包括 3 个及 3 个以上知识点, 可能存在跨章节和跨学科知识	E3
思维方向	顺向思维	问题的解决符合数学思维的特点, 按照数学学科逻辑顺序展开	F1
	逆向思维	问题的解决需要对思维过程进行转化, 存在逆向思考问题的过程	F2
认知水平	理解	项目涉及对数学概念或者原理的理解, 能够对其过程进行描述和简单说明	G1
	运用	这一水平要求能够将数学原理和概念应用到具体的问题解决过程中	G2
	分析	分析水平需要在复杂环境中找到问题解决路径, 并对结果进行解释	G3

各因素的难度系数 $d_i (i=1,2,\dots,7)$ 由下列公式(1)得出:

$$d_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_{ij} k_{ij} \left(\sum_{j=1}^m n_{ij} = n, i=1,2,\dots,7 \right) \quad (1)$$

其中, n_{ij} 表示第 i 个因素第 j 个水平下的题目数量, k_{ij} 表示第 i 个因素第 j 个水平的权重, n 表示题目总量, m 表示第 i 个因素的划分的水平总数。对七个 d_i 赋予权重后计算他们的加权和, 即可得到该试卷的综合难度系数 D , 如公式(2)所示:

$$D = \sum_{i=1}^7 \sigma_i d_i = \sum_{i=1}^7 \left(\frac{\sigma_i}{n} \sum_{j=1}^m n_{ij} k_{ij} \right) \quad (2)$$

其中, σ_i 表示第 i 个因素的权重系数。

在本文中, 求因素中对不同水平权重 k_{ij} 和求综合难度系数时不同因素的权重 σ_i 均采用 2020 年武小鹏、孔企平提出的基于 AHP 理论得出的权重[1]: $\sigma_i = (0.40 \ 1.20 \ 0.83 \ 2.50 \ 0.40 \ 0.83 \ 0.83)$; k_{ij} 见表 2。

Table 2. Weight coefficient of different levels
表 2. 不同水平权重系数

因素	水平	编码	权重编码	权重
背景因素	无背景	A1	k_{11}	0.27
	生活背景	A2	k_{12}	0.90
	科学背景	A3	k_{13}	1.83
是否含参	无参数	B1	k_{21}	0.50
	有参数	B2	k_{22}	1.50
运算水平	简单数值运算	C1	k_{31}	0.20
	复杂数值运算	C2	k_{32}	0.68
	简单符号运算	C3	k_{33}	0.68
	复杂符号运算	C4	k_{34}	2.44
推理能力	简单推理	D1	k_{41}	0.50
	复杂推理	D2	k_{42}	1.50
知识含量	简单知识点	E1	k_{51}	0.30
	复杂知识点	E2	k_{52}	0.78
	大于等于三	E3	k_{53}	1.92
思维方向	顺向思维	F1	k_{61}	0.64
	逆向思维	F2	k_{62}	1.36
认知水平	理解	G1	k_{71}	0.33
	运用	G2	k_{72}	0.96
	分析	G3	k_{73}	1.71

2.3. 编码示例

例 1 (2023 年新高考数学 I 卷第 6 题) 过点 $(0,2)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α , 则 $\sin \alpha = (\quad)$

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

该题编码为 A1 无背景(题中没有现实情境, 是对数学学科知识的展开)、B1 无参数(题中仅是对静态数据的分析和计算)、C2 复杂数值运算(涉及到三角函数的计算)、D1 简单推理(推理过程明确)、E2 两个知识点(涉及直线与圆方程、三角函数两个章节的知识点)、F1 顺向思维(根据题意和切线性质, 顺向解决问题)、G2 运用水平(对切线性质正确理解, 运用二倍角公式计算三角函数值)。

3. 研究过程与结果

对 2020 年~2023 年 4 套新高考 I 卷进行编码, 利用公式(1)和公式(2), 计算得到各因素的难度系数 d_i 和综合难度系数 D , 如表 3 所示。

Table 3. Summary table of difficulty coefficient of new mathematics college entrance examination volume I from 2020 to 2023**表 3.** 2020~2023 年数学新高考 I 卷难度系数汇总表

年份		2020 年			2021 年			2022 年			2023 年		
因素	水平	题量	占比	难度系数	题量	占比	难度系数	题量	占比	难度系数	题量	占比	难度系数
背景因素	无背景	15	68.18%		19	86.36%		20	90.91%		19	86.36%	
	生活背景	4	18.18%	0.60	3	13.64%	0.36	1	4.55%	0.37	2	9.09%	0.40
	科学背景	3	13.64%		0	0.00%		1	4.55%		1	4.55%	
是否含参	无参数	13	59.09%		14	63.64%		13	59.09%		13	59.09%	
	有参数	9	40.91%	0.91	8	36.36%	0.86	9	40.91%	0.91	9	40.91%	0.91
运算水平	简单数值运算	9	40.91%		8	36.36%		6	27.27%		5	22.73%	
	复杂数值运算	3	13.64%		1	4.55%		0	0.00%		2	9.09%	
	简单符号运算	8	36.36%	0.64	10	45.45%	0.75	13	59.09%	0.79	13	59.09%	0.73
	复杂符号运算	2	9.09%		3	13.64%		3	13.64%		2	9.09%	
推理能力	简单推理	14	63.64%		16	72.73%		10	45.45%		11	50.00%	
	复杂推理	8	36.36%	0.86	6	27.27%	0.77	12	54.55%	1.05	11	50.00%	1.00
知识含量	简单知识点	12	54.55%		13	59.09%		10	45.45%		11	50.00%	
	复杂知识点	9	40.91%	0.57	9	40.91%	0.50	9	40.91%	0.72	9	40.91%	0.64
	大于等于三	1	4.55%		0	0.00%		3	13.64%		2	9.09%	
思维方向	顺向思维	17	77.27%		16	72.73%		19	86.36%		20	90.91%	
	逆向思维	5	22.73%	0.80	6	27.27%	0.84	3	13.64%	0.74	2	9.09%	0.71
认知水平	理解	2	9.09%		3	13.64%		3	13.64%		3	13.64%	
	运用	16	72.73%	1.04	15	68.18%	1.01	12	54.55%	1.11	13	59.09%	1.08
	分析	4	18.18%		4	18.18%		7	31.82%		6	27.27%	
综合难度			5.78			5.46			6.33			6.10	

为了更好地反映每套试卷中各个因素的不同水平的题量占比，在 Excel 中对每套试卷中各个因素的不同水平的题量绘制百分比堆积柱形图：

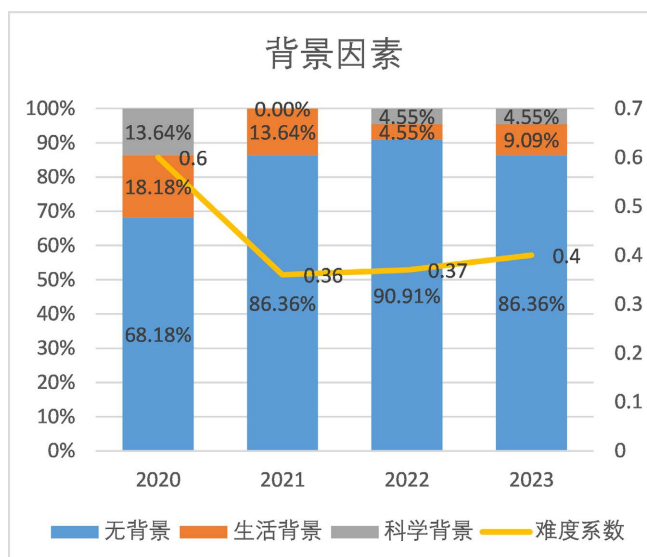


Figure 1. Percentage histogram with background factor
图 1. 背景因素百分比柱状图

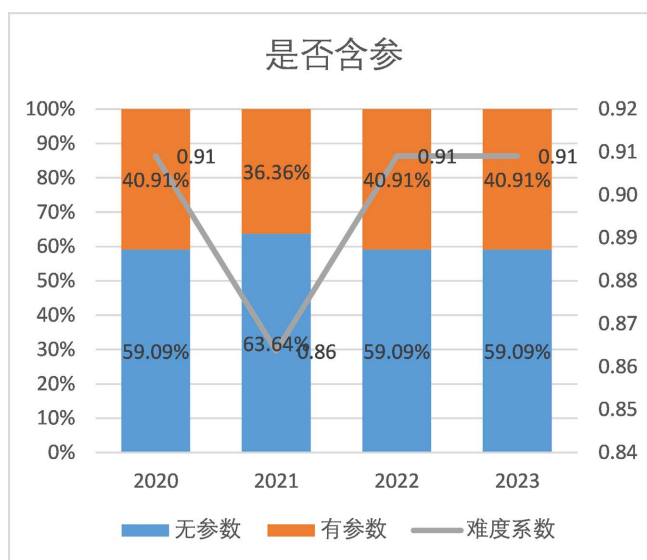


Figure 2. Percentage histogram with parameters
图 2. 含参情况百分比柱状图

从图 1 中可以看出，新高考首年对“背景因素”的考查较多，难度系数 d_1 为 0.60；此后三年对“背景因素”的考查几乎没有改变，难度系数维持在 0.38 左右。新高考 I 卷每年均会对含有生活背景和科学背景的问题加以考查。

从图 2 中可以看出，含有参数、需要对参数进行分析的题量在新高考 I 卷使用的四年中基本没有太大变化，难度系数 d_2 均维持在 0.9 左右，其中，2021 年含有参数的题目只占全部题目的 36.36%，较其余三年更低；其余三年的含参题目的百分比基本一致。

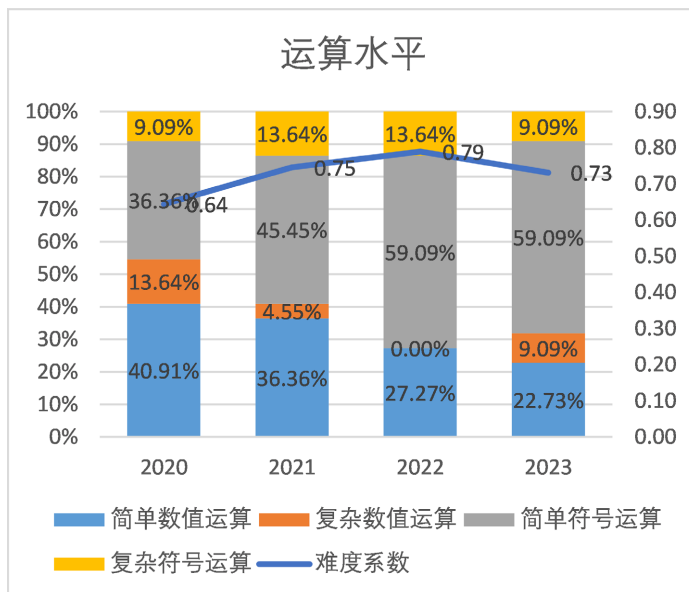


Figure 3. Percentage histogram with operational level

图 3. 运算水平百分比柱状图

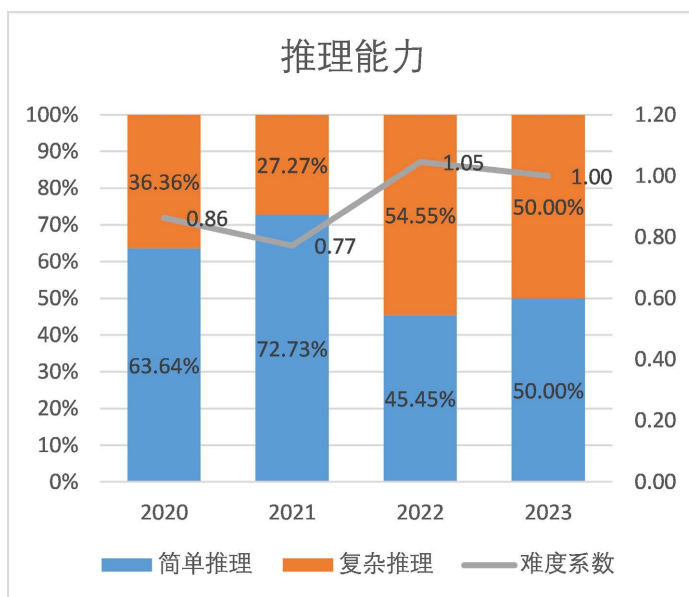


Figure 4. Percentage histogram with reasoning ability

图 4. 推理能力百分比柱状图

在“运算水平”方面，如图 3 所示，第一水平的“简单数值运算”的题量在逐年减少；而“简单符号运算”的题量占比在逐年增大，并在近两年的新高 I 卷中基本保持一致。难度系数 d_3 的排序为：2022 年 ($d_3 = 0.79$) > 2021 年 ($d_3 = 0.75$) > 2023 年 ($d_3 = 0.73$) > 2020 年 ($d_3 = 0.64$)。

在“推理能力”方面，如图 4 所示，在 2020 年和 2021 年的新高 I 卷中，“简单推理”水平的题量占比较大，而到了 2022 年则是“复杂推理”水平下的题量占比较大，在 2023 年这两个水平下的题量基本一致。难度系数 d_4 最大的年份是 2022 年，最小的年份是 2020 年，且 2023 年的难度系数与 2022 年的基本一致，均在 1.0 左右。

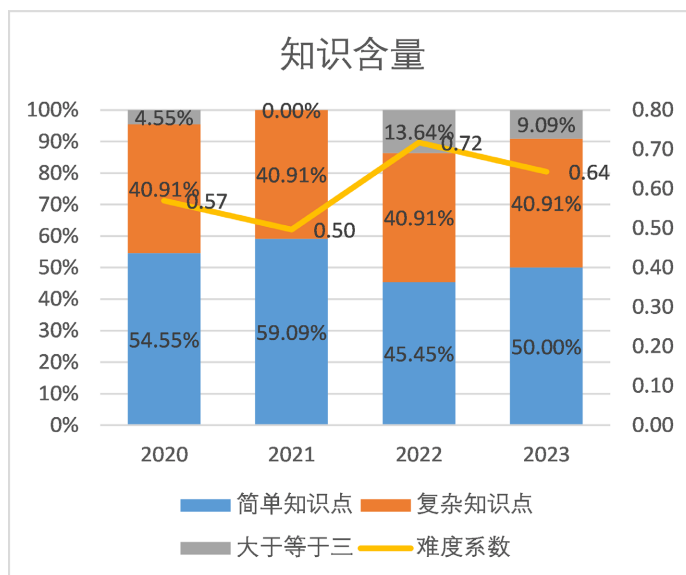


Figure 5. Percentage histogram with knowledge content
图 5. 知识含量百分比柱状图

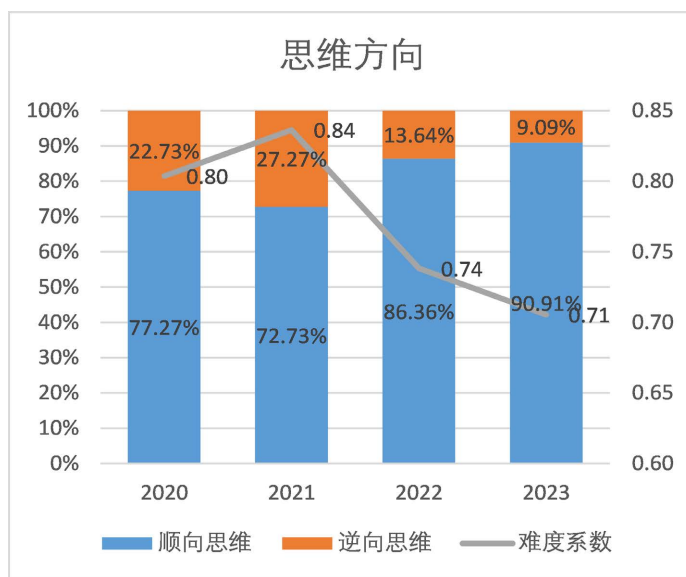


Figure 6. Percentage histogram with thinking direction
图 6. 思维方向百分比柱状图

在知识含量方面,如图 5 所示,“复杂知识点”水平下的题量占比一直比较稳定,四年均占比 40.91%;对于“大于等于三”这一水平,2021 年的新高考 I 卷中没有包括 3 个及 3 个以上的知识点的题目,2022 年和 2023 年“大于等于三”水平下的题量占比基本一致,在 10%左右。难度系数 d_5 的排序为:2022 年 ($d_5 = 0.72$) > 2023 年 ($d_5 = 0.64$) > 2020 年 ($d_5 = 0.57$) > 2021 年 ($d_5 = 0.50$)。

在“思维方向”方面,如图 6 所示,2021 年新高考 I 卷对逆向思维的考查较多,2023 年最少,2020 年与 2021 年的情况基本一致。就难度系数 d_6 来说,2021 年的难度系数最大,为 0.84;2023 年的难度系数最小,为 0.71,总体排序为:2021 年 ($d_6 = 0.84$) > 2022 年 ($d_6 = 0.80$) > 2020 年 ($d_6 = 0.74$) > 2023 年 ($d_6 = 0.71$)。

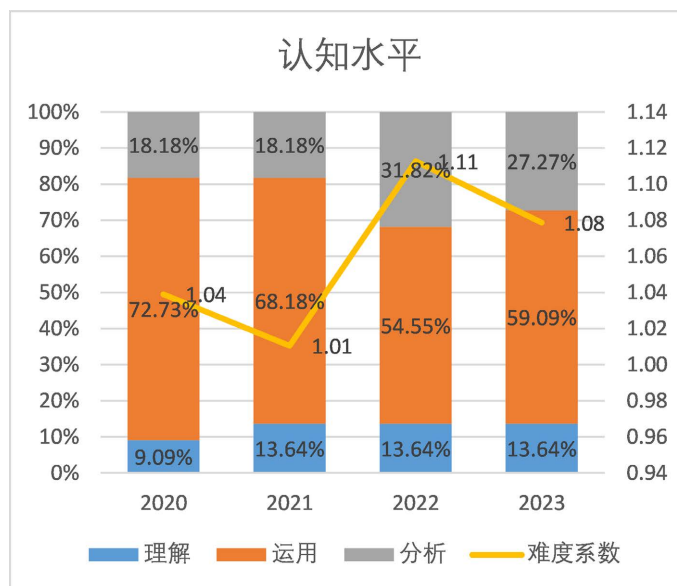


Figure 7. Percentage histogram with cognitive level
图 7. 认知水平百分比柱状图

在“认知水平”方面，如图 7 所示，近四年的新高考 I 卷对于“理解”“运用”“分析”这三个层面的考查重点是基本一致的：“理解”和“分析”两个层面的考查较少，多数题在考查“运用”层面。此外，对于“运用”层面来讲，2020 年和 2021 年考查的题目数量相近，占比均在 70% 左右，2022 年和 2023 年的新高考 I 卷较前两年减少了对“运用”层面的考查，转而增加了对“分析”层面的考查，也是对学生的认知水平提出了更高的要求。就难度系数而言，2022 年($d_7 = 1.11$) > 2023 年($d_7 = 1.08$) > 2020 年($d_7 = 1.04$) > 2021 年($d_7 = 1.01$)。

将 7 个因素的难度系数放在雷达图上，如图 8 所示，我们可以很明显看出 2022 年的新高考 I 卷在每个因素的考查上难度都比其他三年的大。

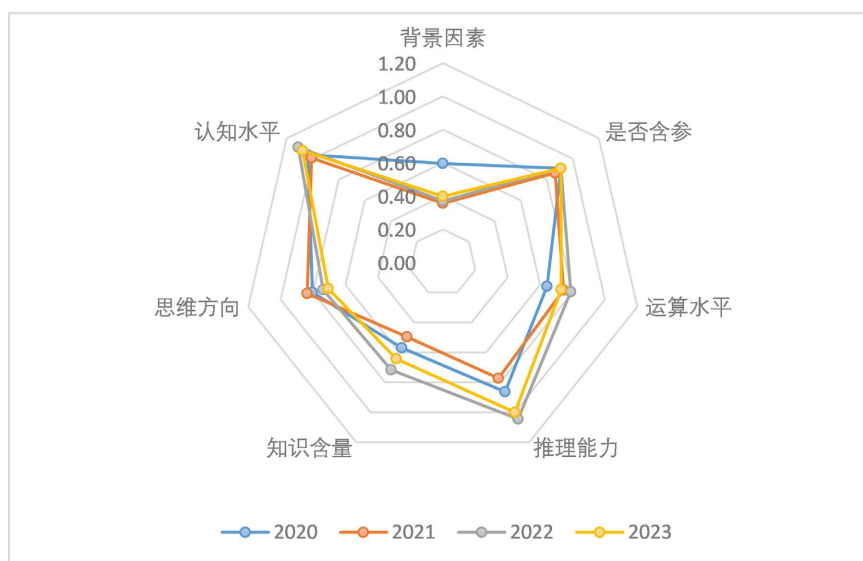


Figure 8. The radar chart of the difficulty coefficient of each factor
图 8. 各因素难度系数雷达图

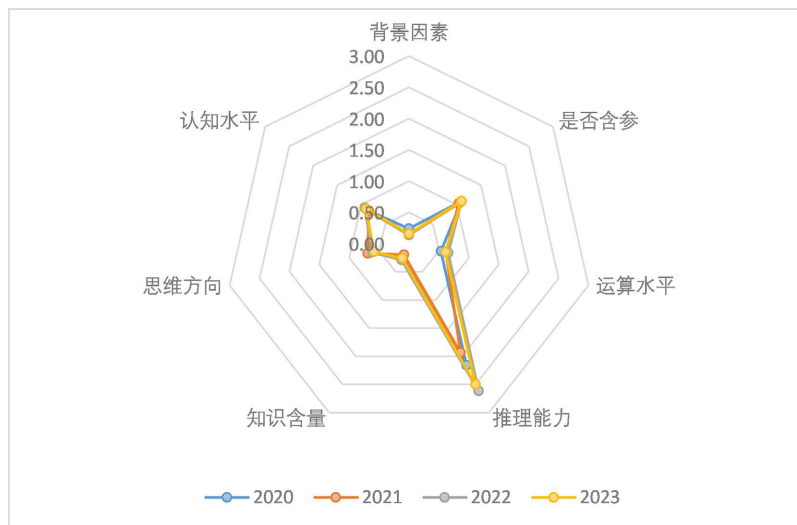


Figure 9. The radar chart of the difficulty coefficient of each factor after weighting
图 9. 赋权重后各因素难度系数雷达图

为比较 2020 年~2023 年这四套新高考 I 卷对各个因素的考查程度是否不同，我们对这 7 个因素赋予权重 $\sigma_i = (0.40 \ 1.20 \ 0.83 \ 2.50 \ 0.40 \ 0.83 \ 0.83)$ ，得到如图 9 所示雷达图。在图 9 中，我们可以看出 2020 年~2023 年这四套新高考 I 卷对于这 7 个因素的考查侧重点基本一致：均侧重于对推理能力的考查，对推理能力的考查程度远超其余 6 个因素，这也给我们日常教学活动的组织提供了许多启发。

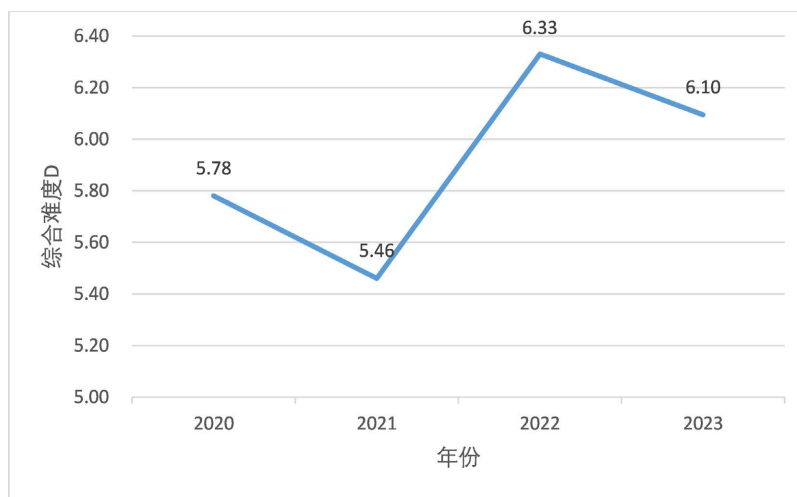


Figure 10. Trend chart of comprehensive difficulty change
图 10. 综合难度变化趋势图

为比较综合难度的变化趋势，绘制了如图 10 所示的难度变化趋势图。从图中我们可以看出，2022 年的新高考 I 卷综合难度最高，2023 年的这难度略低于 2022 年，但也高于 2020 年和 2021 年。

4. 命题趋势预测与教学应对建议

4.1. 命题趋势预测

纵观上面分析，发现数学新高考 I 卷命题具有如下特点：

4.1.1. 立足核心素养，重视对基础知识的考查

从综合难度来看，2023 年的新高考数学 I 卷较 2022 年的难度有所降低，这也助力于“双减”政策的更好地施行。此外，新高考的试题更强化基础性，考查内容更注重学生对数学学科基础知识、基本概念的理解，更多地回归教材“原点”，具体表现在由教材的例题或者习题改编而来的题目出现的更多了。如 2023 年第 21 题，在以往的试卷中解答题对知识点的考查都较为独立、较为固定，今年的试卷中考查概率的同时还考查了数列，看似考查方式十分新颖，实则改编自 2019 年人教 A 版选择性必修三的复习参考题第 10 题。学生想要考出一个较好的分数，不再是以前死记硬背解题方法、解题技巧就能做到的，学生需要对知识有一个更深入的理解，学会灵活运用向量工具、函数手段等。

4.1.2. 依托数学知识，重视对学生数学思想方法的考查

高考数学离不开数学思想方法的引领，考查基础知识的背后是对学生数学思想方法的考查。数学思想方法是数学知识在更高层次的抽象和概括，蕴含在数学知识发生、发展和应用的过程。数学思想方法包括但不限于数形结合、等价转换、分类讨论、建模思想、整体思想、归纳法、类比法等[2]。

此外，在新高考 I 卷中，对数学思想方法的考查更倾向于多种方法一起考查，如 2023 年新高 I 卷的第 15 题，需要学生先对“ ωx ”进行整体换元，再作出函数图像，数形结合并考虑参数的取值范围。这就对学生和教师提出了更高的要求，学生在理解这些数学思想方法的过程中得深入理解、融会贯通。

4.1.3. 依托知识网络交汇点，注重知识的综合性和创新性考查

增加综合性、创新性试题的考查将是新高考命题的一大方向。近几年的新高考 I 卷中不乏在知识网络的交汇点设计情境新颖、综合性强的题目，以此来检测学生在不同情境下的知识迁移能力，从而对学生个体思维的深度以及广度以及进一步深造学习的潜能作出区分。如 2022 年的第 8 题，综合考查了几何、函数、一元函数的导数等知识；2023 年的第 22 题，综合考查了函数、抛物线、基本不等式、直线方程等知识点。故新高考将更加注重知识之间的内在联系，数学思想方法的合理应用，要求学生综合应用数学方法分析问题、解决问题，促进学生形成完整的知识结构。

4.1.4. 利用问题情境与数学知识间的联系，重视学生数学应用意识的培养

数学不仅是数量关系和空间形式的科学，也是研究自然现象、解释空间形式的基础。在 2020 年到 2023 年间的新高考 I 卷一直有具有现实生活背景或者科学背景的问题，目的是考查学生对客观事物数学化、将现实问题转化为数学问题的能力。问题的设计渗透到社会的各个方面，如 2022 年的“南水北调”问题、居民卫生习惯与疾病感染的相互关系，2023 年的噪声污染问题和学生选课方案设计。这就要求学生能快速地将问题情境与所学知识进行联系，提炼出相关的数学关系，寻找适当的方法解决问题并加以验证，并用数学语言予以表征。

4.2. 教学应对建议

4.2.1. 把握课程基本理念，落实数学育人作用

数学教育承载着落实立德树人根本任务、发展素质教育的功能[3]。教师在课堂教学过程中，可以有意识地渗透一些中华优秀传统文化美德、优秀传统文化手工艺等，增强学生文化自信，培养学生优良的品质，提升学生民族自豪感。

4.2.2. 梳理知识间联系，引导学生关注数学内在逻辑

与其他学科相比，数学知识的衔接性和连贯性较强，其内在的逻辑体系是课堂的核心教学内容。教师在教学过程中，不光要讲好单个知识点，也要引导学生体会知识点之间的联系。可以在学期中、学期

末开展单元专题学习,使学生能进一步领会知识间的内在联系,从而根据自身的理解主动建构知识体系,掌握学习方法和研究思路,发展数学思想。

4.2.3. 充分挖掘教材,做好数学思想方法的教学

教师在进行包括分类讨论思想与数形结合思想在内的数学思想方法的教学时,要结合具体的数学知识来进行,只有让数学思想方法与数学知识紧密结合起来,并采取一定的教学策略,学生才能领略到数学思想方法的真实内涵。要在数学知识生成的过程中渗透数学思想方法,在学习反思的过程中明晰数学思想方法。

此外,教师在分析教材时,就要重点分析数学思想方法存在于哪些知识产生的环节,而基于学生认知特点寻找相应的策略,则是数学思想方法教学的关键[4]。

4.2.4. 重视数学实践,培养创新思维 and 实践能力

在教学过程中,要依据实际教学情况,适当设计一些数学探究活动。在活动中培养学生抓住问题本质,自主解决问题的能力。同时,教师可以在探究活动中选择恰当的方法,促进知识体系的形成和数学方法的结构化。此外,在教学过程中要多一些开放性,培养学生发散性思维,培养学生创新能力,让学生在面对综合性较强的问题和新颖、较为复杂的情境时,能发挥探究能力和创新精神,独立自主解决问题。

致 谢

感谢导师在我第一篇文章提供的无私支持与帮助。

基金项目

2022 年度省级一流本科专业——数学与应用数学建设点(教高厅函(2022)14 号)。

参考文献

- [1] 武小鹏,孔企平. 基于 AHP 理论的数学高考试题综合难度模型构建与应用[J]. 数学教育学报, 2020, 29(2): 29-34.
- [2] 蒋海瓯,梅映雪,王振丽. 新课程数学高考自主命题趋势预测与展望[J]. 中学教研(数学), 2011(2): 10-16.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [4] 王宏伟. 高中学段数学思想方法的建立与培养——以高中学段函数概念、函数性质的教学为例[J]. 数学教学通讯, 2022(9): 48-49.