

数学史融入课堂教学的策略研究

丁凤专

吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2024年9月8日; 录用日期: 2024年10月7日; 发布日期: 2024年10月14日

摘要

数学史与数学教育(HPM)这一研究领域自提出以来就为广大学者所关注, 但是尽管评价积极, 将其融入课堂教学的实践仍然不足, 出现了“高评价、低运用”的现象。解决这一现象需从教学这一主要环节开始, 本文依据数学史融入课堂教学需要遵循的适时适量性、关联性、启发性、创新性原则, 对课堂教学过程中的新课导入、新知讲解、练习巩固、应用拓展以及作业布置等环节分别提出系列策略, 如采用数学史故事导入, 对比古今的数学思想方法讲授知识点等, 旨在让数学史更深入且自然地融入数学教学过程中。最后, 利用所提出的策略对《指数函数的概念》一节进行教学设计。

关键词

HPM, 课堂教学, 融合策略

Research on the Strategies of Integrating Mathematical History into Classroom Teaching

Fengzhuang Ding

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Sep. 8th, 2024; accepted: Oct. 7th, 2024; published: Oct. 14th, 2024

Abstract

The history and pedagogy of mathematics (HPM) has been concerned by many scholars since it was put forward, but although the evaluation is positive, the practice of integrating HPM into classroom teaching is still insufficient. There is a phenomenon of “high evaluation, low application”. To solve this problem, we need to start with the main link of teaching. According to the principles of timeliness, appropriateness, relevance, inspiration and innovation that mathematical history needs to be

integrated into classroom teaching, this paper puts forward a series of strategies for the introduction of new lessons, the explanation of new knowledge, the consolidation of exercises, the development of application and the arrangement of homework in the process of classroom teaching, for example, the introduction of mathematical history stories and the comparison of ancient and modern mathematical thinking methods to teach knowledge points. It aims to make the history of mathematics more deeply and naturally integrated into the teaching process of mathematics. Finally, the teaching design of "The Concept of Exponential Function" section is carried out by using the proposed strategy.

Keywords

HPM, Classroom Teaching, Fusion Strategy

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

如何有效提升学生的核心素养以及学生在课堂上的学习效率一直是广大学者关注的一个重要问题。从 19 世纪开始一些西方数学家、数学史家以及数学教育家开始研究数学史与数学课堂教学的关系并意识到数学史对数学教育的重要性[1]。1972 年, 随着数学史与数学教学关系国际研究小组(International Study Group on the Relation between History and Pedagogy of Mathematics, 简称 HPM)的成立, 数学史和数学教育正式成为一个独立的学术领域[2]。

20 世纪初, 在经过李俨先生与钱宝琮先生与其团队的不断研究、探索后, 构建了中国数学史研究的较为系统的理论体系, 为现代中国数学史的研究提供了基本方向[3]; 学者余庆纯和汪晓勤追溯了自 21 世纪以来中国 HPM 研究的发展历程, 并对其主要研究内容及方法进行总结, 发现中国 HPM 研究内容聚焦于七大核心主题, 如, HPM 理论研究、教育取向的数学史研究、历史相似性的实证研究等, 同时这些研究广泛采用了历史研究、调查研究、实验研究等研究方法[3]; 沈中宇等学者从 HPM 研究组在第 13 届国际数学教育大会所作的 38 个报告中总结出国际 HPM 研究的特点及其对中国 HPM 研究的启示[4]; 学者徐章韬和汪晓勤对 HPM 的教育价值进行了剖析, 指出深挖其教育价值是改变数学史“高评价、低运用”的现状的一种重要手段[5]。

可以说经过多年的发展与沉淀, 如今中国的 HPM 研究已经从萌芽探索阶段发展为融合赋能阶段, 对 HPM 的研究也逐渐从“为历史而历史”转化为“为教育而历史”[3], 通过实践研究发现, 将数学史融入数学教学具有构建知识之谐、彰显方法之美、营造探究之乐等六类价值[6]。

虽然我国对 HPM 的研究一直在如火如荼地进行, 但是把数学史真正融入课堂进行教学还是停留在表面, 这就导致了“高评价、低运用”的现象的出现[7]。那么, 应该怎样将数学史与数学课堂教学融合呢? 在融合过程中应该注意些什么呢?

2. 数学史融入课堂教学的原则

将数学史融入数学课堂, 古人发现知识、证明知识的过程, 可以缩短学生与数学知识之间的距离, 也可以实现“人人都能获得良好的数学教育, 不同的人 在数学上得到不同的发展”这一课程理念[8]。但是不可为了数学史而数学史, 在将数学史融入课堂教学时应该遵循以下原则:

第一，适时适量性原则。在将数学史融入数学课堂时应该根据本节课的教学目标适时进行引入，让数学史在数学课堂中展现得恰到好处；同时，所引入的数学史的内容应当适量，在数学课堂中过多地讲述数学史会产生喧宾夺主的效果让学生分不清主次，而过少的数学史的融入可能要达不到预期的教学效果，适量的数学史内容与课堂教学融合可以提高学生的教学，在向学生传递知识的同时也能提高学生的数学文化素养。

第二，关联性原则。在课堂中引入数学史的目的是提高学生的学习效率，同时，培养学生的数学文化素养，所以所引入的数学史的内容应当与教学内容紧密相连，所发挥的作用为辅助教学，在能够帮助学生更好地理解和掌握数学知识的同时，也要能够帮助学生理解数学的发展脉络，不能让学生对课堂的学习目标有误解，分散学生的注意力。

第三，启发性原则。数学史融入中学数学课堂不仅要产生激发学生的学习兴趣 and 好奇心、引导学生主动思考和探索数学问题的效果，也要具有启发性，学生在听教师讲解古人的思维历程时，其思维方式与解题技巧也能有所提高，这也是将数学史融入中学数学课堂的初心之一。

第四，创新性原则。随着教育的不断推进以及现代教学技术的不断发展，教学资源与内容的不断丰富，数学史融入数学课堂的方式也不能只局限于讲故事这一种形式，引入或者改编数学史中的一些问题或挑战可以激发学生主动思考、探索和创新的能力；采用小组讨论、角色扮演、案例研究等方式可以让学生在互动中学习和体验数学；举办数学史知识竞赛、数学史主题演讲、数学史剧本创作等创新性活动也可以激发学生的学习兴趣，提高其参与度与创造力。

3. 数学史融入课堂教学的策略

由历史发生原理可知，学生学习数学知识的过程与数学知识的历史发展过程具有相似性，因此教师可以参考数学知识的历史发展规律来设计教学，但也要避免因教条地借鉴历史，而导致教学方法的固化与僵化现象[9]。学者余庆纯与汪晓勤对数学史融入数学课堂的教学进行了总结，即一般会使用附加式、复制式、顺应式以及重构式[5]；教师在进行课堂教学时也可以从新课导入、新知讲解、练习巩固、应用拓展、作业布置等具体的教学环节来运用数学史。

3.1. 新课导入：以“史”为引，激发学习兴趣

新课导入环节作为课堂的起始环节，在整个教学过程中扮演着重要的角色，精彩的导入可以吸引学生的兴趣，快速带动学生进入课堂。将数学史融入导入环节可以采取以下几种策略：

第一，采用故事引入的方式。在进行数学教学时，教师可以通过口述、多媒体展示图片或者播放视频等手段将有关的数学史故事导入，再带领学生分析故事中包含的数学问题，逐渐引入所要学习的内容。例如，在讲授等比数列求和这一节时可以用印度国王奖励象棋发明者麦粒的故事作为导入，在讲授曲线的极坐标方程时可以笛卡尔心形线背后的故事来作为导入；

第二，采用提问设疑的方式。课堂伊始，教师可以选取相关数学史上具有里程碑意义的事件或发现来设疑，通过突出其中的矛盾或者未解之谜来激发学生的思考欲望，再展示相关的数学史故事分析问题来导入新知识点。如，在讲解复数时可以先提出这样一个问题：“在语文中有‘虚实’这样一对反义词，在数学中也有实数与虚数，我们学习过了实数，那为什么会有‘虚数’这样的概念呢？它是怎么被发现的呢？”，以该问题引起学生的思考，带领学生快速进入课堂；

第三，采用组织学生动手实践的方式。在学习某知识点时教师可以从该知识点的历史发展过程得到启示用以教学，遵循由易到难的规律，以组织学生动手实践的方式作为导入，吸引学生的注意力，在轻松的氛围下引入学习主题，增加学生学习的动力。以指数函数的概念一节为例，教师可以通过折纸这一

简单但是蕴含数学问题的活动出发来引入，在带领学生分析纸张对折次数与纸张页数之间的关系的过程中自然而然地引出指数函数。

3.2. 新知讲解：以“史”为介，学习数学思想

新课讲授是课堂教学的中心环节，承载着传授新知识、新技能的首要任务，此环节不仅是教师传授知识、启迪思维的重要一环，也是培养学生学习兴趣、激发学习动力的重要环节。在此环节中融入数学史可以加深学生对数学知识本质和知识间内在联系的理解，培养学生的数学核心素养。教师在该过程中可以从以下两个方面尝试融入数学史：

一方面，依据历史教学。教师在梳理相关知识点的历史发展过程后，根据该发展过程中两个环节之间发展过渡的原因、遇到的困难等设计一系列问题，根据由易到难，问问相扣的方式推进教学的进行[10]。例如，在指数函数的概念这一知识点的教学中，教师带领学生得到指数函数的概念，其中底数的取值范围为 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，那么可以提问当 $a < 0$ 、 $a = 0$ 与 $a = 1$ 时分别会出现什么情况呢？在引导学生思考的过程中培养学生的逻辑推理能力和分类讨论思想。

另一方面，可以采用对比分析的方法进行教学[11]。教师可以将现在书本上所学习的数学理论与历史上的方法或思想进行对比分析教学，以此加深学生对知识点的理解，培养学生的数学思想。以正弦定理的证明为例，除了课本上介绍的向量法以外，教师还可以向学生介绍作高法、外接圆法、同径法等证明方法[12]，通过对不同方法的分析比较来展现数学知识之间的紧密联系。

3.3. 练习巩固：以“史”为题，内化数学思想

练习巩固环节是检验学生学习效果、巩固新知的重要阶段，将数学史融入这一环节不仅能丰富教学内容，也能提升学生的数学素养。教师可以根据教学内容选取与之相关的历史名题作为练习题，也可以依据相关数学史背景编制习题，在问题解决的过程中体验数学问题的发现、解决过程，从而将相关数学思想内化。

3.4. 应用拓展：以“史”为钥，拓展数学视野

在课堂对知识点进行拓展能够提升学生的知识应用能力，开拓学生视野，数学史的融入可以促使学生更深入地探索数学知识，理解数学知识的本质和内在联系，从而更易于将所学知识迁移到新情境中。因此，教师在教学过程中可以尝试加入这一环节，选取相关的数学史故事、趣闻和经典问题等加入课堂，提高学生的学习动力。

3.5. 作业布置：以“史”为鉴，开启探究之旅

知识的学习不仅仅是依靠课堂，在课后也需要巩固，作业布置这一环节是巩固学生所学知识、培养自主学习能力和探究精神的重要环节，将数学史融入该环节可以增加作业的趣味性和深度，同时激发学生对数学的兴趣与热爱。在布置作业时形式可以不拘泥于刷题练习，可以布置数学史主题调研、绘制数学史海报、制作数学史时间线等开放作业，提高学生的综合素养和数学素养。

4. 《指数函数的概念》教学片段设计

由于指数函数具有抽象性，其在高中阶段的教学中也属于教学难点的一个部分，许多学生在学习完指数函数之后仍然对指数函数的概念和运算规律难以理解，当学生对指数函数的定义有疑惑时就会产生许多问题，如：指数函数到底是什么？在运用过程中容易忘记或者只会套用公式。在实际教学中，教师往往遵循教材顺序，由幂函数直接过渡到指数函数，忽视了其发展的过程，指数函数背景的缺失就容易

导致学生在学习过程中学习兴趣的缺失。

数学史融入数学课堂教学的作用就在于能够引起学生的学习兴趣 and 加深对指数函数概念的理解。在讲授过程中, 结合相应的数学史, 为学生提供指数函数的发展背景, 引导学生经历指数函数的发展过程, 从而体会其产生的必要性。

4.1. 教材分析

《指数函数的概念》为新人教 A 版教材必修一第四章第二节的内容, 该节分为两个课时, 本节课为第一个课时的教学, 内容是前面所学的幂函数的延续, 同时也为后续对数函数的学习做好铺垫, 具有重要的承上启下的作用。

4.2. 学情分析

在内容上, 此阶段的学生通过对幂函数和指数的学习, 已经具备一定的知识基础与抽象概括的能力; 在思维上, 高中阶段的学生思维较为活跃, 有一定的观察分析能力和解决问题的能力, 但是在归纳指数函数的定义时可能会有忽视的地方, 因此, 应多设置思维引导点, 带领学生一起分析并解决问题。

4.3. 教学目标

知识与技能: 理解指数函数的概念, 了解指数函数的应用价值;

过程与方法: 通过发现数据变化与不变的共同特征, 对指数函数的概念进行定义, 培养学生的数学抽象、数学建模能力, 同时感受数学的实际应用和人文意义。

情感态度与价值观: 在了解相关的数学史的过程中提高学生的数学素养和科学素质, 培养学生的科学态度和勇于探索的精神。

4.4. 教学重难点

教学重点: 理解指数函数的概念。

教学难点: 学生能从具体实例中抽象出指数函数的概念。

4.5. 教学过程

4.5.1. 情境导入

师: 上一节课, 我们已经认识了幂函数的概念、图象和性质。今天我们继续上一节课指数的学习, 来研究一类与指数有关的基本初等函数——指数函数。在学习指数函数的概念之前, 我们不妨先做一个小实验, 请同学们拿出提前准备好的纸张并将纸张进行对折, 在对折过程中, 数一下一共对折了几次, 纸张通过对折一共有多少页?

首先, 我们进行 1 次对折的时候, 纸张有几页? 两次对折的时候呢? 三次对折呢? 对折次数和纸张页数之间有什么样的关系呢?

生: 对折 1、2、3 次分别可以得到 2 页、4 页、8 页。

师: 大家可以用我们前面所学的函数来表示对折次数与纸张页数之间的关系吗?

生: 随着对折次数的增加, 每对折一次, 页数变为原来的两倍, 它们之间的函数关系式可以表示为: $y = 2^x$, 其中 x 为对折次数, y 为纸张页数, x 的取值大于 0。

设计意图: 通过对折实验, 探究对折次数与纸张页数的关系, 通过动手实践、观察得到对折次数与对折所得页数的关系式, 对指数函数有一个大概认识。

情境 2: 生物体死亡后, 会经历一个被称为“半衰期”的特定时间段, 期间体内的碳 14 元素含量会

以一定速率逐年递减，直至大约 5730 年后，其含量降至初始的一半。利用这一原理，科学家通过测量出土化石中碳 14 的残留量，能够精确追溯生物死亡的具体年代，也能够推测对应时期的人们的生活方式。深入探究碳 14 含量变化与生物体死亡时间之间的关联，有助于我们更全面地理解古代生物种群及人类文明的演化历程。

师：生物体内碳 14 含量与死亡年数之间有怎样的关系呢？假设每年以 $p\%$ 的速率衰减，那么一个生物体内的碳 14 含量，在它死亡 1 年、2 年、3 年、……、5730 年后，其含量分别为多少呢？

生：死亡 1、2、3、……、5730 年后，生物体内的碳 14 含量分别为 $(1-p)^1$ 、 $(1-p)^2$ 、 $(1-p)^3$ 、…… $(1-p)^{5730}$ ；

师：若生物死亡后体内所剩碳 14 含量记为 y ，死亡年数记为 x ，你能用函数关系式表示出两者之间的关系吗？

生：根据已知条件， $(1-p)^{5730} = \frac{1}{2}$ ，所以 $p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$ 。设生物死亡年数为 x ，生物体内所剩碳 14 含量为 y ，那么 $y = (1-p)^x$ ，即 $y = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right)^x$ ， $x \in (0, +\infty)$ 。

设计意图：通过用展示考古的相关知识引出碳 14 衰减模型，帮助学生对指数函数有更深入的认识，同时拓展学生的视野。

4.5.2. 新知探究

上述提到的 $y = 2^x$ 、 $y = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right)^x$ ， $x \in (0, +\infty)$ 这两个函数有什么共同特征呢？

预设：都为指数幂的形式；指数的位置是 x ，为自变量；底数为常数且都大于 0。

师：把这两个函数中的底数用字母 a 代替，那么这两个函数就可以用 $y = a^x$ 表示，这种函数就是指数函数。

师：那这里的 x 是否有限制？

生： x 是自变量，定义域为 R 。

师：我们以前学习的一次函数、反比例函数、二次函数中的参数都会限制为 $k \neq 0$ ， $a \neq 0$ ，在指数函数中规定 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，为什么要这样规定呢？当 $a < 0$ 、 $a = 0$ 与 $a = 1$ 时分别会出现什么情况呢？

预设： $a < 0$ 时， a^x 不一定有意义；

$a = 0$ 时，若 $x \leq 0$ ，则 0^0 没有意义；若 $x > 0$ ， $0^x = 0$ ；

$a = 1$ 时， $y = 1^x = 1$ 恒为常数，没有研究的必要。

设计意图：通过观察具体的函数形式类比推理出一般的函数形式，再通过追问的方式，层层递进，使学生理解指数函数的概念。

师：那我们今天所学习的指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在形式上都有哪些特征呢？

生：指数函数的指数自变量为 x ，其系数为 1。

师：其实指数函数的定义只是一种形式上的定义，一个指数函数必须同时具备以下三个特征：(1) 函数中只含有常数 a ；(2) 指数位置为自变量 x 且系数为 1；(3) 指数为实数。

设计意图：在得到指数函数的形式后，教师进一步引导学生类比一次函数、二次函数、反比函数中对 a 、 k 的限制，推出指数函数中参数的限制条件，体现了类比的思想方法。

4.5.3. 课堂练习

(1) “一尺之棰，日取其半，万世不竭”这句话出自《庄子·天下》，它描述了一个持续减半的过程，即，一根初始长度为 1 尺的木棰，每日截去它长度的一半，这个过程在理论上可以无限进行，永不终止。那截取次数和木棰剩余长度之间有什么关系呢？假如可以无限截下去，当截到第 x 次时，长度为多少呢？

(2) 若探测到某死亡生物体内的碳 14 含量衰减至原来的百分之五，那么该生物的死亡年数为多久呢？

设计意图：通过练习，带领学生将所学知识进行应用、巩固，同时让学生了解到数学在不同历史时期、不同文化背景下的应用领域。

4.5.4. 小结归纳

在知识上，学习了指数函数的概念；在方法上，首先通过分析折纸活动与碳 14 衰减模型两个特殊的指数函数归纳推理出一般的指数函数的表示形式，在此过程中，运用了分类讨论、从特殊到一般等思想方法。

设计意图：引导学生对指数函数的知识进行梳理，在梳理的过程中把数学知识内化，并通过作业练习强化其技能掌握和理解深度。

4.5.5. 应用拓展

已知纸的厚度为 0.1 毫米，地球与月球大约相距 38 万千米，大家能根据我们今天所学的知识计算出要抵达月球需把纸折多少次吗？

设计意图：与课堂开始时所组织的活动相呼应，通过解决此问题感受指数函数的爆炸式增长，激发学生的学习兴趣。

4.5.6. 布置作业

必做题：制作一张指数函数与幂函数的异同表；

选做题：了解指数函数的历史发展过程，有哪些应用。

设计意图：通过制作图表区分指数函数与幂函数的异同，能加深学生对知识点的理解；通过自己收集资料的过程对指数函数，学生能对指数函数有更深入的了解，同时也能增强学生的成就感，激发学生的学习兴趣。

5. 结语

将数学史融入数学课堂不仅可以帮助学生理解数学概念和定理的发展过程，提高其学习兴趣和积极性，也能够培养学生的历史观念、批判性思维以及自主学习能力。然而，不可为了数学史而数学史，在把数学史融入课堂教学的实际过程中，教师应根据自身素质以及学生的实际情况选择合适的方法，以达到最佳的效果。

参考文献

- [1] 徐章韬, 梅全雄. HPM 视角下的数学教材编写[J]. 数学教育学报, 2009, 18(3): 14-17.
- [2] 汪晓勤, 欧阳跃. HPM 的历史渊源[J]. 数学教育学报, 2003, 12(3): 24-27.
- [3] 余庆纯, 汪晓勤. 中国 HPM 研究内容与方法[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 1-7.
- [4] 沈中宇, 邹佳晨, 汪晓勤. ICME-13 之 HPM 专题研究综述[J]. 数学教育学报, 2017, 26(5): 71-76.
- [5] 徐章韬, 汪晓勤. HPM 教育价值剖析及应用取向的深度挖掘[J]. 数学教育学报, 2016, 25(6): 10-14.
- [6] Wang, X., Qi, C. and Wang, K. (2017) A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics. *Science & Education*, 26, 1029-1052. <https://doi.org/10.1007/s11191-017-9937-8>

-
- [7] 列志佳. 本港中学教师对用数学史于数学教育之调查研究[J]. 数学教育, 1996(3): 21-22.
- [8] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [9] 孟梦, 李铁安. “问题化”: 数学“史学形态”转化为“教育形态”的实践路径[J]. 数学教育学报, 2018, 27(3): 72-75.
- [10] 龚子慧. 数学史视角下的高中数学教学实践研究[D]: [硕士学位论文]. 扬州: 扬州大学, 2022.
- [11] 郭莹莹. HPM 视角下小学数学教学中融入数学史的价值与路径[J]. 新课程研究, 2022(32): 87-89.
- [12] 刘峰. 数学史视角下正弦定理的证明[J]. 理科考试研究, 2024, 31(15): 13-17.