

高中生数学学科关键能力测评指标体系的构建

彭 阳¹, 朱宇萌¹, 邵贵明^{1*}, 熊建军²

¹黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

²湖北省鄂州高中, 湖北 鄂州

收稿日期: 2024年9月2日; 录用日期: 2024年10月3日; 发布日期: 2024年10月9日

摘要

数学学科关键能力是基于学生数学学科核心素养的外显能力, 研究核心素养视域下的数学学科关键能力测评指标体系是促进数学核心素养落地生根的重要保障。研究以STEAM教育理论、PISA和TIMSS数学素养测评框架、高中数学课程标准要求为基础, 运用专家咨询法与层次分析法, 构建了高中生数学学科关键能力测评指标体系, 具体涵盖数学观察、数学思考、数学表达3个一级指标, 每个一级指标包括4个二级指标, 得到表达式为: 数学学科关键能力 = 0.165*数学观察 + 0.249*数学思考 + 0.586*数学表达, 教师可以根据该测评体系, 指导学生提升数学学科关键能力。

关键词

数学学科关键能力, 测评指标, 核心素养

Construction of Evaluation Index System of Senior High School Students' Key Abilities in Mathematics

Yang Peng¹, Yumeng Zhu¹, Guiming Shao^{1*}, Jianjun Xiong²

¹School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

²Ezhou High School, Ezhou Hubei

Received: Sep. 2nd, 2024; accepted: Oct. 3rd, 2024; published: Oct. 9th, 2024

Abstract

The key ability of mathematics is the explicit ability based on the core quality of mathematics. To

*通讯作者。

study the evaluation index system of the key ability of mathematics from the perspective of the core quality is an important guarantee to promote the implementation of the core quality of mathematics. Based on STEAM education theory, PISA and TIMSS mathematical literacy assessment framework, and senior high school mathematics curriculum standard requirements, the research uses expert consultation method and analytic hierarchy process to build a key ability assessment index system for senior high school mathematics, which specifically covers three first-level indicators: mathematical observation, mathematical thinking and mathematical expression. Each first-level indicator includes 4 second-level indicators, and the expression is as follows: Key ability of mathematics subject = 0.165*mathematical observation + 0.249*mathematical thinking + 0.586*mathematical expression. Teachers can guide students to improve the key ability of mathematics subject according to the evaluation system.

Keywords

Key Ability of Mathematics Subject, Evaluation Index, Core Quality

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

《普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)》(以下简称“新课标”)指出,高中数学要养成学生六大学科核心素养,培养学生满足社会发展和终身发展需要的关键能力、思维品质及其情感、态度和价值观[1]。数学学科关键能力是学生基于核心素养的外显能力[2]。它是指学生经历高中数学后,在面对学习、生活、工作中的问题时,知道高质量地思考问题,从数学学科视野乃至是学科融合的角度去分析问题的能力。测评高中生数学学科关键能力有其现实意义,它既能划分学生的能力水平差异,又能使学科关键能力在课堂教学中真正得到提高,促进数学学科核心素养落地生根。

PISA 等大型测评项目已然构建了体现科学性与可操作性的倾向于数学素养的测评框架,但这些结构框架并不是真正意义上对数学关键能力的水平划分,还是传统意义上以数学成绩为主的学业成就评价,构建的测评体系也受地域文化影响较大,而我国多数学者的研究受 PISA 影响较大,缺乏本土化改造[3]。我国学者对数学学科关键能力的研究大多数始于 2014 年《立德树人的意见》颁布之时,起步相较其他国家稍晚,研究者更多地关注数学关键能力内涵界定、构成要素、培养策略的剖析,对数学学科关键能力测评体系的具体操作指标的研究较少,且主要针对中小学。综上,构建高中生数学学科关键能力测评指标体系具有重要意义。

本研究构建了高中生数学学科关键能力测评指标体系,具体涵盖数学观察、数学思考、数学表达 3 个一级指标,每个一级指标包括 4 个二级指标,希望辅助中学教师有侧重点地提升学生的数学学科关键能力。

2. 数学学科关键能力测评研究综述

喻平指出,在数学核心素养的必备品格和关键能力这两个构成要素中,必备品格很难量化[4]。因此,探讨数学关键能力的测量和评价方法,已然成为热点话题,也是新高考改革的重要任务。要想真实有效地反馈学生数学关键能力发展水平,构建测评框架是必不可少的,测评体系应当体现科学性以及可操作性。在 CNKI 的数据库进行高级检索,设置检索主题为“数学关键能力”并含“测评”,获得契合主题的文献总共 18 篇,包括学位论文 3 篇和学术期刊 15 篇。因此有关该领域测评的研究还比较匮乏,深入研

究数学学科关键能力的测评指标体系具有重要意义。喻平将数学知识的学习划分为理解、迁移和创新三个阶段，在解析国外已有评价模型优缺点的前提下，基于这三种知识学习的形态构建了数学关键能力的评价框架[3]。通过编制测试试题来考察学生的数学关键能力水平，强调测验题目编制要注重形式多样化、情境合理化、布局合理化，为中学一线教师提供了编制数学关键能力测量工具的思路方法。朱立明对数学关键能力的理论要素进行析取，利用专家咨询法和问卷调查法等方法，通过理论与实践相结合，构建了高中生数学关键能力的测评框架，用于实际教学测评，具有较高的科学性与可靠性[5]。曹一鸣从学习理解、实践应用、创造迁移三个一级指标以及九个二级指标构建了学生数学学科能力测试框架[6]。通过已有研究可以看出，数学学科关键能力体系庞大，涉及的分支内容较多，上承核心素养，下联必备知识，测量与评价难度较大[7]。已有的测评体系还不够多维，因此，科学、全面地对高中生数学学科关键能力进行测评成为亟待解决的问题。

综上，本研究借鉴数学学科核心素养测评模型等已有教育领域测评模型的基本思路。先对构建测评指标体系的理论基础进行分析；再融合多方意见构建出测评指标，用专家咨询法对其进行检验；最后用层次分析法确定数学学科关键能力各测评指标的权重[8]。

3. 构建测评指标体系的理论基础

为保证测评指标体系的科学合理，应遵循学理依据，理论基础能够为测评提供逻辑联结与基本架构[8]。

3.1. STEAM 教育理论的适用倾向

STEAM 是跨学科融合的教育理论，代表科学(Science)、技术(Technology)、工程(Engineering)、人文(Art)、数学(Mathematics)，其核心教育理念是：跨学科融合、真问题解决以及新技术赋能，重视学科交叉融合以及知识的融会贯通。首先，跨学科融合是指通过交叉学科的整合，将不同领域的知识和方法进行结合，帮助学生形成综合性的学习思路和方法，从而能够全面系统地解决问题。其次，通过研究实践性和创新性的现实问题，为学生提供真实的问题情境，以积极主动的学习方式，激发学生对实践应用的兴趣，使得学生能够从知识理解上升到知识迁移的阶段，逐步养成解决问题的能力。最后，新技术赋能能够利用先进信息技术，将教育重点转向学生的思考过程和学习过程当中，在教育数字化的过程中，学生亲身参与、体验将不同学科领域的知识方法联系起来，以此来拓展学生思维结构，提高关键能力[8]。

数学学科关键能力与 STEAM 教育理论的三大核心理念本质上相同，即注重学生的全面发展，培养具有核心能力的创新型人才，追求素质教育。在 STEAM 教育理念指导下，构建数学学科关键能力测评指标体系时，应该寻找两者之间的结合点，数学学科关键能力是关键能力与数学学科相结合的产物，是关键能力在数学学科的具体化，它与 STEAM 教育具有一致的学习过程和学习目标[8]。因此，在 STEAM 教育理论指导下，构建数学学科关键能力测评指标体系是完全可行的。

3.2. PISA 与 TIMSS 数学素养测评框架

PISA 与 TIMSS 是两个国际著名评价项目，最近尤其注重对学生数学素养的测量与评价，其数学素养测评框架如表 1 所示[9]。在 PISA 的内涵解析中，指出数学素养是学生鉴别和理解真实世界中数学规律的能力，不局限在掌握数学知识和技能，而是学生作为一名关心他人和主动思考的社会公民，能够将数学创造性地运用到各方面需要中，获得一种总括的精神和方法，使用数学解决现实问题来适应未来生活的需要[9]。TIMSS 虽然只是将数学框定在学校数学课程中的数学，但它的评价理念也指向对学生的基本数学知识背后蕴涵的数学思维能力的考察。所以，PISA 与 TIMSS 数学素养评价框架在某种程度上是具有一致性的[10]。

Table 1. PISA and TIMSS mathematical literacy assessment framework
表 1. PISA 与 TIMSS 数学素养评价框架

	PISA	TIMSS
数学内容	四个“总体思想”： 数量； 空间与模型； 变化与关系； 不确定性。	五个领域： 数； 代数； 测量； 几何； 数据。
数学过程与数学认知	数学能力下的三大能力群： 再现能力群； 联系能力群； 思考能力群。	四个认知领域： 了解事实和过程； 使用概念； 解决常规问题； 推理。

PISA 与 TIMSS 针对数学素养的评价理念与数学学科关键能力的本质理念在某种程度上具有一致性。喻平分析了 PISA 关于数学素养的测评结构之后指出，其“数学过程”实质上不是对数学能力的水平划分，而是一种分类，更多的是考察三大能力群在不同数学过程中的表现，对数学关键能力进行测评的目的则是为了划分学生的能力水平差异[3]。因此，直接将 PISA 和 TIMSS 测评框架移植到我国数学学科关键能力的测评中是不适用的，需要进行本土化改进，但无论是 PISA 还是 TIMSS 都将培养学生的创新能力和实践能力作为教育的首要任务，这与数学学科关键能力的教育诉求具有一致性，都能够为我国数学学科关键能力测评体系的构建提供参考。

3.3. 高中数学课程标准的相关要求

新课标首次提出并明确地对数学核心素养进行了界定，关键能力是核心素养必备成分之一。数学关键能力是关键能力在数学学科的投射，是数学教育在新时代的基本诉求，是数学学科核心素养的必备成分[1]。新课标指出，重点发展学生的“四基”和“四能”，划分了六大核心素养，蕴涵六大学科关键能力，并且将数学核心素养进一步解读为“三会”，分别是会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的语言表达现实世界[11]。评价工具要与时俱进，兼顾基础知识、基本技能和核心素养，构建兼顾过程与发展的新型评价体系。评价方式要转变传统模式，不仅关注学业成绩，更要注重学生的思维过程，致力于帮助学生达成数学核心素养。伴随着新课标的颁布，2019 年发布的高考评价体系将考察内容凝练为“核心价值、学科素养、关键能力、必备知识”[12]。由此可见，关键能力上承核心素养，下达必备知识，其重要性不言而喻，对数学关键能力进行测评也显得格外重要。新课标是数学教学的指导方针，也是数学学科关键能力测评体系构建应该遵循的根本依据，为构建数学学科关键能力测评指标体系指引了方向。

4. 数学学科关键能力测评指标体系的构建

基于数学学科在高考评价体系中的功能定位，依据新课标要求，多元融合各方意见，将一级指标确定为数学观察、数学思考和数学表达能力[13]。

4.1. 测评指标体系的构成

先将这 3 种能力作为测评指标体系中的一级指标，再梳理国内外已有研究成果和测评理论，对核心词进行频次统计，同时根据德尔菲法对专家咨询人数的建议(10~50 人)，利用专家咨询法对高频核心词进行筛选，调查了 24 位专家，包括 10 位数学教育专家、6 位高中数学教研员和 8 位高中数学高级教师，

确定了每个一级指标包括 4 个二级指标，构建出高中数学学科关键能力测评指标体系(见表 2)。

Table 2. Evaluation index system of senior high school mathematics key ability

表 2. 高中生数学学科关键能力测评指标体系

一级指标	二级指标
数学观察(A)	观察记忆(A1) 概括理解(A2) 数学抽象(A3) 直观想象(A4)
数学思考(B)	数学运算(B1) 逻辑推理(B2) 分析论证(B3) 数学猜想(B4)
数学表达(C)	数据分析(C1) 数学建模(C2) 问题解决(C3) 发现创新(C4)

数学观察能力指的是学生通过观察现实世界概括提取事物的数学属性，用数学语言表征数量关系以及图形关系，抽象出数学概念，得到一般结论和规律。该能力对应的是中国高考评价体系中的知识获取能力群。它包括观察记忆、概括理解、数学抽象、直观想象 4 个二级指标。观察记忆是学生通过观察，识别、表述所学的数学知识和概念定理，在长时记忆系统中提取、储存相关联的知识[14]；概括理解是学生概括数量关系、图形特征及简单运算关系，理解图表、符号等多种形式所描述的数学内容，抽取事物的本质属性进而从特殊推广到一般；数学抽象是学生从现实世界中的数量关系、图形关系中抽象出数学概念，得到一般规律，用数学语言符号给予表征[15]；直观想象是学生基于事物的空间形式或数学符号表征进行几何直观和空间想象，对数学问题进行转化，构建直观模型，形成数学直觉[16]。

数学思考能力体现了数学逻辑推理的属性。该能力强调学生的运算能力和推理能力，要求学生从一些事实和命题出发推出其他命题，在逻辑推理的过程中建立数学的思维模式。其对应的是中国高考评价体系中的思维认知能力群。它包括数学运算、逻辑推理、分析论证、数学猜想 4 个二级指标。数学运算是学生分析运算对象，确定运算方向，根据数学运算规律计算运算结果[17]；逻辑推理是学生面临复杂情境，梳理其中的逻辑关系，洞悉变化规律，建立数学思维模式；分析论证是学生通过大胆猜想和科学论证获得数学结论，包括合情推理和演绎推理；数学猜想是由某些特殊案例猜想一般数学规律。

数学表达能力体现了学以致用的理念。该能力要求学生基于现实问题构建数学模型，使用所学知识来解决生活中的数学问题，加深对数学知识的理解，增强发现创新的意识。其对应的是中国高考评价体系中的实践操作能力群。它包括数据分析、数学建模、问题解决、发现创新 4 个二级指标。数据分析是学生收集、分析、提取相关数据，使用概率与统计方法，预测推断结论；数学建模是学生从生活中抽象数学模型，用数学语言表达实际问题[18]；问题解决是学生通过分析、思考和推理，运用数学知识解决生活情境中的数学问题；发现创新是学生结合所学的数学知识，在具体情境中创造性地提出新问题、新思路等[13]。

4.2. 测评指标权重的确定

为确定各指标的权重，再次征询上述 24 位专家，用层次分析法来计算出各指标的权重值。层次分析法是美国运筹学家 Saaty 于 20 世纪 70 年代初提出的，它是将与决策相关的要素分解为目标、准则、方

案等层面，并进行定性与定量相结合分析的方法，具有系统性、灵活性、简明性等特点，其实质上是对定性问题进行定量分析的一种多维决策方法[19]，其基本步骤如图 1 所示。

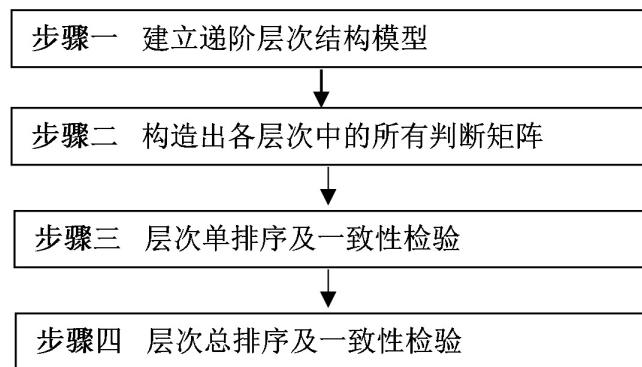


Figure 1. Basic steps of analytic hierarchy process
图 1. 层次分析法基本步骤

在构建评价指标体系的基础上，引用数字 1~9 及其倒数作为标度来构造判断矩阵。判断矩阵用以衡量两个指标之间的重要程度，以某位专家对一级指标评分得到的判断矩阵为例[20]（见表 3）。 $A_{32} = 3$ 代表该专家认为数学表达与数学思考相比，前者比后者稍重要， $A_{31} = 5$ 表示该专家认为数学表达与数学观察相比，前者比后者明显重要。总的来说，标度数字从 1 到 9 表示两个指标相比其重要程度逐渐增强，倒数则是表示若两个指标 i 和 j 的重要性之比为 a_{ij} ，则指标 j 和 i 的重要性之比为 $1/a_{ij}$ 。

Table 3. The judgment matrix of an expert on the first level index
表 3. 某专家对一级指标的判断矩阵

一级指标	数学观察	数学思考	数学表达
数学观察	1	1/2	1/5
数学思考	2	1	1/3
数学表达	5	3	1

构建完判断矩阵后首先按列进行归一化处理，即 $a_{ij}/\sum_{k=1}^n a_{kj}$ ；再按列相加，将相加得到的向量除以 n 即得到权重向量，即 $W_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{kj}}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，从而算出各指标的权重值。比如，表 3 所示的专家认为一级指标权重分别为 0.1222、0.2299、0.6479。

采用层次分析法计算各指标权重时，还需要计算一致性比例 CR ，

$$CR = \frac{CI}{RI}, \quad CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \quad \lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n \frac{(AW)_i}{nw_i},$$

其中，查询随机一致性表格就可以得到 RI 值， n 指的是矩阵阶数， w 指特征向量， λ_{\max} 指矩阵最大特征值， AW 则指矩阵乘以矩阵的特征向量。 $CR < 0.10$ 时则认为判断矩阵的一致性是能够接受的，不然就要对判断矩阵进行适当修改。例如，以表 3 所示专家的判断矩阵进行一致性检验， $\lambda_{\max} = 3.004$ ， $CI = 0.002$ ， $n = 3$ 时， $RI = 0.525$ ， $CR = \frac{CI}{RI} = 0.004 < 0.10$ ，表示一致性可以接受，满足一致性检验。

按照上述步骤,统计分析24份问卷,最后的判断矩阵数值则取各专家评分的均值,再用加权综合法计算出二级指标的权重值,得到高中生数学学科关键能力各个测评指标的权重值和对应排序(见表4)。得到数学学科关键能力 $M = 0.165 * A + 0.249 * B + 0.586 * C$,可以看出一级指标中数学表达能力重要程度最大,实际教学中应引导学生学以致用。

Table 4. The weight value of the key ability assessment index of senior high school mathematics**表4. 高中生数学学科关键能力测评指标的权重值**

一级指标	权重	排序	二级指标	权重	排序
数学观察(A)	0.165	3	观察记忆(A1)	0.011	4
			概括理解(A2)	0.014	3
			数学抽象(A3)	0.053	2
			直观想象(A4)	0.087	1
数学思考(B)	0.249	2	数学运算(B1)	0.030	4
			逻辑推理(B2)	0.105	1
			分析论证(B3)	0.048	3
			数学猜想(B4)	0.066	2
数学表达(C)	0.586	1	数据分析(C1)	0.038	4
			数学建模(C2)	0.127	3
			问题解决(C3)	0.154	2
			发现创新(C4)	0.267	1

5. 研究结论与研究展望

本研究借鉴教育领域已有测评指标体系构建的基本思路,运用专家咨询法和层次分析法,构建了数学学科关键能力测评指标体系,包括数学观察、数学思考、数学表达3个一级测评指标,囊括了12个二级测评指标,并得到了线性表达式,即数学学科关键能力 = 0.165*数学观察 + 0.249*数学思考 + 0.586*数学表达。教师可以根据这个测评体系,结合自身教学经验,不拘泥于形式,而是着眼于本质,对学生的数学关键能力进行评估和监管,同时根据实时动态数据,有针对性地设计教学方案,指导学生提升数学学科关键能力。由于数学学科关键能力相关评价研究较少,本研究构建的测评体系,仍然需要后续加强深度研究。

基金项目

黄冈市社会科学研究课题“短视频热潮下大学生思政教育面临的挑战及应对策略研究”(2024099);湖北省教育科学规划2022年度重点课题“课程思政与数学文化双融合的中学数学教学设计研究”(2022JA212);黄冈市教育科学规划课题“双减”目标下的作业设计与差异化教学研究(2022GB37);黄冈师范学院研究生工作站课题“核心素养视域下高中生数学深度学习测评指标体系的构建”(5032023023)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 朱立明. 高中生数学关键能力: 价值、特质与操作性定义[J]. 天津师范大学学报(基础教育版), 2021, 22(2): 49-54.
- [3] 喻平. 数学关键能力测验试题编制: 理论与方法[J]. 数学通报, 2019, 58(12): 1-7.
- [4] 喻平. 学科关键能力的生成与评价[J]. 教育学报, 2018, 14(2): 34-40.
- [5] 朱立明. 高中生数学关键能力测评指标体系的构建[J]. 课程·教材·教法, 2020, 40(3): 34-42.
- [6] 曹一鸣, 刘晓婷, 郭衍. 数学学科能力及其表现研究[J]. 教育学报, 2016, 12(4): 73-78.

-
- [7] 江合佩. 高中化学学科关键能力的测评及教学建议[J]. 教育测量与评价, 2019(6): 42-49.
 - [8] 朱立明, 宋乃庆. STEAM 教育理念下深度学习测评指标体系构建研究[J]. 四川师范大学学报(社会科学版), 2022, 49(4): 125-133.
 - [9] 苏洪雨. PISA 和 TIMSS 视野下的学生数学素养探究[J]. 数学通讯, 2007(9): 1-5.
 - [10] 刘晓玲, 陈娟. PISA 与 TIMSS 中有关数学评价的比较分析[J]. 外国教育研究, 2007(2): 77-80.
 - [11] 孔凡哲, 赵欣怡. 培养核心素养中小学“一以贯之”:《义务教育数学课程标准(2022 年版)》的基本特点[J]. 教育科学研究, 2022(9): 43-48.
 - [12] 郭学恒, 吴成军. 基于高考评价体系的生物学科关键能力考查研究[J]. 天津师范大学学报(基础教育版), 2022, 23(3): 64-69.
 - [13] 李霞, 苏科庚. 高中生物学科关键能力测评指标体系的构建及应用[J]. 教育测量与评价, 2023(2): 53-63.
 - [14] 曹一鸣, 王振平. 基于学生数学关键能力发展的教学改进研究[J]. 教育科学研究, 2018(3): 61-65.
 - [15] 朱立明. 初中生数学关键能力测评模型构建研究[J]. 唐山师范学院学报, 2021, 43(4): 139-145.
 - [16] 朱立明. 数学关键能力测评: 价值、困境与突破[J]. 教育理论与实践, 2020, 40(5): 49-52.
 - [17] 朱立明. 高中生数学关键能力研究的追溯与前瞻[J]. 天津师范大学学报(基础教育版), 2019, 20(4): 32-35.
 - [18] 曹一鸣, 刘坚. 促进学生数学核心素养与关键能力发展的教学研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2017(4): 3-6.
 - [19] 邓雪, 李家铭, 曾浩健, 等. 层次分析法权重计算方法分析及其应用研究[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(7): 93-100.
 - [20] 徐金润, 刘梦露, 肖阳芳, 等. 高中生数学深度学习测评指标体系的构建[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2023(13): 36-40.