Advances in Education 教育进展, 2024, 14(11), 1002-1009
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2024.14112163

Hans汉斯

问题驱动式习题课教学探索

——以矩阵秩恒等式为例

胡永刚

外交学院国际经济学院，北京

收稿日期：2024年10月14日；录用日期：2024年11月12日；发布日期：2024年11月19日

摘　要

矩阵秩的恒等式证明及其应用是线性代数教学中的难点。基于这一点，本文探讨了问题驱动式教学法在习题课上的应用，通过分解出一系列的导向问题，将教学难点拆解，激发学生兴趣，提升学生的综合反应能力和创新能力。

关键词

矩阵秩，问题驱动法，多项式互素

Exploring Exercise Class Teaching with Problem Driven Approach

—Taking Matrix Rank Identity as an Example

Yonggang Hu

School of International Economics, China Foreign Affairs University, Beijing

Received: Oct. 14th, 2024; accepted: Nov. 12th, 2024; published: Nov. 19th, 2024

Abstract

The proof of matrix rank constant equation and its application are difficult points in linear algebra teaching. Based on this, this article explores the application of problem driven teaching method in exercise classes, by decomposing a series of guiding questions, breaking down teaching difficulties, stimulating students' interest, and enhancing their comprehensive response and innovation abilities.

文章引用: 胡永刚. 问题驱动式习题课教学探索[J]. 教育进展, 2024, 14(11): 1002-1009.
DOI: 10.12677/ae.2024.14112163

Keywords

Matrix Rank, Problem Driven Approach, Polynomial Coprime

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

以问题为导向的教学法(problem-based learning, PBL)是 1969 年由美国的神经病学教授 Barrows 在加拿大的麦克马斯特大学首创。该教学方法以学生为教学中心，在学生掌握一定知识基础后，把学习设置于复杂的有意义的问题情境中，通过同学们小组讨论合作解决问题，在此过程中提升学生分析和解决问题的综合能力，加深对于知识的掌握和理解[1]。简单来讲，问题导向的教学法的方法与目标就是教师根据所教授的课程内容创设合适的问题链，通过一系列导向式问题，从而逐步降低问题本身的难度，进而达到引导学生分析并解决问题的目标。数学课堂教学的核心内容就是发现问题，分析问题，解决问题。大学习题课是课堂教学的总结。学生可以在习题课上学习到解题技巧，从而加深对已有知识点的掌握。正所谓温故知新，习题课上的习题推广，也在一定程度上可以锻炼学生的创新思维。因此，习题课也是一个非常重要的课堂。大学习题比起中学习题更加复杂多样且考验综合解题能力，并且大学习题课课时量比中学占比更少。因此，在这种情况下，教师更应当坚持问题导向，目标导向，效果导向来提升习题课课堂效率，深入挖掘例题的来龙去脉，让学生能在有限时间内掌握解题技巧并且做到知识迁移与举一反三的能力。

矩阵秩恒等式的证明是学习矩阵过程中的重难点。在经典教材[2] [3]中的证明过程采用间接使用定理来证明。普遍学生认为比较抽象难懂并且遇到证明矩阵秩的恒等式相关问题仍然无从下手。就矩阵本身而言，它比较好懂并且可操作性较强，而矩阵的初等变换将矩阵乘积运算变得简洁。因此，矩阵的初等变换比较好掌握，学生也比较熟悉。

作者将从课本以及 2024 年第十五届全国大学生数学竞赛决赛《数学类低年级组》试题中一题关于矩阵秩恒等式试题出发，将证明过程统一使用广义矩阵初等变换方法。关于这个证明角度，文献[4] [5]已经有过讨论。本文将溯源课本以及相关例题，逐步分解例题，给出导向式问题，从简易到复杂地将证明矩阵秩恒等式的一般方法呈现出来。

2. 一类相似的矩阵秩问题

线性代数经典教材[3]中，讲到矩阵秩问题，必然涉及到下面两个经典例题：

例 2.1 ([3], p. 71)：设 A，B 为 n 阶方阵，证明：若 $AB=O$，则 $R(A)+R(B)\le n$.

例 2.2 ([3], p. 71)：设 A 为 n 阶方阵，证明：$R(A+E)+R(A-E)\ge n$.

如果考虑更深层次的角度，就会涉及到高等代数经典教材[6]中的两个经典补充题：

例 2.3 ([2], p. 67, [6], p. 136)：设 A 为 n 阶方阵，证明若 $A^2=A$，则 $R(A)+R(A-E)=n$.

例 2.4 ([6], p. 136)：设 A 为 n 阶方阵，证明若 $A^2=E$，则 $R(A+E)+R(A-E)=n$.

以上 4 个经典例题都涉及到了矩阵秩不等式以及特殊恒等式问题。其中，例 2.3 本质上是例 2.1 的特殊情况，只要取 $B=A-E$，例 2.3 的一边的不等式就能成立，而例 2.3 证明的是例 2.1 取等号的情况；例 2.4 显然是例 2.1 与例 2.2 的直接结论。因此，要解决例 2.3 的另一边不等式，就需要考虑下面问题：

问题 1：A，B 满足什么条件时，例 2.1 取等号？

下面试题是 2024 年第十五届全国大学生数学竞赛决赛《数学类低年级组》试题中的一题。

例 2.5 [7]：设 A 为 n 阶方阵，证明 $A^4=E$ 当且仅当 $R(A-E)+R(A^3+A^2+A+E)=n$.

从形式上看，例 2.3，例 2.4 与例 2.5 类似。因此，自然需要考虑以下问题：

问题 2：例 2.3，例 2.4 的条件是否也是充要性条件？

3. 问题解析与探源

为解决上述问题，需要使用广义初等变换。

定义 3.1 [8]：以下 5 种类型的分块矩阵统称为广义初等矩阵：

$$\begin{bmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} A & O \\ O & E_n \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} E_m & O \\ O & B \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} E_m & C \\ O & E_n \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} E_m & O \\ D & E_n \end{bmatrix}$$

其中 A 是 m 阶可逆矩阵，B 是 n 阶可逆矩阵，C 是 $m\times n$ 矩阵，D 是 $n\times m$ 矩阵，E_m 和 E_n 分别是 m 阶和 n 阶单位矩阵。

定义 3.2 [8]：对分块矩阵左乘一个广义初等矩阵称为广义初等行变换；右乘一个广义初等矩阵称为广义初等列变换；广义初等行变换与广义初等列变换统称为广义初等变换。

注 3.3：广义初等变换不改变分块矩阵的秩。

3.1. 问题 1 探源

为了解决问题 1，首先需了解著名的薛尔福斯特(Sylvester)公式。为了证明过程完整，先给出以下引理。

引理 3.4：设 $A_{m\times n}$，$B_{k\times l}$，$C_{m\times l}$，则 $R\left(\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}\right)\geq R(A)+R(B)$。

证明：设 A 秩为 r；B 秩为 s。则存在 m 阶可逆矩阵 P_1 与 n 阶可逆矩阵 Q_1，使得 $P_1AQ_1=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$；存在 k 阶可逆矩阵 P_2 与 l 阶可逆矩阵 Q_2，使得 $P_2BQ_2=\begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix}$。因此，

$$\begin{bmatrix} E & O \\ O & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & O \\ O & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & O \\ O & Q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & E_s & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}。$$

因为广义初等矩阵乘积不改变矩阵秩，所以，$R\left(\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}\right)\geq r+s=R(A)+R(B)$。证毕。

命题 3.5：设矩阵 $A_{s\times n}$，$B_{n\times m}$，则下列矩阵秩不等式成立

$$R(A)+R(B)-n\leq R(AB)$$

证明：首先构造分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ E_n & B \end{bmatrix}$。于是，根据引理 3.4 可得：

$$R\left(\begin{bmatrix} A & O \\ E_n & B \end{bmatrix}\right)=R\left(\begin{bmatrix} A^T & E_n \\ O & B^T \end{bmatrix}\right)\geq R(A)+R(B)。$$

另一方面，利用分块矩阵的广义初等变换，

$$\begin{bmatrix} A & O \\ E_n & B \end{bmatrix} \overset{r_1-Ar_2}{\to} \begin{bmatrix} O & -AB \\ E_n & B \end{bmatrix} \overset{c_2+c_1(-B)}{\to} \begin{bmatrix} O & -AB \\ E_n & O \end{bmatrix} \overset{c_1\leftrightarrow c_2}{\to} \begin{bmatrix} -AB & O \\ O & E_n \end{bmatrix}。$$

因此，根据注 3.3 所述，$R\left(\begin{bmatrix} A & O \\ E_n & B \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} -AB & O \\ O & E_n \end{bmatrix}\right) = R(AB)+n$。故，$R(AB)+n \geq R(A)+R(B)$。

证毕。

推论 3.6：[广义薛尔福斯特公式]设 A，B 为 n 阶方阵，对任意非零矩阵多项式 $f(A)$，$g(A)$，恒有如下矩阵秩不等式：

$$R(f(A))+R(g(B))-n \leq R(f(A)g(B))。$$

特别地，若 $f(A)g(B)=O$ 则 $R(f(A))+R(g(B)) \leq n$。反之，若上述两个不等式等号成立，则 $f(A)g(B)=O$。

注 3.7：上述方法本质上是利用分块矩阵中的单位矩阵“E_n”，随着广义初等变换，让“E_n”在分块矩阵上面“打洞”(化零)，在主对角线上化出单位矩阵“E_n”，从而简化矩阵形式，最后得到结论式。

根据命题 3.5 立即可以得到例 2.1。另一方面，注意到在条件 $A^2=A$ 和 $A^2=E$ 下可得到 $A(A-E)=O$ 和 $(A+E)(A-E)=O$，若广义薛尔福斯特公式取等号，则立刻可得到例 2.3，例 2.4 的充要条件。因此，问题 1 和问题 2 根本上都归结于以下问题。

问题 3：什么情况下广义薛尔福斯特公式取等号？

3.2. 问题 2 解析

要解决问题 3，须先解决问题 2，期望能从问题 2 的解题过程中得到问题 3 的答案。为此，接着 4.1 节中用广义初等变换和单位矩阵打洞法的思路来解决例 2.3，例 2.4 的充要性问题。

命题 3.8：(1) 设 A 为 n 阶方阵，则 $A^2=A$，当且仅当 $R(A)+R(A-E)=n$。

(2) 设 A 为 n 阶方阵，则 $A^2=E$，当且仅当 $R(A+E)+R(A-E)=n$。

证明：(1) 构造分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & A-E \end{bmatrix}$。注意到 $-A+(A-E)=-E$。

利用上述公式以及广义初等变换

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & A-E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & A \\ O & A-E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & A \\ -A & -E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A-A^2 & A \\ O & E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A-A^2 & O \\ O & E \end{bmatrix}。$$

因此，$R\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & A-E \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} A-A^2 & O \\ O & E \end{bmatrix}\right)$，即 $R(A)+R(A-E)=R(A-A^2)+n$。由此可得结论。

(2) 构造分块矩阵 $\begin{bmatrix} A+E & O \\ O & A-E \end{bmatrix}$。注意到 $(A+E)+[-(A-E)]=2E$。

利用上述公式以及广义初等变换

$$\begin{bmatrix} A+E & O \\ O & A-E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & -(A-E) \\ O & A-E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2E & -(A-E) \\ A-E & A-E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2E & O \\ A-E & \dfrac{A^2-E}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} E & O \\ O & A^2-E \end{bmatrix}$$

因此，$R\left(\begin{bmatrix} A+E & O \\ O & A-E \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} E & O \\ O & A^2-E \end{bmatrix}\right)$，即 $R(A+E)+R(A-E)=R(A^2-E)+n$。由此可得结论。证毕。

注 3.9：上述证明过程中，所构造的分块矩阵与命题 3.5 有一个根本区别就是命题 3.5 中所构造的分块矩阵含有单位矩阵“ E_n ”而命题 3.8 中没有直接的单位矩阵。这种情况下，必须去按照结论式“凑”单位矩阵，于是找到恒等式：

$$-A+(A-E)=-E \tag{1}$$

$$(A+E)+\left[-(A-E)\right]=2E \tag{2}$$

利用这上述两恒等式，再结合广义初等变换和单位矩阵打洞法，在主对角线上化出单位矩阵“ E_n ”。

下面考虑例 2.5 的证明。按照上述命题 3.8 的证明思路，需要从矩阵多项式 $A-E$ 和多项式 A^3+A^2+A+E 组合得到单位矩阵。然而，与命题 3.8 不同的是，仅靠加减，不足以化出单位矩阵“ E_n ”。但是注意到，多项式长除法同样可得到等式(1)和(2)。因此，类似地，在例 2.5 中利用长除法可以得到：

$$-\left(A^2+2A+3E\right)(A-E)+\left(A^3+A^2+A+E\right)=4E \tag{3}$$

命题 3.10：设 A 为 n 阶方阵，则 $A^4=E$ 当且仅当 $R(A-E)+R\left(A^3+A^2+A+E\right)=n$。

证明：构造分块矩阵 $\begin{bmatrix} A-E & O \\ O & A^3+A^2+A+E \end{bmatrix}$。注意到此时公式(3)成立。

利用上述公式以及广义初等变换

$$\begin{bmatrix} A-E & O \\ O & A^3+A^2+A+E \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} A-E & O \\ -\left(A^2+2A+3E\right)(A-E) & A^3+A^2+A+E \end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix} A-E & A-E \\ -\left(A^2+2A+3E\right)(A-E) & 4E \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} \dfrac{A^4-E}{4} & O \\ -\left(A^2+2A+3E\right)(A-E) & 4E \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} \dfrac{A^4-E}{4} & O \\ O & 4E \end{bmatrix}$$

因此，$R\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & A-E \end{bmatrix}\right)=R\left(\begin{bmatrix} A-A^2 & O \\ O & E \end{bmatrix}\right)$，即 $R(A)+R(A-E)=R\left(A-A^2\right)+n$。由此可得结论。

证毕。

3.3. 问题 3 解析

事实上，上述三个公式(1)，(2)，(3)有一个共同的特征，即，矩阵多项式互素。为此，须要回顾多项式互素。对多项式 $f(x)$，$g(x)$，用符号 $\left(f(x),g(x)\right)$ 表示首项系数是 1 的最大公因式。

定义 3.11 [6]：两个不全为零的多项式 $f(x),g(x)$，若 $\left(f(x),g(x)\right)$ 为零次多项式，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，记 $\left(f(x),g(x)\right)=1$。

类似地，两个不全为零的 n 阶矩阵多项式 $f(A)$，$g(B)$，若 $\left(f(x),g(x)\right)$ 为零次矩阵多项式，则称 $f(A)$ 与 $g(B)$ 互素。

定理 3.12 [6]：$\left(f(x),g(x)\right)=1$ 当且仅当存在多项式 $s(x)$，$t(x)$ 使得 $s(x)f(x)+t(x)g(x)=1$。

命题 3.13 [6]：若 $\left(f(x),h(x)\right)=1$，$\left(g(x),h(x)\right)=1$，则 $\left(f(x)g(x),h(x)\right)=1$。

注意到按定义可得：矩阵多项式 $A-E$ 和 A^3+A^2+A+E 互素；矩阵多项式 $A+E$ 和 $A-E$ 互素；矩阵多项式 A 和多项式 $A+E$ 互素。在这些条件互素条件下，命题 3.8 与命题 3.10 的充要条件成立。因此，可以猜测在互素条件下，广义薛尔福斯特公式取等号。下面给出推论 3.6 的特殊情况。

定理 3.14：设 A，B 为 n 阶方阵，$f(A)$，$g(B)$ 为两个不全为零的 n 阶矩阵多项式。若存在多项式 $s(A)$，$t(B)$，使得 $s(A)f(A)+t(B)g(B)=E$，则广义薛尔福斯特公式取等号，即

$$\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{A}\right)\right)+\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{B}\right)\right)=\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{B}\right)\right)+\boldsymbol{n}。$$

特别地， $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{O}$ **当且仅当** $\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{A}\right)\right)+\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{B}\right)\right)=\boldsymbol{n}$。

证明：构造分块矩阵$\begin{bmatrix} f(A) & O \\ O & g(A) \end{bmatrix}$。利用上述公式以及广义初等变换

$$\begin{bmatrix} f(A) & O \\ O & g(B) \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} f(A) & s(A)f(A)+t(B)g(B) \\ O & g(A) \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} f(A) & E \\ O & g(B) \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} E & O \\ O & f(A)g(B) \end{bmatrix}$$

因此，$R\left(\begin{bmatrix} f(A) & O \\ O & g(B) \end{bmatrix}\right)=R\left(\begin{bmatrix} E & O \\ O & f(A)g(B) \end{bmatrix}\right)$，即 $R\left(f\left(A\right)\right)+R\left(g\left(B\right)\right)=R\left(f\left(A\right)g\left(B\right)\right)+n$。由此可得结论。证毕。

显然，命题 3.8 与命题 3.10 均是该定理的直接推论。

4. 拓展与应用

在最后一部分，给出一类命题 3.8 的推广形式，用于拓展思维和定理 3.14 的应用。

命题 4.1：设 $\boldsymbol{m}$ **与** $\boldsymbol{l}$ **为任意自然数。**

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ **为** $\boldsymbol{n}$ **阶方阵，则** $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^{\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{O}$，**当且仅当** $\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}\right)+\boldsymbol{R}\left(\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^{\boldsymbol{l}}\right)=\boldsymbol{n}$。

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ **为** $\boldsymbol{n}$ **阶方阵，则** $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)^{\boldsymbol{m}}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^{\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{O}$，**当且仅当** $\boldsymbol{R}\left(\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)^{\boldsymbol{m}}\right)+\boldsymbol{R}\left(\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^{\boldsymbol{l}}\right)=\boldsymbol{n}$。

证明：(1) 设 $g\left(x\right)=\left(x-1\right)^{l}$。显然，$\left(x,\left(x-1\right)^{l}\right)=1$。根据重复利用命题 3.13，$\left(x^{m},\left(x-1\right)^{l}\right)=1$。因此，根据定理 3.12，存在多项式 $s\left(x\right)$，$t\left(x\right)$ 使得 $s\left(x\right)x^{m}+t\left(x\right)\left(x-1\right)^{l}=1$。故，有 $s\left(A\right)A^{m}+t\left(A\right)\left(A-E\right)^{l}=E$。根据定理 3.14，可得结论。

(2) 证明方法类似。

上述结论也给出了，文献[8]中 262 题的充要条件形式。

5. 教学基本架构

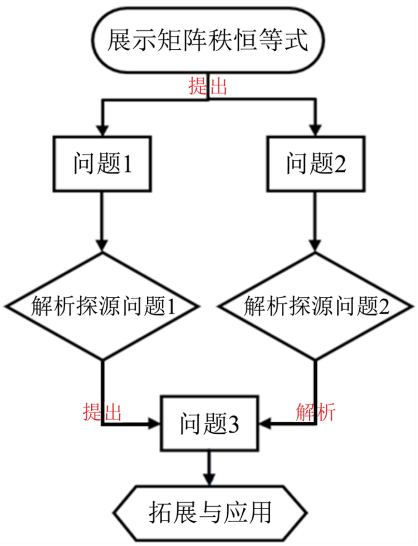

Figure 1. Basic teaching architecture diagram
图 1. 教学基本架构图

在搞清楚基本原理与思考脉路后，根据问题驱动教学法，以问题导向，目标导向为原则，本文设计以下教学基本架构(图 1)。

第一个环节设计为展示 4 个经典教材上的矩阵恒等式，并由此归纳提出问题 1 与问题 2，在第二个设计环节中作者设计问题 1 与问题 2 的解析与探源，并从问题 1 的解析过程中再次抛出问题 3，而问题 2 的解析过程恰好能启发并解决问题 3，通过这 3 个问题的逐步解决，最终给出问题 1 的更广义层面的正面回答，第三个环节中作者提出主要结论的知识延伸与应用。

6. 教学效果评价

为了客观地了解学生实际学习情况，针对参与学习这块教学内容的外交学院国际经济学院 2023 级的设计了一份问卷调查(表 1)。通过企业微信发放调查问卷，其中共 27 名学生随机参与了问卷填写。

Table 1. Survey questionnaire
表 1. 调查问卷表

序号	问卷调查问题	选项		
1	该习题总结是否对您关于矩阵秩问题解决有帮助？	很有帮助	有帮助	一般
		26 份(96.3%)	1 份(3.7%)	0 份(0.0%)
2	该总结是否能懂？	能	一般	挺难
		25 份(92.6%)	1 份(3.7%)	1 份(3.7%)
3	是否有收获？	很有收获	有收获	一般
		24 份(88.9%)	2 份(11.1%)	0 份(0.0%)

通过问卷统计，在坚持问题导向的教学思路基础上，让学生能够在问题的引导下思考关于矩阵秩的相关问题起到了显著的帮助效果(96.3%)。在问题内容难易程度上，92.6%的学生能懂，3.7%的同学认为较难理解，这也体现了内容难度设计上的合理性。在最终收获上，88.9%的学生都在这个过程中很有收获，11.1%的学生也收获了不少经验，从客观上体现，在解析探源的过程中，让学生学习到了课本以外的知识，实现了习题课的根本目标。

7. 总结

本文通过问题驱动教学法，将习题课教学难点逐步层次分解，旨在让学生在有限的时间中掌握关于矩阵秩恒等式与广义初等变换相结合的专题，更重要的是领悟线性代数思考问题的思维方式以及方法。通过知识的外延拓展，让学生接触到更多的课本以外的知识，激发同学们的探索知识的热情。

基金项目

外交学院教学管理及改革项目(JG2024-18)。

参考文献

[1] 安奈特·科莫斯. 基于问题的学习: 理论与实践[M]. 钟秉林, 杜翔云, 译. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[2] 华中科技大学数学系. 线性代数[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[3] 同济大学数学系. 工程数学—线性代数[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[4] 余世群. 关于“一类矩阵秩的恒等式及其推广”一文的注记[J]. 武汉科技学院学报, 2006(10): 28-29.

[5] 李书超, 蒋君, 向世斌, 等. 一类矩阵秩的恒等式及其推广[J]. 武汉科技大学学报(自然科学版), 2004(1): 96-98.

[6] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[7] CMC 大学生数学竞赛资源网. 第十五届全国大学生数学竞赛决赛《数学类低年级组》 [BD/OL]. http://www.cmathc.cn/, 2024-09-02.

[8] 樊恽, 钱吉林, 岑嘉评, 刘恒, 穆汉林. 代数学辞典[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1994.