钢筋混凝土偏心受压构件正截面受力钢筋计算 的教学设计与实践

周晓军

西南交通大学土木工程学院,四川 成都

收稿日期: 2024年10月26日; 录用日期: 2024年11月22日; 发布日期: 2024年11月29日

摘要

钢筋混凝土偏心受压构件正截面受力钢筋的设计是为本科学生开设的《地下铁道与轻轨》课程中的重要教 学内容之一。由于这部分教学内容涉及较多的基本概念和理论推导,学生对设计方法的理解和掌握尚存在 较大的困难。本文结合课程的教学内容,就钢筋混凝土偏心受压构件中受力钢筋的计算方法进行理论推导, 并基于偏心受压构件的静力和静力矩平衡提出了混凝土偏心受压构件中受力钢筋配置方法的教学设计。通 过在《地下铁道与轻轨》课程中的教学实践表明,本文所研究和提出的教学设计有利于学生理解和掌握钢 筋混凝土偏心受压构件中受力钢筋的计算和设计方法,并能启发和引导学生树立创新思维的意识。

关键词

钢筋混凝土偏心受压构件,偏心距,配筋率,静力平衡,教学设计与实践

Instructional Planning and Practice for Calculating Reinforcing Steel Bars in the Normal Cross-Section of Reinforced Concrete Members Subject to Eccentric Compression

Xiaojun Zhou

School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Received: Oct. 26th, 2024; accepted: Nov. 22nd, 2024; published: Nov. 29th, 2024

Abstract

The design of reinforcing steel bars in the normal cross-section of reinforced concrete members subject to eccentric compression is one of the key instructional contents in the course entitled "Metro and Light Rail Transit" offered to undergraduates. As the instructional content involves many basic concepts and theoretical derivation, undergraduates still have great difficulties in understanding and mastering the design method. In this paper, combined with the teaching contents of the course, the method for calculating the reinforcing steel bars in reinforced concrete members due to eccentric compressive load is theoretically deduced, and based on both the static equilibrium and static moment equilibrium of eccentric compressive members, the teaching contents of designing the reinforcing steel bars in the normal cross-section of reinforced concrete members subject to eccentric compression are also presented. The teaching practice in the course entitled "Metro and Light Rail Transit" shows that the instructional planning studied and presented in this paper is conducive to helping undergraduates comprehend and master the calculation and design method of reinforcement in reinforced concrete members subject to eccentric to eccentric compression and can inspire and guide undergraduates to establish the awareness of innovative thinking.

Keywords

Reinforced Concrete Members Subject to Eccentric Compression, Eccentricity, Reinforcement Ratio, Static Equilibrium, Instructional Planning and Practice

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc. This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0). http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

CC O Open Access

1. 引言

修建并开通运营以地下铁道为代表的城市轨道交通已成为衡量一个城市科学技术和经济发展水平以 及现代化进程的重要标志,因而受到我国各大城市管理和建设者的高度重视,截至 2024 年 10 月 1 日, 我国已有 58 个城市开通运营有地铁和轻轨等不同制式的城市轨道交通,总运营里程已达到 11590.89 km [1]。修建城市轨道交通则需要大量掌握城市轨道交通规划、设计、施工、运营与维护等专业知识的技术 人才。因此,在普通高等学校和职业技术学院中,通过向智能建造、土木工程、城市地下空间工程等专 业的学生开设《地下铁道和轻轨》等课程就成为培养城市轨道交通建设和管理专门技术人才的重要模式。 经过对《地下铁道与轻轨》课程的系统学习,使学生能够理解和掌握与地下铁道规划、设计、施工、运营 和维护等相关的基本概念、计算方法和设计原理以及建造方法等专业知识,为学生今后从事以地下铁道 为代表的城市轨道交通的建设和管理等工作或进一步专业深造奠定扎实的基础[2]-[5]。

作为面向智能建造、土木工程和城市地下空间工程等专业学生开设的一门核心专业课程,《地下铁 道与轻轨》所涉及的教学内容和知识点众多,除了地下铁道与轻轨路网规划、线路平纵断面设计、线路 车站和区间主体结构的建筑限界、车站和区间主体结构的建造方法、车站通风和空调、列车通信和信号、 运营管理和维修养护以外,线路中的地下、地面和高架车站以及与车站关联的地下区间隧道和高架桥梁 等结构形式的确定和设计是课程讲授的核心内容[2]-[5]。此部分作为本课程的教学重点,主要是向学生讲 授地铁和轻轨线路中的钢筋混凝土车站的结构类型及其构件的功能,包括构件在受拉或受压等荷载作用 引起的效应以及其内部受力钢筋的设计与计算。

作者结合多年向本科学生讲授《地下铁道与轻轨》课程的教学经验发现,这部分教学内容涉及较多

的基本概念和理论推导,而理论推导又涉及众多的物理量,存在概念多、公式多和计算多的"三多"特点。此外,国内现行的教学参考书中对钢筋混凝土构件在偏心受压荷载作用下正截面承载力和钢筋设计方法的讲解缺乏系统的梳理和归纳,教材中仅列出了针对大、小偏心受压构件正截面承载力和受力钢筋的计算公式与部分图示,对诸如判断大偏心和小偏心受压构件的方法未明确给出[6]-[10]。学生如果仅按照教学参考书中列出的计算公式和图例进行学习时尚存在较大的难度,并不能从基本概念和原理上理解与掌握相应的分析思路和计算方法,因而学生对该部分内容学习的效果不佳,课程教学质量也难以达到预期的目标。为使学生能够容易理解和掌握钢筋混凝土偏心受压构件正截面承载力和受力钢筋的计算与设计方法,引导和启发学生树立创新思维的意识,本文根据《地下铁道与轻轨》课程中钢筋混凝土矩形正截面偏心受压构件承载力和受力钢筋设计与计算的教学内容,就偏心受压构件正截面受力钢筋计算方法的教学设计进行研究和总结,并结合工程案例对钢筋混凝土偏心受压构件的设计方法,进而提高课程的教学质量,并启发和引导学生逐步树立创新意识。

2. 钢筋混凝土偏心受压构件的承载模型

2.1. 教学内容和讲授思路

为使学生容易理解和掌握钢筋混凝土偏心受压构件中正截面受力钢筋的设计和计算方法,针对此部 分教学内容所提出的教学设计和讲授的思路总结如下:首先引入钢筋混凝土偏心受压构件的基本概念, 然后讲解判断偏心受压构件的方法,并以钢筋混凝土矩形正截面构件为例,分析混凝土构件承受轴向偏 心压力所引起的力学效应,分别讲解非对称配筋和对称配筋的基本概念以及正截面受力钢筋的计算方法, 然后以某地铁地下框架结构车站为工程案例,以所推导的理论公式计算偏心受压构件中的受力钢筋横截 面面积,并配置受力钢筋。基于以上的讲解思路,与其相对应的教学内容设计如下:

1) 以等截面长立柱受压弯曲来讲解钢筋混凝土偏心受压构件的类型和荷载的初始偏心距、附加偏心 距和计算偏心距的概念;

 建立钢筋混凝土矩形正截面构件受压承载模型,分析钢筋混凝土矩形正截面构件在偏心压力作用 下的小偏心和大偏心受压与受拉状态,讲解判断大偏心和小偏心受压构件的方法;

3) 根据构件在受压和受拉状态下的静力和静力矩平衡条件,推导出正截面上的承载力和受力钢筋横 截面面积的计算方法;

4) 分析钢筋混凝土小偏心和大偏心受压构件采用对称配筋和非对称配筋的模式;

5) 以某地铁地下车站矩形横截面框架结构顶板、底板和中间楼板偏心受压构件为工程案例对构件正 截面的受力钢筋进行设计。

在分析和总结钢筋混凝土偏心受压构件正截面受力钢筋计算原理的基础上,探讨提高课程教学效果 和质量的做法与具体措施。

2.2. 钢筋混凝土偏心受压长立柱的承载模型

根据上述的教学内容,首先需要向学生讲解偏心荷载和偏心受压构件的概念。为便于学生理解,在课程讲授时需要建立图1所示的钢筋混凝土长立柱受偏心压力N作用下的模型。此外,还可以列举地铁和轻轨车站中的立柱、边墙、顶底板以及区间线路中的桥梁和隧道衬砌等作为偏心受压的钢筋混凝土构件。

图 1 中长立柱的计算长度为 *l*_c,其与中心轴线相垂直的横截面的短边宽度为 *h*,两者的单位均以 mm 计。钢筋混凝土长立柱所承受的轴向荷载即偏心压力为 *N*,单位以 kN 计,很显然压力 *N*的作用轴向不 与立柱的中心轴线重合,因而存在有偏心距,因此该压力就被称为直接作用于立柱上的偏心荷载或偏心 压力,荷载 N 使立柱受压而发生弯曲,从而使钢筋混凝土构件受轴线压缩并与轴线保持间距的荷载均称为偏心压力。在荷载 N 作用的初期构件处于弹性阶段,此时的偏心距 e_0 被称为轴向压力 N 对结构中心轴线的初始偏心距。长立柱受轴向压力 N 作用,并且存在偏心距 e_0 ,则在与立柱中心轴线相垂直的任意截面上会引起弯矩 M,其数值为 $M = N \times e_0$ 。随着荷载 N 的施加,长立柱因偏心而发生纵向弯曲,如果随着偏心距的增加立柱因弯曲过大会失去平衡而最终发生破坏,这种破坏被称为长柱的失稳破坏。长立柱失稳破坏前因弯曲增加引起的偏心距 e_a 就称为在初始偏心距 e_0 基础上的附加偏心距。而 e_i 为轴向压力 N 与长立柱弯曲后的轴线之间的计算偏心距,且有 $e_i = e_0 + e_a$ 。图 1 中的实线为立柱未弯曲前的状态,而虚线则表示立柱受偏心压力 N 发生弯曲后的状态。



Figure 1. Loading model for reinforced concrete long column 图 1. 钢筋混凝土长立柱承载模型

3. 混凝土受压构件大小偏心的判断方法

在讲解偏心受压构件和偏心距的基础上,需要引导学生回顾已学习过的处于纯弯曲状态的混凝土矩形正 截面梁中的几个重要概念,即钢筋混凝土构件正截面等效矩形应力图形的受压区高度 *x*、相对受压区高度 *ζ*、 界限受压区高度 *x*_b和相对界限受压区高度 *ζ*_b。混凝土受压构件中等效矩形应力图形的受压区高度 *x* 和相对 受压区高度 *ζ*以及界限受压区高度 *x*_b与界限相对受压区高度 *ζ*_b之间存在式(1)的函数关系[6]-[10],即:

$$\begin{cases} x = \xi h_0 \\ x_b = \xi_b h_0 \end{cases}$$
(1)

式中, h₀为处于纯弯曲状态的钢筋混凝土矩形构件正截面中长边的有效长度, 尺寸单位以 mm 计。

式(1)中的 *ξ*_b 即为钢筋混凝土构件正截面界限相对受压区高度,其数值与混凝土强度等级和钢筋的强度等级有关,具体的数值可根据《混凝土结构设计标准》(GB 50010-2010)(2024 年版)中建议选取[11]。

在回顾和复习处于纯弯曲状态的钢筋混凝土矩形正截面受压区高度 x、界限受压区高度 x_b和界限相 对受压区高度 *ξ*_b 的含义之后,就可以用其来分析和判断钢筋混凝土构件处于大偏心受压和小偏心受压的 承载状态。

目前现行的混凝土结构设计教学参数书中所给出的判断混凝土构件大小偏心的方法为:当钢筋混凝 土构件正截面受压区高度 x 小于钢筋混凝土构件正截面界限相对受压区高度 x_b 时,就可以判断该构件为 大偏心受压构件,具体的表达式为:

(2)

$$x \le x_b = \xi_b h_0$$

利用式(2)就可以判断钢筋混凝土构件处于大偏心受压状态。而当钢筋混凝土构件正截面受压区高度 x 大于或超过其界限相对受压区高度 xb 时,则可以判断该构件为小偏心受压构件,两者的表达式为:

$$x > x_b = \xi_b h_0 \tag{3}$$

根据式(3)来判断钢筋混凝土构件处于小偏心受压状态。

虽然式(2)和式(3)的形式较为简便,但其含义却难以理解。为便于学生理解和掌握上述的判断方法, 对判断大小偏心构件的方法可总结如下:

1) 对于大偏心受压构件,可以认为作用于钢筋混凝土构件上的偏心压力 N 距离构件的中心轴线较远,也就是其计算偏心距 e_i较大,从而使混凝土构件正截面上仅靠近轴向压力 N 一侧的部分混凝土处于 压应力状态,而远离轴向压力 N 的大部分区域的混凝土处于拉应力状态,即混凝土受压区的高度 x 小于 其界限受压区高度 x_b,也即满足式(2)的要求,因而可以判断该钢筋混凝土构件属于大偏心受压构件。

2) 对于小偏心受压构件而言,即可认为钢筋混凝土构件上的轴向偏心压力 N 距离构件的中心轴线较近,很显然此时轴向压力 N 的计算偏心距 e_i较小,构件正截面上大部分的混凝土处于压应力状态,此时 混凝土构件正截面受压区的高度 x 会必然超过界限受压区高度 x_b,即满足式(3)的要求,因而可以判定此 时的钢筋混凝土构件处于小偏心受压状态。

根据式(2)和式(3)来判断混凝土构件大、小偏心状态时,首先需要计算出混凝土偏心受压构件正截面 上受压区高度 x,而受压区高度 x 又受控于混凝土构件上承受的偏心荷载 N 及其计算偏心距 e_i,需要通 过对构件进行静力平衡和静力距平衡的分析才能求得。在设计钢筋混凝土偏心受压构件的受力钢筋之前, 要根据受压区高度 x 来判断其偏心状态是极为困难的。为此可寻求利用钢筋混凝土构件上偏心受压荷载 N 的计算偏心距 e_i与构件正截面的有效长度 h₀之间的关系来进行判断的简便方法。为便于分析需要建立 图 2 所示的钢筋混凝土偏心受压构件的静力学模型。



Figure 2. Reinforced concrete member with rectangular normal cross-section subject to eccentric compression

图 2. 钢筋混凝土矩形正截面偏心受压构件

为便于学生理解,此处还需要讲解构件正截面这一基本概念的含义。文中所述的钢筋混凝土构件的 正截面就是指与混凝土构件中心轴线相垂直的横截面。以图 2 中的钢筋混凝土偏心受压构件为例,图 2(a) 为钢筋混凝土偏心受压构件的正视图,图 2(b)中的 1-1 剖视图就是混凝土构件正视图 1-1 剖面处的矩形 正截面,其垂直于构件的中心轴线。

设图 2 中钢筋混凝土构件承受的大偏心受压荷载为 N,构件的矩形正截面长边的高度为 h,其短边的 长度为 b,各自的尺寸均以 mm 计。构件的两侧均配置有受力的普通钢筋。为便于分析,以全部钢筋的横 截面面积 A_s 代表构件中的受拉钢筋,而以全部钢筋横截面面积 A's 代表构件中的受压钢筋,两者的尺寸单 位以 mm² 计。设 x 代表混凝土构件矩形正截面中混凝土受压区的高度,h₀ 和 h's 分别是混凝土构件矩形正 截面的有效高度,而 a_s 和 a's 分别是构件内受力普通钢筋的合力作用点至构件受压和受拉边缘之间的距 离,各个几何参数的含义见图(2),各自的尺寸单位均以 mm 计。

从图 2(a)分析, 混凝土构件在偏心压力 N 作用下靠近压力 N 一侧的混凝土和钢筋 A'_s 受压, 混凝土的 轴心抗压强度设计值为 f_c , 受压钢筋的抗压强度为 f'_y 。而远离轴向压力 N 一侧的混凝土和钢筋 A_s 则处于 受拉状态, 受拉钢筋 A_s 的抗拉强度设计值为 f_y 。抗压强度和抗拉强度设计值的单位均以 N·mm⁻² 计。与钢 筋的抗拉强度相比, 混凝土的抗拉强度很低, 故不考虑混凝土构件中受拉一侧混凝土的抗拉作用。图 2(a) 中 e 是轴向作用力 N 至受拉钢筋 A_s 合力作用点之间的距离, e'是轴向作用力 N 至受压钢筋 A'_s 合力作用点 之间的距离, e_i 是偏心压力 N 的作用轴线与构件中心轴线之间的距离, 即计算偏心距, 两者的单位均以 mm 计。而此处的钢筋合力作用点实际上就是受力钢筋横截面的圆心。

现分析混凝土构件上的作用力 N 对构件中心轴线的静力矩,根据图 2(a)可得静力矩的表达式为:

$$\sum M = 0 \Rightarrow Ne_i = \alpha_1 f_c bx \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{2}\right) + A'_s f'_y \left(\frac{h}{2} - a'_s\right) + A_s f_y \left(\frac{h}{2} - a_s\right)$$
(4)

根据图 2(a)中的混凝土构件在轴向压力 N 作用下的静力平衡关系式可得:

$$\sum F_N = 0 \Longrightarrow N = \alpha_1 f_c bx + A'_s f'_y - A_s f_y$$
(5)

式中, α_1 为钢筋混凝土正截面受压区等效矩形应力图形系数。当混凝土强度等级小于 C50 时, α_1 =1,当 混凝土强度等级为 C80 时, α_1 = 0.94 [6]-[11]。 f_c 为混凝土轴心抗压强度设计值,也就是混凝土棱柱体的 抗压强度设计值,其单位为 N·mm⁻²。

根据式(4)和式(5)就可以得到混凝土构件所受偏心压力 N 的计算偏心距 ei为:

$$e_{i} = \frac{Ne_{i}}{N} = \frac{\alpha_{1}f_{c}bx\left(\frac{h}{2} - \frac{x}{2}\right) + A'_{s}f'_{y}\left(\frac{h}{2} - a'_{s}\right) + A_{s}f_{y}\left(\frac{h}{2} - a_{s}\right)}{\alpha_{1}f_{c}bx + A'_{s}f'_{y} - A_{s}f_{y}}$$
(6)

从式(6)可以看出,计算偏心距 e_i与受压区高度 x 和构件正截面的尺寸 h、b 和 a_s等有关。理论上根据式(6)就可以计算得到偏心压力 N 的偏心距 e_i。但由于式(6)中的受压区高度 x 为未知数,因此无法直接由式(6)计算出计算偏心距 e_i。

前文已述及,为寻求以偏心距 e_i 和钢筋混凝土构件正截面的有效高度 h_0 之间的关系来判断构件属于 大、小偏心的方法,视钢筋混凝土构件处于界限破坏的状态。当钢筋混凝土构件在压力 N 作用下处于受 压界限破坏时,其正截面的受压区高度 x 达到界限受压区高度 x_b ,而与其对应的界限相对受压区高度 ξ_b 可由式(2)或式(3)中的表达式进行计算,因此将 $x_b = \xi_b h_0$ 以及 $h = h_0 + a_s$ 和 $h = h'_0 + a'_s$ 代入式(6)并对其化简 后得:

$$e_{i} = \frac{\alpha_{1}f_{c}bh_{0}\xi_{b}\left[h_{0}\left(1-\xi_{b}\right)+a_{s}\right]+A_{s}'f_{y}'\left(h_{0}'-a_{s}'\right)+A_{s}f_{y}\left(h_{0}-a_{s}\right)}{2\left(\alpha_{1}f_{c}bx+A_{s}'f_{y}'-A_{s}f_{y}\right)}$$
(7)

将式(7)等号右侧分数的分子和分母同时除以 bho 后分数值保持不变,则有:

$$e_{i} = \frac{\frac{\alpha_{1}f_{c}\xi_{b}bh_{0}\left[h_{0}\left(1-\xi_{b}\right)+a_{s}\right]}{bh_{0}} + \frac{A_{s}'}{bh_{0}}f_{y}'(h_{0}'-a_{s}') + \frac{A_{s}}{bh_{0}}f_{y}(h_{0}-a_{s})}{2\left(\frac{\alpha_{1}f_{c}bh_{0}\xi_{b}}{bh_{0}} + \frac{A_{s}'}{bh_{0}}f_{y}' - \frac{A_{s}}{bh_{0}}f_{y}\right)}$$
(8)

周晓军

根据钢筋混凝土受压构件中配筋率 ρ 的定义,则有:

$$\rho = \frac{A_s}{bh_0} = \frac{A_s'}{bh_0} \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)并对其化简后得:

$$e_{i} = \frac{\alpha_{1}f_{c}\xi_{b}\left[h_{0}\left(1-\xi_{b}\right)+a_{s}\right]+\rho f_{y}'\left(h_{0}'-a_{s}'\right)+\rho f_{y}\left(h_{0}-a_{s}\right)}{2\left(\alpha_{1}f_{c}\xi_{b}+\rho f_{y}'-\rho f_{y}\right)}$$
(10)

分析式(10)可知,钢筋混凝土偏心受压构件的计算偏心距 e_i 与 10 个物理参数有关。对于所要设计的钢筋混凝土偏心受压构件而言,当建造其的混凝土强度等级和所采用的普通钢筋的强度等级确定以后,也就确定了式(10)中的钢筋混凝土构件正截面受压区等效矩形应力图形系数 a_1 、混凝土轴心抗压强度设计值 f_y 、钢筋的抗拉强度设计值 f_y 、钢筋的抗压强度设计值 f_y' 、混凝土构件正截面界限相对受压区高度 ξ_b 这 5 个参数,即这 5 个参数是固定的,而变量仅剩余有配筋率 ρ 、 h_0 、 h_0' 、 a_s 和 a_s' 这 5 个参数,实际设计时通常取 $h_0 = h_0'$ 、 $a_s = a_s'$ 。

现举例分析,目前我国《地铁设计规范》(GB 50157-2013)中规定的地铁和轻轨线路中钢筋混凝土主体结构的混凝土强度等级不低于 C30,受力普通钢筋的强度等级不低于 HRB400 级[12],则根据《混凝土结构设计标准》(GB 50010-2010)(2024 年版)中的规定[11],上述 6 个参数的具体取值见表 1。

Table 1. Parameters of concrete and reinforcing steel bars 表 1. 混凝土和钢筋参数表

参数	α1	f_c/Nmm^{-2}	f_y/Nmm^{-2}	f_y'/Nmm^{-2}	ζb	$ ho_{ m max}$ /%	$ ho_{ m min}$ /%
数值	1	14.3	360	360	0.518	2.06	0.4

表 1 中的 ρ_{max} 和 ρ_{min} 分别代表钢筋混凝土构件中的最大和最小配筋率。将表 1 中的各个物理参数的 数值代入式(10),对其化简后可得:

$$\begin{cases} e_i = 1.242h_0 - 0.501a_s, \quad \rho = \rho_{\max} \\ e_i = 0.435h_0 + 0.306a_s, \quad \rho = \rho_{\min} \end{cases}$$
(11)

式(11)就是图 2 所示钢筋混凝土偏心受压构件,当采用 C30 混凝土和 HRB400 级钢筋进行制作时, 以最大配筋率 ρ_{max} 和最小配筋率 ρ_{min} 分别计算得到的计算偏心距 e_i 的表达式。两者相比,最小配筋率 ρ_{min} 所对应的偏心距 e_i 较小,即表明钢筋混凝土偏心受压构件的偏心距 e_i 随其配筋率 ρ 的降低而减小。以最 小配筋率 $\rho_{min} = 0.4\%$ 计算得到的偏心距为例,此时的偏心距 e_i 已小于钢筋混凝土构件正截面有效高度 h_0 的 0.435 倍。该结果是以混凝土强度等级为 C30 和钢筋强度等级为 HRB400 分析的结果。若以混凝土强 度等级为 C35、C40 等,且钢筋强度等级采用 HRB400、HRB500 来计算时得到的偏心距 e_i 与钢筋混凝土 构件正截面有效高度 h_0 之间的倍数介于 0.3~0.4 之间。

另外,根据图 2(a)中的几何关系分析,要使混凝土构件上偏心压力 N 的作用轴线不在构件两侧受力 钢筋合力作用点之间,即满足构件处于大偏心受压的承载模式,必有:

$$e_i \ge \left(\frac{h}{2} - a'_s\right) \tag{12}$$

根据图 2 中的几何关系,由于 $h = h'_0 + a'_s$,将其代入式(12)得到:

$$e_i \ge \frac{1}{2} (h'_0 - a'_s)$$
 (13)

前文已述及,实际设计中通常取 $h_0 = h'_0$ 、 $a_s = a'_s$,因而有:

$$e_i \ge 0.5 (h'_0 - a'_s) = 0.5 (h_0 - a_s) \tag{14}$$

根据工程经验,钢筋混凝土构件中正截面有效高度 $h_0 = a_s$ 之间满足 $a_s = (0.2 \sim 0.4)h_0$,将其代入式 (14)可得:

$$e_i \ge 0.5(h'_0 - a'_s) = (0.3 \sim 0.4)h_0 \tag{15}$$

由式(15)可知,当钢筋混凝土构件在偏心压力 N 的作用下处于大偏心界限破坏时,计算偏心距 e_i应 大于 0.3h₀。由此表明,可以用式(15)来判断钢筋混凝土构件处于大、小偏心的状态。

结合大量的工程试验研究,并根据式(15)的函数关系式,为便于工程应用,通常以 $e_i \leq 0.3h_0$ 作为判断钢筋混凝土构件为小偏心受压的条件,而以 $e_i > 0.3h_0$ 作为判断钢筋混凝土构件为大偏心受压的条件。 式中 h_0 的具体物理意义见图 2。

以上便得到了判断钢筋混凝土构件处于大、小偏心受压状态的方法。需要说明的是,与式(2)和式(3) 相比,采用 *e_i*≤0.3*h*₀和 *e_i*>0.3*h*₀来判断更加简便。因此,实际工程应用中多以 *e_i*≤0.3*h*₀和 *e_i*>0.3*h*₀来判 断钢筋混凝土构件是否处于大、小偏心状态。虽然判断的方法不同,但判断的结果应当是一致的。需要 指出的是,通常以式(2)和式(3)或者用 *e_i*≤0.3*h*₀和 *e_i*>0.3*h*₀来判断构件的大小偏心,这是基于实验测试、 理论分析和工程经验得出的经验公式,并不是所有的钢筋混凝土构件均必须满足上述公式才可判断为大、 小偏心受压构件,具体判断时还应该结合钢筋混凝土构件的承载状况进行分析。

在分析钢筋混凝土大、小偏心受压构件的判断方法之后,还需要向学生说明钢筋混凝土受压构件中 的受力钢筋可以采用对称配筋和非对称配筋的两种模式。所谓非对称配筋就是将混凝土受压构件中的受 压和受拉钢筋配置为强度等级和横截面面积均不相等的钢筋,而所述的对称配筋就是将混凝土受压构件 中的受压和受拉钢筋配置为强度等级和横截面面积均相等的钢筋。以下分别就钢筋混凝土受压构件非对 称配筋和对称配筋的计算方法进行分析。

4. 大偏心受压构件正截面内非对称受力钢筋的计算

为便于推导钢筋混凝土大偏心受压构件中受力钢筋的设计方法,仍然以图 2 所示的钢筋混凝土矩形 正截面偏心受压构件的承载模型为研究对象。当钢筋混凝土构件发生受压破坏时,为确保受拉一侧钢筋 *A*_s达到其抗拉强度 *f*_y的同时也使受压一侧的钢筋 *A*'_s达到其抗压强度 *f*'_y,则构件中的受压区高度 *x* 应当 满足[6]-[11] [13]:

$$2a'_s \le x \le x_b \tag{16}$$

式中,各物理量的含义同前。

根据图 2 中钢筋混凝土构件的承载状况,在轴向压力 N 作用下构件沿其轴向的静力平衡关系有:

$$\sum F_N = 0 \Longrightarrow N = \alpha_1 f_c bx + A'_s f'_v - A_s f_v \tag{17}$$

以钢筋混凝土构件正截面受压区混凝土承受的压力 a_1f_cbx 和受压钢筋 A'_s 所承受的压力 $A'_sf'_y$ 以及混凝土受拉区受拉钢筋 A_s 所承受的拉力 A_sf_y 分别对受拉钢筋 A_s 的合力作用点和受压钢筋 A'_s 的合力作用点 建立静力矩平衡关系式,即有:

$$\sum M = 0 \Rightarrow \begin{cases} Ne = \alpha_1 f_c bx \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) + A'_s f'_y \left(h_0 - a'_s \right) \\ Ne' = A_s f_y \left(h_0 - a'_s \right) - \alpha_1 f_c bx \left(\frac{x}{2} - a'_s \right) \end{cases}$$
(18)

式中,各个物理量的含义和单位同前。

此外,根据图 2 中的几何关系还可得到计算偏心距 ei、静力矩 e 和 e'的表达式为:

$$\begin{cases}
e_{i} = e_{0} + e_{a} \\
e = e_{i} + \frac{h}{2} - a_{s} \\
e' = e_{i} - \frac{h}{2} + a'_{s}
\end{cases}$$
(19)

式中, e_0 是初始偏心距; e_a 是附加偏心距,其数值可取偏心方向构件截面尺寸h的 1/30 或 20 mm 中的较大值,两者的尺寸单位均为 mm。

根据《混凝土结构设计标准》(GB 50010-2010)(2024 年版)中的规定[11],对于钢筋混凝土受压构件, 当受压构件的长细比很大时还需要考虑偏心受压构件在轴向荷载作用下发生纵向弯曲所引起的二阶弯矩 和因结构侧向移位所引起的二阶弯矩,具体分析内容为:

当截面对称的混凝土偏心受压构件受弯矩作用,若同一主轴方向的受压构件端部的弯矩比 *M*₁/*M*₂ ≤ 0.9,同时构件的轴压比 *N*/*Af*_c ≤ 0.9,且当构件的长细比满足式(20)时可以不考虑轴向荷载对混凝土构件引起的附加弯矩,否则就需要考虑在钢筋混凝土构件中产生的附加弯矩。此处的 *A* 为混凝土构件正截面面积,单位为 mm²。

$$\frac{l_c}{i} \le 34 - 12\frac{M_1}{M_2} \tag{20}$$

式中, *M*₁、*M*₂分别为已考虑侧移影响的偏心受压构件两端截面根据弹性阶段分析得到的同一主轴的组合 弯矩的设计值, *M*₁ 是构件端部绝对值较小的弯矩, *M*₂ 为构件端部绝对值较大的弯矩, 两者的单位均为 kN·m。当构件按单曲率弯曲时弯矩比 *M*₁/*M*₂取正值, 否则取负值; *l*_c为混凝土偏心受压构件的计算长度, 可近似取偏心受压构件相应主轴方向上下支撑点之间的距离,尺寸单位为 mm; *i* 为构件在偏心方向的截 面回转半径,矩形正截面的构件取 *i* = *h*,其尺寸单位为 mm。

《混凝土结构设计标准》(GB 50010-2010) (2024 年版)中还规定[11],除了排架柱以外,考虑轴向压力 在挠曲构件中产生二阶效应的其他偏心受压构件,其控制正截面上的弯矩设计值 M 以式(21)来计算,即:

$$\begin{cases}
M = C_m \eta_{ns} M_2 \\
C_m = 0.7 + 0.3 \frac{M_1}{M_2} \\
\eta_{ns} = 1 + \frac{\zeta_c}{\frac{1300}{h_0} \left(\frac{M_2}{N} + e_a\right)} \left(\frac{l_c}{h}\right)^2 \\
\zeta_c = \frac{0.5 f_c A}{N}
\end{cases}$$
(21)

式中, C_m 是混凝土受压构件端截面偏心距调整系数,当其计算值小于 0.7 时,取 $C_m = 0.7$; η_{ns} 为弯矩增 大系数,其计算公式适用于矩形、圆形、T 形和 I 形以及环形截面的构件; N 与弯矩设计值 M_2 相应的轴 向压力设计值,单位为 N; ζ_c 为构件截面曲率修正系数,当计算值大于 1.0 时,取 $\zeta_c = 1.0$; A 为钢筋混凝 土受压构件正截面的面积,其计算公式为 $A = b \times h$,单位为 mm²。当 $C_m\eta_{ns} < 1.0$ 时,取 $C_m\eta_{ns} = 1.0$,对 于剪力墙取 $C_m\eta_{ns} = 1.0$ 。

以上便是钢筋混凝土大偏心受压构件正截面承载力和非对称钢筋横截面面积的计算方法。钢筋混凝

土小偏心受压构件正截面承载力和非对称钢筋横截面面积的计算方法分析如下。

5. 小偏心受压构件正截面非对称受力钢筋的计算

当钢筋混凝土构件处于小偏心受压状态时,由于轴向压力N的偏心距 e_i较小,即满足经验公式 e_i≤0.3h₀。 故此时钢筋混凝土构件正截面上的受拉钢筋可能会处于拉应力或者压应力两种状态,需要分别加以分析。

1) 混凝土构件中受拉钢筋处于拉应力状态

在这种应力状态时,钢筋混凝土受压构件中靠近轴向压力 N 一侧的部分混凝土和受压钢筋 A's 处于压应力状态,而远离轴向压力 N 一侧的钢筋 As 则处于拉应力状态,混凝土小偏心构件的承载模式见图 3。



 Figure 3. Loading model 1 of concrete members due to small eccentric compression

 图 3. 钢筋混凝土小偏心构件承载模式之一

2) 混凝土构件中受拉钢筋处于压应力状态

在这种应力状态时,钢筋混凝土构件在轴向压力 N 的作用下其内部正截面上的混凝土和两侧配置的 钢筋 A_s和 A'_s均处于压应力状态,其承载模型见图 4。





此处需要特别说明,结合国内外的试验表明,当钢筋混凝土矩形正截面小偏心受压构件发生破坏时, 受压区混凝土被压碎的同时受压钢筋 A's 内的应力会达到其抗压强度,而受拉一侧的钢筋 As 则可能处于 拉应力也可能处于压应力状态,通常其不会发生屈服,见图 3 和图 4。因此,计算时受拉钢筋 As 的应力 就不能直接采用其抗拉强度设计值 fy, 而是用实际应力 os 来计算,其表达式为[6]-[11] [13]:

$$\sigma_s = \frac{\xi - \beta}{\xi_b - \beta} f_y \tag{22}$$

式中, β 为混凝土构件正截面等效矩形应力图形的系数,当混凝土强度等级小于 C50 时, β =0.8,当混凝 土强度等级为 C80 时, β =0.74[6]-[11][13], f_{2} 为钢筋抗拉强度设计值,单位为 N·mm⁻²; ξ 为钢筋混凝土 构件正截面的相对受压区高度,其无量纲,根据式(1)则有 ξ = x/h_0 ; ξ_b 为钢筋混凝土构件正截面的界限相 对受压区高度,其也无量纲,根据式(1)则有 ξ_b = x_b/h_0 。

从式(22)可以看出,用应力 σ_s 来计算受拉钢筋 A_s 的实际应力其实质就是对受拉钢筋 A_s 的抗拉强度 f_y 进行折减。在计算中若得到钢筋 A_s 的应力 $\sigma_s < 0$ 时,表示钢筋 A_s 处于拉应力状态,而计算得到的应力 $\sigma_s > 0$ 时,则表示钢筋 A_s 处于压应力状态,并且钢筋 A_s 的应力 σ_s 应当满足 $-f'_y \le \sigma_s \le f_y$ 。

对图 3 所示的钢筋混凝土小偏心受压构件承载模型进行轴向静力平衡分析可得:

$$\sum F_N = 0 \Longrightarrow N = \alpha_1 f_c bx + A'_s f'_y - A_s \sigma_s$$
⁽²³⁾

分析图 3 所示的混凝土构件中偏心压力 N、受拉钢筋 A_s 的拉力 $A_s f_y$ 、受压钢筋 A'_s 的压力 $A'_s f'_y$ 、混凝 土受压区的压力 $\alpha_1 f_c bx$ 对其内部受拉钢筋 A_s 和受压钢筋 A'_s 合力作用点的静力距平衡关系可得:

$$\sum M = 0 \Longrightarrow \begin{cases} Ne = \alpha_1 f_c bx \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) + A'_s f'_y \left(h_0 - a'_s \right) \\ Ne' = \alpha_1 f_c bx \left(\frac{x}{2} - a'_s \right) - A_s \sigma_s \left(h_0 - a'_s \right) \end{cases}$$
(24)

式中, e 是轴向压力 N 的轴线方向与受拉钢筋 A_s 合力作用点之间的距离,单位为 mm; e'是轴向力 N 的 轴线方向与受压钢筋 A'_s 合力作用点之间的距离,单位为 mm。

此外,根据图3中的几何关系可得:

$$\begin{cases} e = e_i + \frac{h}{2} - a_s \\ e_i = e_0 + e_a \\ e' = \frac{h}{2} - e_i - a'_s \end{cases}$$
(25)

式中,各个符号的含义同前。

利用式(22)至式(25)就可以计算并得到钢筋混凝土小偏心受压构件在图 3 所示的承载模式之一中的正 截面承载力 N 和全部受拉钢筋 A_s 与全部受压钢筋 A'_s 的横截面面积,并由此得到需要配置的受拉钢筋 A_s 和受压钢筋 A'_s 。在计算过程中需要特别注意的是,当混凝土构件中的受压区高度 x > h 时,取 x = h。这 个取值的物理意义就是当计算得到的混凝土构件正截面上的受压区超过了其正截面的实际高度 h,因此 从工程角度分析此时受压区高度 x 只能取截面的实际高度 h。

再来分析图 4 中钢筋混凝土构件的静力平衡和静力矩平衡关系。根据混凝土构件轴向静力平衡的关系可得:

$$\sum F_N = 0 \Longrightarrow N = \alpha_1 f_c bh + A'_s f'_y + A_s \sigma_s$$
⁽²⁶⁾

在图 4 所示的承载模式中, 混凝土构件正截面的受压区高度已经从 x 变更为 h, 即在截面的高度 h。 根据图 4 所示的混凝土构件中偏心压力 N、受拉钢筋 A_s的拉力 A_sf_y、受压钢筋 A'_s的压力 A'_sf'_y、混凝 土受压区的压力 a_sf_cbh 对其内部受拉钢筋 A_s和受压钢筋 A'_s合力作用点的静力距平衡关系可得:

$$\sum M = 0 \Rightarrow \begin{cases} Ne = \alpha_1 f_c bh\left(\frac{h}{2} - a_s\right) + A'_s f'_y \left(h_0 - a'_s\right) \\ Ne' = \alpha_1 f_c bh\left(\frac{h}{2} - a'_s\right) - A_s \sigma_s \left(h_0 - a'_s\right) \end{cases}$$
(27)

式(27)就是钢筋混凝土小偏心受压构件在正截面钢筋全部处于压应力状态时根据静力矩平衡关系得 到的方程式,其中各个物理量的含义同前。

此处,在课程讲解时还应当强调一种特殊的状态,即当混凝土小偏心受压构件轴向压力的偏心距很小时,即偏心距 *e*_i接近构件的中心轴线时,受压钢筋的 *A*_s要大于 *A*_s,从而使偏心方向发生改变,有可能导致远离轴向力 *N* 的一侧混凝土被先压碎,此时混凝土构件中的钢筋全部处于压应力状态,将这种破坏称为混凝土构件的反向破坏。为避免钢筋混凝土构件发生反向破坏,《混凝土结构设计标准》(GB 50010-2010)(2024 年版)中规定当构件的轴向压力 *N* > *f*_c*A*,则在计算构件受力钢筋时除了满足式(26)和式(27)以外,还需要满足构件中各个作用力对受压钢筋 *A*_s 的静力矩[11],即:

$$Ne' \le \alpha_1 f_c bh\left(h'_0 - \frac{h}{2}\right) + A_s f_y\left(h'_0 - a_s\right)$$
⁽²⁸⁾

将式(25)中关于 e'的表达式代入式(28)可得:

$$N\left[\frac{h}{2} - a'_{s} - (e_{0} - e_{a})\right] \le \alpha_{1}f_{c}bh\left(h'_{0} - \frac{h}{2}\right) + A'_{s}f'_{y}(h'_{0} - a_{s})$$
⁽²⁹⁾

式中, h'_{0} 就是受压钢筋 A'_{s} 的合力作用点至离纵向力N较远一侧边缘的距离, $\mathbb{D}h'_{0} = h - a'_{s}$ 。

此处也需要注意的是,利用式(29)计算中如果出现 *x* > *h* 时,则仍然用 *x* = *h* 代入计算,其原因己在前 文中进行了说明。

6. 混凝土偏心受压构件正截面对称配筋时受力钢筋的计算

以上分析和推导了钢筋混凝土大偏心和小偏心受压构件采用非对称配筋时受力钢筋的计算方法。而 在实际工程中,偏心受压构件在不同内力组合下可能出现相反方向的弯矩。此外,当构件中弯矩的数值 相近或即便相反方向的弯矩数值差别较大时,一般均采用对称配筋。采用对称配筋还可以防止在工程现 场将受压和受拉钢筋的位置放错,尤其是对于采用预制装配式的立柱或构件而言,为避免在施工现场放 错钢筋的位置,通常均采用对称配筋。

所述的对称配筋,就是指将受压构件中的受拉钢筋和受压钢筋均设计为具有相同强度等级和相同横 截面面积的钢筋,即有:

$$\begin{cases}
A_s = A'_s \\
f_y = f'_y \\
a_s = a'_s
\end{cases}$$
(30)

式中,各个物理量的含义和单位同前。

此处需要特别注意的是,当以对称配筋来设计钢筋混凝土偏心受压构件中的受力钢筋时,将钢筋混凝土构件均先视为大偏心受压构件,并利用式(17)直接计算出钢筋混凝土构件正截面上受压区的高度 *x* 值,然后将构件正截面混凝土受压区高度 *x*与同等强度等级的混凝土构件的界限受压区高度 *x_b* = *ζ_bh₀* 比 较,并利用偏心距 *e_i* ≤ 0.3*h*₀ 和 *e_i* > 0.3*h*₀ 以及式(2)和式(3)以及来判断该钢筋混凝土构件是属于大偏心受 压构件还是属于小偏心受压构件。尽管判断时采用的方法不同,但分析和判断的结果应当是一致的。否 则就应当检查计算方法和过程是否正确。以下就混凝土大偏心和小偏心受压构件对称配筋的计算方法进 行分析和推导。

6.1. 混凝土大偏心受压构件对称配筋的计算

前文已述及,采用对称配筋时可有效避免在施工现场错装受拉和受压钢筋位置的情况,有利于提高

施工效率,因此在钢筋混凝土大偏心受压构件中多采用对称配筋,其受力钢筋的设计方法如下。由于受力钢筋采用了对称配筋的模式,故将式(30)中的 $A_s = A'_s 和 f_y = f'_y$ 代入式(5)或式(17)均可得到计算混凝土大偏心受压构件中正截面受压区高度 x 的表达式:

$$x = \frac{N}{\alpha_1 f_c b}$$
(31)

将式(31)代入式(18)并对其化简后得到计算钢筋混凝土大偏心受压构件中受拉钢筋的横截面面积 A_s 和受压钢筋的横截面面积 A's 的公式,即:

$$\begin{cases} A'_{s} = \frac{N(e - h_{0}) + \frac{N^{2}}{2\alpha_{1}f_{c}b}}{f'_{y}(h_{0} - a'_{s})} \\ A_{s} = \frac{N(e' - a'_{s}) + \frac{N^{2}}{2\alpha_{1}f_{c}b}}{f_{y}(h_{0} - a'_{s})} \end{cases}$$
(32)

由于是对称配筋,则计算的结果也应当是 *A_s* = *A'_s*。若两者不相等时,可选取用式(32)计算得到的较大值作为大偏心受压构件中受力钢筋的横截面面积。此外,若计算时出现 *x* < 2*a'_s*,则按照非对称配筋的方法计算 *A_s*,并且要取 *A_s* = *A'_s*。若计算中出现 *x* > *ξ_bh*₀,说明构件正截面混凝土受压区高度 *x* 超过了界限相对受压区高度 *ξ_bh*₀,此时受拉钢筋 *A_s*达不到其抗拉强度,混凝土构件属于受压破坏,此种状况下就需要采用小偏心受压构件的方法进行设计,具体计算方法的推导和讲解如下。

6.2. 小偏心受压构件对称配筋的计算

为计算小偏心受压构件的对称配筋。考虑到受拉和受压钢筋的强度等级和横截面面积均相等,即 对称配筋,同理可将式(30)中的 *A_s* = *A'_s*代入式(23)得到计算混凝土小偏心受压构件中受压区高度 *x* 的表 达式:

$$x = \frac{N - A_s' \left(f_y' - \sigma_s \right)}{\alpha_1 f_c b} \tag{33}$$

对于小偏心受压构件,此处需要特别说明,尽管有 *A_s* = *A'_s*,则仍以受压钢筋横截面面积 *A'_s* 代入式(33)。 同时,将式(30)中的 *A_s* = *A'_s* 代入式(24)可得到混凝土小偏心受压构件中受拉钢筋的横截面面积 *A_s* 和 受压钢筋的横截面面积 *A'_s* 的计算公式分别为:

$$\begin{cases}
A'_{s} = \frac{Ne - \alpha_{1}f_{c}bx\left(h_{0} - \frac{x}{2}\right)}{f'_{y}\left(h_{0} - a'_{s}\right)} \\
A_{s} = \frac{\alpha_{1}f_{c}bx\left(\frac{x}{2} - a'_{s}\right) - Ne'}{\sigma_{s}\left(h_{0} - a'_{s}\right)}
\end{cases}$$
(34)

式(33)和式(34)就是计算钢筋混凝土小偏心受压构件中正截面受压区高度 x 以及受拉钢筋的横截面面 积 A_s 和受压钢筋的横截面面积 A'_s 的理论公式。由于 A_s 和 A'_s 在式(33)和式(34)对应的 3 个公式中均是未知 量,故实际时仍然无法求解。为便于求解,还需要利用混凝土构件在纯弯曲受压状态下正截面相对受压 区高度 ξ 与受压区高度 x 之间的函数关系,即式(1)。将式(1)中受压区高度 x 与相对受压区高度 ξ 之间的 关系 $x = \xi h_0$ 代入式(33)可得:

$$\xi h_0 = \frac{N - A'_s \left(f'_y - \sigma_s \right)}{\alpha_1 f_c b} \tag{35}$$

将计算受拉钢筋 As 应力 os 的公式即式(22)代入式(35)并对其进行化简后得到:

$$A'_{s}f'_{y} - A'_{s}\frac{\xi - \beta}{\xi_{b} - \beta}f_{y} = N - \alpha_{1}f_{c}bh_{0}\xi$$

$$\tag{36}$$

考虑到混凝土小偏心受压构件采用了对称配筋的模式,因此可将式(30)中的 $f_y = f'_y$ 代入式(36)并对其进行化简后得:

$$A'_{s}f'_{y} = \frac{N - \alpha_{1}f_{c}bh_{0}\xi}{\frac{\xi_{b} - \xi}{\xi_{b} - \beta}}$$
(37)

此处虽然有 $f_y = f'_y$, 但仍然采用钢筋的抗压强度设计值 f'_y 代入。将式(37)代入式(24)中的第 1 式 可得:

$$Ne\left(\frac{\xi_b - \xi}{\xi_b - \beta}\right) = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi \left(1 - 0.5 \xi\right) \left(\frac{\xi_b - \xi}{\xi_b - \beta}\right) + \left(N - \alpha_1 f_c b h_0 \xi\right) \left(h_0 - a'_s\right)$$
(38)

很显然,式(38)实际上是一个关于相对受压区高度 *č* 的一元三次方程式,其计算过程较为繁琐。为便 于求解,可令:

$$\lambda = \xi \left(1 - 0.5 \xi \right) \left(\frac{\xi_b - \xi}{\xi_b - \beta} \right) \tag{39}$$

式中, λ为任意参数。

将式(39)代入式(38)并对其进行化简后得:

$$\lambda = \frac{Ne}{\alpha_1 f_c b h_0^2} \left(\frac{\xi_b - \xi}{\xi_b - \beta} \right) - \left(\frac{N}{\alpha_1 f_c b h_0^2} - \frac{\xi}{h_0} \right) \left(h_0 - a_s' \right)$$
(40)

由于在设计钢筋混凝土小偏心受压构件时,混凝土的强度等级和钢筋的强度等级是选取的,因而也 是已知的,所以与其对应的混凝土轴心抗压强度设计值 *f*_c、混凝土受压构件正截面相对界限受压区高度 *ξ*_b和等效矩形应力图形的系数 β 均是已知的,此时就可利用式(40)分析出对应特定 *ξ*_b 和 β 时 λ 与 *ξ* 之间 的关系,经试验分析 λ 与 *ξ* 两者之间满足式(41)所示的线性函数[6]-[11] [13],即:

$$\lambda = 0.43 \frac{\xi_b - \xi}{\xi_b - \beta} \tag{41}$$

将式(41)代入式(40)即得到:

$$\xi = \frac{\left(Ne - 0.43\alpha_{1}f_{c}bh_{0}^{2}\right)\xi_{b} - N\left(\xi_{b} - \beta\right)\left(h_{0} - a_{s}'\right)}{\left(Ne - 0.43\alpha_{1}f_{c}bh_{0}^{2}\right) - \alpha_{1}f_{c}bh_{0}\left(\xi_{b} - \beta\right)\left(h_{0} - a_{s}'\right)}$$
(42)

将式(42)代入式(34)并对其化简后就可以得到混凝土小偏心受压构件中受拉钢筋的横截面面积 A_s和 受压钢筋的横截面面积 A's 的计算公式,其分别为:

$$\begin{cases}
A'_{s} = \frac{Ne - \alpha_{1} f_{c} b \xi h_{0}^{2} \left(1 - 0.5 \xi\right)}{f'_{y} \left(h_{0} - a'_{s}\right)} \\
A_{s} = \frac{\alpha_{1} f_{c} b \xi h_{0} \left(0.5 \xi h_{0} - a'_{s}\right) - Ne'}{\left(\frac{\xi - \beta}{\xi_{b} - \beta}\right) f_{y} \left(h_{0} - a'_{s}\right)}
\end{cases}$$
(43)

需要注意的是,由于式(42)的表达式较长,为便于表述,式(43)中的相对受压区高度 ζ并未被式(42) 替换。由式(42)计算得到混凝土构件正截面相对受压区高度 ζ 后就可以将其代入式(43)再计算得到 A_s 和 A'_s。

由于以对称配筋的方式设计钢筋混凝土小偏心受压构件的受力钢筋,则由式(43)可得 $A_s = A'_s$ 和 $f_y = f'_y$ 。当采用式(43)计算受拉钢筋横截面面积 A_s 和受压钢筋横截面面积 A'_s 中出现钢筋横截面面积小于 0 时,则选取正值的横截面面积作为计算值。在得到 A'_s 和 A_s 后即可选择合适的受力钢筋,并完成混凝土小偏心受压构件的对称配筋设计。

7. 工程案例设计

在得到钢筋混凝土大、小偏心受压构件中受力钢筋的计算公式后,为便于学生理解和掌握,可结合 工程案例就前文推导而得出的计算公式和设计方法进行应用,从而通过对实际工程案例的设计和讲解, 使学生能够进一步理解和掌握钢筋混凝土受压构件中受力钢筋的分析和设计方法。为此,以某地铁采用 明挖法建造的地下两层框架结构车站为例,对钢筋混凝土框架结构中顶板、底板和中间楼板的配筋进行 设计。经过对该车站框架结构在地层土压力和地下水压力两种永久荷载组合作用下的内力计算,所得到 的车站各构件中的内力即弯矩和轴力的分布状况见图 5。



Figure 5. Diagram of internal forces in rectangular frame structure of a subway station 图 5. 某地铁车站矩形框架结构的内力图

从图 5 可知,车站框架结构中顶板和底板跨中的正弯矩值较大,均处于偏心受压状态,而边墙处于偏心受拉状态。因此,对图 5 中车站顶板和底板以及中间楼板跨中的正截面配筋进行分析与设计。

已知车站顶板跨中截面处的内力即弯矩 M = 448.3 kN·m,轴力 N = 389.1 kN。车站底板跨中截面的 弯矩 M = 686.5 kN·m,该截面的轴力 N = 1521 kN。现设用明挖法修建该地铁地下车站,其主体结构均设 计为现浇钢筋混凝土结构。拟采用的混凝土强度等级为 C30,其轴心抗压强度设计值为 $f_c = 14.3$ N·mm⁻², 轴心抗拉强度设计值为 $f_i = 1.43$ N·mm⁻²,受力钢筋采用 HRB400 级,其抗拉和抗压强度的设计值 $f_y = f'_y = 360$ N·mm⁻²。根据工程经验,选取车站顶板的厚度为 h = 700 mm,取沿车站纵向的长度为 b =1000 mm,则车站顶板正截面的尺寸为 $b \times h = 1000$ mm × 700 mm,并取 $a_s = a'_s = 40$ mm。车站底板的厚度 为 h = 800 mm,取沿车站纵向的长度为 b = 1000 mm。则底板正截面的尺寸为 $b \times h = 1000$ mm,则车站可板正截面的尺寸为 $b \times h = 1000$ mm。则底板正截面的尺寸为 $b \times h = 1000$ mm,取沿车站纵向的长度为 b = 1000 mm,则车站可

7.1. 车站顶板正截面对称配筋的设计

首先分析车站顶板的长细比 *l*_c/*h* 和端部弯矩 *M*₁和 *M*₂以及其轴力 *N* 所引起的弯矩比和轴压比是否满 足混凝土设计标准(2024 年版)和式(20)的要求。将顶板端部截面的 *M*₁ = 543.2 kN·m 和 *M*₂ = 766.8 kN·m 等 与式(20)相关的各个参数代入并计算得到长细比满足式(20)的要求,且弯矩比 *M*₁/*M*₂ 和轴压比 *N*/*f*₃*A* 也均 满足标准中小于 0.9 的要求,因此根据《混凝土结构设计标准》(GB 50010-2010)(2024 年版)的规定[11], 对顶板进行配筋设计时可不考虑轴向压力对顶板沿轴向挠曲而产生的附件弯矩。

在计算时先将顶板视为大偏心受压构件,计算出顶板跨中正截面混凝土等效矩形应力图形的受压区 高度 x,然后根据顶板正截面上混凝土受压区高度 x 是否满足式(2)和式(3)来判定顶板是大偏心还是小偏 心受压构件。将顶板的相关参数代入式(31)可得到顶板对称配筋时正截面混凝土的受压区高度 x,即有:

$$x = \frac{N}{\alpha_1 f_c b} = \frac{389.1 \times 1000}{1 \times 14.3 \times 1000} = 27.21 (\text{mm})$$
(44)

然后根据式(1)可得顶板跨中正截面混凝土界限受压区高度 x_b为:

$$x_b = \xi_b \times h_0 = 0.518 \times 660 = 341.9 \,(\text{mm}) \tag{45}$$

由式(44)和式(45)可得混凝土顶板正截面受压区高度 x = 27.21 mm < x_b = 341.9 mm,因此顶板属于大偏心受压构件,可按照大偏心受压构件进行正截面配筋设计。

为此,需要计算车站顶板在跨中正截面上弯矩 *M* 和轴力 *N* 所引起的初始偏心距 e_0 ,其值为 $e_0 = M/N = 1152 \text{ mm}$,附加偏心距取 $e_a = 20 \text{ mm}$ 。将相关参数代入式(19)得到顶板跨中在弯矩和轴力作 用下大偏心受压时的计算偏心距 e_i 和静力矩 e = e'分别为:

$$\begin{cases} e_i = e_0 + e_a = 1152 + 20 = 1172 \,(\text{mm}) \\ e = e_i + \frac{h}{2} - a_s = 1172 + \frac{700}{2} - 40 = 1482 \,(\text{mm}) \\ e' = e_i - \frac{h}{2} + a'_s = 1172 - \frac{700}{2} + 40 = 862 \,(\text{mm}) \end{cases}$$
(46)

另外,根据前文中的分析方法,还可以用计算偏心距 e_i 和混凝土构件正截面有效高度 h_0 之间的关系判断。由式(46)得到计算偏心距 $e_i = 1172 \text{ mm}$,而顶板计算截面的有效高度 $h_0 = 660 \text{ mm}$,很显然 $e_i = 1172 \text{ mm} > 0.3h_0 = 198 \text{ mm}$,则车站顶板属于大偏心受压构件,这与采用式(2)分析和判断的结果相同。

根据大偏心受压构件中对称配筋的受拉钢筋横截面面积 A_s 和受压钢筋横截面面积 A'_s 的计算公式 (32),将相关参数代入式(32)并经过计算可得:

$$\begin{cases} A'_{s} = \frac{N(e - h_{0}) + \frac{N^{2}}{2\alpha_{1}f_{c}b}}{f'_{y}(h_{0} - a'_{s})} = 1456.9 (\text{mm}^{2}) \\ A_{s} = \frac{N(e' - a'_{s}) + \frac{N^{2}}{2\alpha_{1}f_{c}b}}{f_{y}(h_{0} - a'_{s})} = 1456.9 (\text{mm}^{2}) \end{cases}$$

$$(47)$$

根据式(47)得到大偏心受压的顶板正截面对称配筋时受压钢筋 A's 和受拉钢筋 As 的横截面面积均相等,全部受拉钢筋的横截面面积 As 和全部受压钢筋的横截面面积 A' 均为 1456.9 mm²。

此处,由式(44)计算得到顶板正截面混凝土的受压区高度满足 x = 27.21 mm < 2a'_s = 80 mm。这表明顶 板即便发生破坏时受压钢筋并未达到其抗压强度 f'_y,因此受压区高度取 x = 2a'_s = 80 mm,并对受压钢筋

 A'_{s} 进行静力矩平衡分析,即将 $x = 2a'_{s} = 80 \text{ mm}$ 代入式(18)中的第 2 式可得:

$$\sum_{A'_s} M = 0 \Longrightarrow Ne' = A_s f_y \left(h_0 - a'_s \right) - \alpha_1 f_c bx \left(\frac{2a'_s}{2} - a'_s \right) = A_s f_y \left(h_0 - a'_s \right)$$
(48)

由式(48)就可以得到受拉钢筋的横截面面积As为:

$$A_{s} = \frac{Ne'}{f_{y} \left(h_{0} - a_{s}'\right)} = 1502.9 \left(\mathrm{mm}^{2}\right)$$
(49)

将各相关参数代入式(49)后计算得到全部受拉钢筋的横截面面积 $A_s = 1502.9 \text{ mm}^2$ 。因此,可以确定车站顶板跨中正截面处于大偏心受压状态时其对称配筋的横截面积为 $A_s = A'_s = 1502.9 \text{ mm}^2$ 。

在得到顶板跨中受力钢筋后还需要验算配置的钢筋是否满足混凝土设计标准中规定的最小配筋率和 是否超筋的要求。根据偏心受压构件单侧最小配筋率 ρ'_{min} 的定义可得顶板跨中正截面受压一侧钢筋的横 截面最小面积 A'_{smin}:

$$A'_{s\min} = \rho'_{\min}bh = 0.002 \times 1000 \times 700 = 1400 (\,\mathrm{mm}^2\,) \tag{50}$$

很显然,对称配筋时顶板单侧受压钢筋的横截面面积满足最小配筋率 ρ'_{min} 的面积要求,故以计算 得到的钢筋横截面面积来设置单侧受力钢筋,即顶板正截面中受拉和受压钢筋的横截面面积均取为 $A_s = A'_s = 1502.9 \text{ mm}^2$,从而各选取 5 根 Φ 20 mm 的 HRB400 级钢筋,则实际配筋的面积为 1570 mm²。 由此计算得到顶板的实际配筋率为 0.45%,该配筋率满足构件最小配筋率 $\rho'_{min} \ge 0.04\%$ 的要求。另外,根 据钢筋混凝土构件最大配筋率 ρ_{max} 的定义[6]-[11] [13]有:

$$\rho_{\max} = \xi_b \, \frac{\alpha_1 f_c}{f_y} = 0.518 \times \frac{1 \times 14.3}{360} = 2.06\% \tag{51}$$

式中,各参数含义同前。由式(51)可得大偏心受压顶板正截面中钢筋的实际配筋率 0.45%未超过最大配筋 率 ρ_{max} ,同时也满足设计标准中对纵向受压构件配筋率不超过 5%的规定。按照以上计算结果初步确定的 顶板部位正截面配置的受力钢筋大样图见图 6。



Figure 6. Reinforcement diagram for normal cross-section of roof slab subject to large eccentric compression (unit: mm) 图 6. 大偏心受压顶板正截面配筋图(单位: mm)

7.2. 车站底板正截面对称配筋的设计

接着分析车站底板的配筋,其跨中的弯矩 *M* = 686.5 kN·m,两端的弯矩分别为 *M*₁ = 601.3 kN·m, *M*₂ = 713.2 kN·m,跨中的轴力 *N* = 1521kN。与顶板跨中截面的分析方法相同。首先分析车站底板的长细比 *l_c/h* 和端部弯矩 *M*₁和 *M*₂以及轴力 *N* 所引起的弯矩比和轴压比是否满足式(20)和混凝土设计标准的要求,将

与式(20)相关的底板的各个参数代入并计算得到其长细比满足式(20)的要求,其弯矩比 *M*₁/*M*₂ 和轴压比 *N*/*f*₂*A* 也满足设计标准中小于 0.9 的要求,因此根据《混凝土结构设计标准》(GB 50010-2010)(2024 年版)的规定[11],在对底板进行配筋设计时可不考虑轴向压力对底板沿轴向挠曲而产生的附件弯矩的影响。

在计算时先将底板视为大偏心受压构件,计算出底板跨中正截面混凝土等效矩形应力图形的受压区 高度 *x*,然后根据底板正截面上混凝土受压区高度 *x* 是否满足式(2)和式(3)来判定底板是大偏心还是小偏 心受压构件。将底板的相关参数代入式(31)可计算底板对称配筋时正截面混凝土的受压区高度 *x*,即有:

$$x = \frac{N}{\alpha_1 f_c b} = \frac{1521 \times 1000}{1 \times 14.3 \times 1000} = 106.3 \,(\text{mm})$$
(52)

然后根据式(1)可得底板跨中正截面混凝土界限受压区高度 x_b为:

$$x_b = \xi_b \times h_0 = 0.518 \times 760 = 393.7 \,(\text{mm})$$
(53)

由式(52)和式(53)可得底板正截面的受压区高度 x = 106.3 mm < x_b = 393.7 mm,因此车站的底板也属于大偏心受压构件,可根据大偏心受压构件进行正截面配筋设计。

首先计算车站底板在跨中正截面上弯矩和轴力所引起的初始偏心距 e_0 ,其值为 $e_0 = M/N = 451.3 \text{ mm}$,附加偏心距取 $e_a = 20 \text{ mm}$ 。将相关参数代入式(19)可得到底板跨中在弯矩 M和轴力 N 作用下大偏心受压时的计算偏心距 e_i 和静力矩 e = e':

$$\begin{cases} e_i = e_0 + e_a = 451.3 + 20 = 471.3 \,(\text{mm}) \\ e = e_i + \frac{h}{2} - a_s = 471.3 + \frac{800}{2} - 40 = 831.3 \,(\text{mm}) \\ e' = e_i - \frac{h}{2} + a'_s = 471.3 - \frac{800}{2} + 40 = 111.3 \,(\text{mm}) \end{cases}$$
(54)

此处,再根据前文中的分析方法,利用计算偏心距 e_i 和混凝土构件正截面有效高度 h_0 之间的关系式进行判断。由式(54)得到偏心距 $e_i = 471.3 \text{ mm}$,而底板正截面的有效高度 $h_0 = 760 \text{ mm}$,很显然 $e_i = 471.3 \text{ mm} > 0.3h_0 = 228 \text{ mm}$,因此可以判断车站底板也属于大偏心受压构件,这个结果也与采用式(2) 得到的判断结果相一致。

根据大偏心受压构件中对称配筋时全部受拉钢筋横截面面积 A_s 和全部受压钢筋横截面面积 A'_s 的计算公式即式(32),将相关参数代入式(32)并经过计算可得:

$$\begin{cases} A'_{s} = \frac{N(e - h_{0}) + \frac{N^{2}}{2\alpha_{1}f_{c}b}}{f_{y}'(h_{0} - a'_{s})} = 730.8 (\text{mm}^{2}) \\ A_{s} = \frac{N(e' - a'_{s}) + \frac{N^{2}}{2\alpha_{1}f_{c}b}}{f_{y}(h_{0} - a'_{s})} = 730.8 (\text{mm}^{2}) \end{cases}$$
(55)

根据式(55)得到大偏心受压的底板对称配筋时受压和受拉钢筋的横截面面积均相等,全部受拉和全部受压钢筋的横截面面积均为 730.8 mm²。

由式(52)计算得到底板正截面混凝土的受压区高度满足 $x = 106.3 \text{ mm} > 2a'_s = 80 \text{ mm}$ 。由此表明构件 破坏时受压钢筋能够达到其抗压屈服强度 f'_y ,因而取 x = 106.3 mm。由此得到底板跨中截面的受压区高度 x 满足式(16)的要求,即:

$$2a'_{s} = 80 \text{mm} \le x = 106.3 \text{mm} \le x_{b} = 393.7 \text{mm}$$
(56)

式(56)表明即便混凝土底板受压破坏时当受拉一侧钢筋 A_s 达到其抗拉强度 f_y ,同时受压一侧的钢筋 A'_s 也能够达到其抗压强度 f'_y ,即底板全部受拉钢筋的横截面面积 $A_s = 730.8 \text{ mm}^2$ 。因此,可以确定车站 底板跨中正截面处于大偏心压受状态时其对称配筋的横截面积为 $A_s = A'_s = 730.8 \text{ mm}^2$ 。

在得到底板跨中受力钢筋以后还需要验算配置的钢筋是否满足混凝土设计标准中规定的最小配筋率 和是否超筋的要求。根据偏心受压构件单侧最小钢筋配筋率 ρ_{min} 的定义可得受压一侧钢筋的最小横截面 面积 A_{s,min}:

$$A'_{s,\min} = \rho'_{\min}bh = 0.002 \times 1000 \times 800 = 1600 (\,\mathrm{mm}^2\,) \tag{57}$$

很显然,采用对称配筋时底板单侧受压钢筋的横截面面积不满足最小配筋率 ρ'_{min} 的面积要求,故需要以最小配筋率计算得到的横截面面积来设置单侧受力钢筋,即底板中受拉和受压钢筋的横截面面积均 采用 $A_s = A'_s = 1600 \text{ mm}^2$,为此可各选取 5 根 $\Phi 22 \text{ mm}$ 的 HRB400 级钢筋,则实际配筋的面积为 1900 mm²。由此计算得到底板的实际配筋率为 0.48%,该配筋率大于最小配筋率 0.02%。同时,根据混凝土构件最大配筋率 ρ_{max} 的定义有[11][13]:

$$\rho_{\max} = \xi_b \frac{\alpha_1 f_c}{f_v} = 0.518 \times \frac{1 \times 14.3}{360} = 2.06\%$$
(58)

式中,各参数含义同前。由式(58)可得底板的配筋率 0.48%未超过最大配筋率 $\rho_{max} = 2.06%$ 的要求,即未超筋,同时也满足设计标准中对纵向受压构件配筋率不超过 5%的规定。根据以上计算结果初步确定的车站底板部位正截面配置的受力钢筋大样图见图 7。



Figure 7. Reinforcement diagram for normal cross-section of floor slab subject to large eccentric compression (unit: mm)

图 7. 大偏心受压底板正截面配筋图(单位: mm)

以上即为钢筋混凝土大偏心受压构件中受力钢筋计算公式的推导和工程案例中构件配筋设计的讲解 过程。从案例中车站顶板和底板受力钢筋的计算过程可以看出,两者均属于大偏心受压构件,因而采用 了大偏心对称配筋的设计和计算方法。

7.3. 车站中间楼板正截面对称配筋的设计

现在来继续分析车站中间楼板的受力钢筋。由图 5 可知,车站中间楼板跨中的弯矩 *M*=38.35 kN·m, 轴力 *N*=300.3 kN,其两端截面的弯矩 *M*₁=85.77 kN·m 和 *M*₂=112.12 kN·m。与前文中分析顶板和底板 跨中截面的方法相同。即先分析车站楼板的长细比 *l*_c/*h* 和端部弯矩 *M*₁和 *M*₂ 以及轴力 *N* 所引起的弯矩比 和轴压比是否满足式(20)和混凝土结构设计标准的要求,将与式(20)相关的楼板的各个参数代入并计算得 到其长细比满足式(20)的要求,其弯矩比 *M*₁/*M*₂ 和轴压比 *N*/*f*₂*A* 也满足设计标准中小于 0.9 的要求,因此 根据《混凝土结构设计标准》(GB 50010-2010) (2024 年版)的规定[11],在对底板进行配筋设计时可不考虑轴向压力对底板沿轴向挠曲而产生的附件弯矩的影响。

与车站顶板和底板的分析过程相同,在计算中板的配筋时也先将中板视为大偏心受压构件,计算出 中板跨中正截面等效矩形应力图形的受压区高度 *x*,然后根据构件正截面上混凝土受压区高度 *x* 是否满 足式(2)和式(3)来判定底板是大偏心还是小偏心受压构件。

如此,将中板先视为大偏心受压构件,并将中板的相关参数代入式(31)可计算偏心受压中板正截面对称配筋时的混凝土受压区高度 *x*,即有:

$$x = \frac{N}{\alpha_1 f_c b} = \frac{300.3 \times 1000}{1 \times 14.3 \times 1000} = 21.0 \,(\text{mm})$$
(59)

然后利用式(1)可计算中板跨中正截面混凝土界限受压区高度 xb为:

٢

$$x_{b} = \xi_{b} \times h_{0} = 0.518 \times 465 = 240.9 \,(\text{mm}) \tag{60}$$

由式(59)和式(60)可得 x = 21.0 mm < x_b = 238.3 mm,此处车站的中板暂时可按照大偏心受压构件进行分析。根据大偏心受压构件的承载模式,需要计算车站中板在跨中正截面上弯矩和轴力所引起的初始偏心距 e₀,其值为 e₀ = M/N = 127.70 mm,附加偏心距取 e_a = 20 mm。将相关参数代入式(19)即可得到中间楼板跨中在弯矩 M 和轴力 N 作用下大偏心受压时的计算偏心距 e_i和静力矩 e 与 e':

$$\begin{cases} e_i = e_0 + e_a = 127.7 + 20 = 147.7 \,(\text{mm}) \\ e = e_i + \frac{h}{2} - a_s = 147.7 + \frac{500}{2} - 35 = 362.7 \,(\text{mm}) \\ e' = e_i - \frac{h}{2} + a'_s = 147.7 - \frac{500}{2} + 35 = -67.3 \,(\text{mm}) \end{cases}$$
(61)

由式(61)可知,当以大偏心受压构件计算时中板偏心压力 N 的作用方向与受压钢筋 A's 合力作用点之间的距离 e' = -67.3 mm < 0 为负值,由此说明偏心压力 N 位于中板受压钢筋和受拉钢筋合力作用点之间,应属于小偏心受压构件,如此得出中板应处于小偏心受压状态,则应按照小偏心受压构件的对称配筋进行受力钢筋的设计。

为此,利用式(25)来计算小偏心受压中板在偏心压力 N 作用下的计算偏心距 e_i和对应的静力矩 e 和 e',即有:

$$\begin{cases} e_i = e_0 + e_a = 127.7 + 20 = 147.7 \text{ (mm)} \\ e = e_i + \frac{h}{2} - a_s = 147.7 + \frac{500}{2} - 35 = 362.7 \text{ (mm)} \\ e' = \frac{h}{2} - e_i - a'_s = \frac{500}{2} - 147.7 - 35 = 67.3 \text{ (mm)} \end{cases}$$
(62)

根据前文中对小偏心受压构件对称配筋设计的计算方法,需要利用式(42)计算中板正截面的相对受 压区高度ζ值,即将与式(42)相关的中板各个参数代入式(42)便得到中板正截面混凝土相对受压区高度 ζ为:

$$\xi = \frac{\left(Ne - 0.43\alpha_1 f_c bh_0^2\right) \xi_b - \left(\xi_b - \beta\right) \left(h_0 - a'_s\right) N}{\left(Ne - 0.43\alpha_1 f_c bh_0^2\right) - \alpha_1 f_c bh_0 \left(\xi_b - \beta\right) \left(h_0 - a'_s\right)} = 1.438$$
(63)

将式(63)得到的中板正截面混凝土相对受压区高度 *ξ* = 1.438 代入式(1)可得到中板跨中正截面混凝土 的受压区高度 *x* 为:

$$x = \xi h_0 = 1.438 \times 465 = 668.7 \,(\text{mm}) \tag{64}$$

根据式(64)的计算结果,中板跨中正截面混凝土受压区高度 x = 668.7 mm,而由式(1)中钢筋混凝土构件正截面的界限受压区高度的 $x_b = \xi_b h_0 = 0.518 \times 465 = 240.8 \text{ mm}$,很显然 $x = 668.7 \text{ mm} > x_b = 240.8 \text{ mm}$ 。此外,从式(64)所得到的中板正截面受压区高度 x = 668.7 mm > h = 500 mm,很明显中板的正截面混凝土受压区高度 x已经超过了中板的厚度 h,因此取 x = h = 500 mm,此时中板上的混凝土和钢筋全部处于小偏心受压状况,并且是属于图 4 所示的承载模式之二的状况。根据图 4 可得中板正截面沿轴向压力 N的静力平衡关系式为:

$$\sum F_N = 0 \Longrightarrow N = A_s \sigma_s + \alpha_1 f_c b h + A'_s f'_y$$
(65)

另外,从图4分析中板正截面上的作用力对受拉和受压钢筋的合力作用点的静力矩平衡关系得到:

$$\sum M = 0 \Rightarrow \begin{cases} Ne = \alpha_1 f_c bh\left(\frac{h}{2} - a_s\right) + A'_s f'_y \left(h_0 - a'_s\right) \\ Ne' = A_s \sigma_s \left(h_0 - a'_s\right) + \alpha_1 f_c bh\left(\frac{h}{2} - a'_s\right) \end{cases}$$
(66)

由式(66)即可得到中板受拉钢筋横截面面积 As和受压钢筋横截面面积 A'。的计算表达式为:

$$\begin{cases}
A'_{s} = \frac{Ne - \alpha_{1} f_{c} bh\left(\frac{h}{2} - a_{s}\right)}{f'_{y} \left(h_{0} - a'_{s}\right)} \\
A_{s} = \frac{Ne' - \alpha_{1} f_{c} bh\left(\frac{h}{2} - a'_{s}\right)}{\sigma_{s} \left(h_{0} - a'_{s}\right)}
\end{cases}$$
(67)

在式(67)中计算受拉钢筋横截面面积 *A*_s 的表达式中存在有应力 *σ*_s 一项,其值可由式(22)计算。将前 文计算得到的中板跨中正截面的相对受压区高度 *ζ*、界限相对受压区高度 *ζ*_b、正截面等效矩形应力图形系 数 *β* 和钢筋的抗拉强度 *f*_s 值代入式(22)可得:

$$\sigma_s = \frac{\xi - \beta}{\xi_b - \beta} f_y = \frac{1.438 - 0.8}{0.518 - 0.8} \times 360 = -814.70 \left(\text{N/mm}^2 \right)$$
(68)

由式(68)可得,受拉钢筋的应力 $\sigma_s = -814.70 \text{ N/mm}^2 < 0$,因而此处的钢筋处于受压状态。符合图 4 中混凝土构件全截面受压的模型。

将中板各个参数代入式(67)即可得到其正截面受拉钢筋横截面面积 As 和受压钢筋横截面面积 A's 为:

$$\begin{cases} A'_{s} = -9226.93 \,(\text{mm}^{2}) \\ A_{s} = 4330.42 \,(\text{mm}^{2}) \end{cases}$$
(69)

根据式(69)得到中板的受压钢筋横截面面积 A_s 为负值,因而不能采用,只能选取数值为正值的受拉 钢筋的横截面面积 A_s 。由于将中板的受力钢筋设计为对称配筋,即中板跨中正截面的受拉和受压钢筋的 横截面面积均取为 $A_s = A'_s = 4330.42 \text{ mm}^2$ 。可选取 7 根 Φ 28 的 HRB400 级钢筋,实际钢筋的横截面面积 为 4310 mm²。

在得到中板跨中正截面受力钢筋以后还需要验算配置的钢筋是否满足混凝土设计标准中规定的最小 配筋率和是否超筋的要求。根据偏心受压构件单侧最小钢筋配筋率 ρ_{min} 的定义可得受压一侧钢筋的最小 横截面面积 A'_{smin}:

$$A'_{\rm cmin} = \rho'_{\rm min}bh = 0.002 \times 1000 \times 500 = 1000 (\,\rm mm^2\,)$$
(70)

很显然,采用对称配筋时中板单侧配置的受压钢筋的横截面面积满足不小于最小配筋率 ρ'_{min} 的要求, 由此计算得到中板的实际配筋率为 1.72%,该配筋率大于最小配筋率 0.04%。同时,根据混凝土构件最大 配筋率 ρ_{max} 的定义有[11][13]:

$$\rho_{\max} = \xi_b \frac{\alpha_1 f_c}{f_v} = 0.518 \times \frac{1 \times 14.3}{360} = 2.06\%$$
(71)

式(71)中的各参数含义同前。由式(71)可得中板的实际配筋率 1.72%并未超过最大配筋率 $\rho_{max} = 2.06%$ 的 要求,即未超筋,同时也满足设计标准中对纵向受压构件配筋率不超过 5%的规定。根据以上计算结果初 步确定的车站中板跨中部位正截面配置的受力钢筋大样图见图 8。





此外,可按照中板的计算偏心距 *e*_i和其正截面有效高度 *h*₀之间的关系来判断中板大小偏心的状态。 根据式(62)得到中板跨中正截面偏心压力的计算偏心距 *e*_i = 147.7 mm,中板矩形正截面的有效高度 *h*₀ = 465 mm,可以判断 *e*_i = 147.7 mm < 0.35*h*₀ = 161 mm,因此可以判断中板处于小偏心受压状态。

此外,为避免中板发生反向破坏,根据《混凝土结构设计标准》(GB 50010-2010)(2024 年版)中规定的当构件轴向压力 N > f_cA,除了满足式(26)和式(27)以外,还需要满足构件中各个作用力对受压钢筋 A'_s的静力矩[11],即式(29)的要求。将各个参数代入式(29)并经计算后得到:

$$N\left[\frac{h}{2} - a'_{s} - (e_{0} - e_{a})\right] = 3.2 \times 10^{7} \le \alpha_{1} f_{c} bh\left(h'_{0} - \frac{h}{2}\right) + A'_{s} f'_{y}(h'_{0} - a_{s}) = 6.8 \times 10^{8}$$
(72)

从式(72)可知,小偏心受压的中板不会发生反向破坏。

以上就是钢筋混凝土小偏心受压构件中正截面受力钢筋计算公式推导和工程案例配筋设计的分析过 程。从车站中板正截面受力钢筋的计算过程可以看出,先将中板视为大偏心受压构件,然后以大偏心对 称配筋的模式计算得到的正截面混凝土受压区高度,并计算偏心压力的偏心距和偏心压力对受压和受拉 钢筋的静力矩。由于其中的一个静力矩为负值,由此得出按大偏心受压构件考虑是不合理的,应当以小 偏心受压构件进行计算。此时以小偏心受压构件计算时需要考虑远离偏心压力一侧钢筋的应力不能达到 其抗拉强度,而以应力 os 作为受拉钢筋的应力,然后计算混凝土构件正截面的相对受压区高度值 ζ,并 由此计算出小偏心受压构件正截面的混凝土受压区高度 x。由于计算得到中板跨中正截面的混凝土受压 区高度 x 超过了构件的正截面尺寸 h,则需要按构件正截面全部受压进行考虑,并且使 x = h,即以全部 正截面作为受压区来分析小偏心构件的沿轴向压力的静力平衡和静力矩平衡的关系式,由静力矩关系式 得到构件正截面的受拉和受压钢筋的横截面面积。需要注意的是,根据静力矩平衡关系计算得到的受拉 和受压钢筋横截面面积可能出现负值,此时就需要选取正值作为对称配筋的钢筋横截面面积的计算值, 并进而选择受力钢筋,完成小偏心受压构件的配筋设计。

8. 讨论

至此,通过上述的理论推导分别给出了钢筋混凝土偏心受压构件正截面承载力计算和受力钢筋配置 的设计方法。所列举的分析过程实际上也就是针对此部分内容进行教学设计的思路,即先向学生讲授钢 筋混凝土长立柱受偏心压力作用时的偏心距和附加偏心距的概念,然后讲解《混凝土结构设计标准》中 推荐的是否考虑混凝土受压构件长细比和轴向压力对其发生挠曲而产生的二阶附加弯矩。之后再讲授判 断钢筋混凝土构件属于大小偏心受压状态的方法,并进一步讲授大、小偏心受压构件在轴向压力作用下 的非对称和对称配筋的计算与设计方法。无论是混凝土大偏心受压构件还是小偏心受压构件,计算构件 内正截面承载力和受力钢筋横截面面积的关键是要分析混凝土构件在偏心压力作用下的轴向静力平衡关 系式以及混凝土构件与其内部钢筋所受作用力对受拉和受压钢筋合力作用点的静力矩平衡关系式,并由 关系式得出承载力和受压与受拉钢筋的横截面面积。在计算过程中还需要分析构件正截面受压区高度 *x* 是否满足式(16)的要求。当计算得到的受压区高度 *x* 不满足式(16)时,就以 *x* = 2 *a*^{*s*} 作为受压区高度进行 计算。

对于大偏心受压构件,其显著的特点就是混凝土构件内既有受拉钢筋又有受压钢筋,并且受力钢筋 的设计需要考虑混凝土构件受压破坏时受拉和受压钢筋也需要达到其屈服强度,具体就是要用式(16)来 加以判断。而对于小偏心受压构件,其内部的受力钢筋也包括受拉和受压钢筋,但由于轴向压力的偏心 距较小,使正截面受拉钢筋存在有受拉或受压的两种可能性,因此需要考虑受拉钢筋承受压力的工况, 而此种状态下混凝土构件即使发生受压破坏时其受拉钢筋并不会发生屈服,因此受拉钢筋的应力不能达 到其抗拉强度,所以在计算受拉钢筋应力时需要对受拉钢筋的抗拉强度进行折减,这也就是式(22)的物理 意义,这两个知识点应在课堂讲解时需要特别向学生加以说明,便于学生理解与掌握。

另外,对学生具有启发和树立创新思维的内容就是在计算小偏心受压构件对称配筋的钢筋横截面面 积时求解关于相对受压区高度 ζ 的一元三次方程式的方法。即文中式(38)的求解过程,通过用式(39)的转 换解决了一元三次方程难以求解的棘手问题。具体的技术路线是通过设置中间参数 λ,用其替换式(38)中 仅含有 ζ、ζ₆和 β 的表达式,并将式(38)转换为关于中间参数 λ 的方程,即式(40),然后分析式(40)中的已 知数,当构件的混凝土强度等级和钢筋的强度等级明确以后,式(40)中的仅存在有相对受压区高度 ζ 和中 间参数 λ 两个未知数,由此建立了中间参数 λ 与相对受压区高度 ζ 之间的函数关系即式(41),并借助式 (41)求得相对受压区高度 ζ,即式(42),用得到的相对受压区高度 ζ 就可以求得钢筋的横截面面积,并将 其代入式(43)就可求得小偏心受压构件对称配筋的钢筋横截面面积,使难以求解的一元三次方程得以求 解。该转化法的具有新意,且思路清晰,可为类似方程的求解提供参考。此外,利用工程案例的讲解,将 推演得出的公式加以应用,有助于学生积累工程经验,引导学生做到理论联系实际,为解决实际工程问 题奠定基础。如此组织和设计的课堂教学内容,使混凝土偏心受压构件配筋设计的思路更加清晰,便于 学生的理解与掌握,并有助于学生树立创新思维的意识。

以上总结了混凝土偏心受压构件正截面承载力和受力钢筋计算与设计的理论教学内容,为提高课程 的教学质量,除了教师合理地精心设计教学内容并在课堂讲授以外,还需要引导学生积极参与到课程的 教学活动中。主要的做法有:在讲授钢筋混凝土偏心受压构件的正截面承载力与钢筋横截面积计算方法 时,事先应向学生说明在课堂上会随时和随机抽点若干名同学来回答和重复所讲授的内容,使学生参与 到课程的教学中。因此,在课堂上结合讲授的内容和知识点,可随机抽点 3~5 名学生,由学生简述其个 人所理解和掌握的技术路线和计算方法,以考察学生对教师讲授内容的理解与掌握程度。另外,还可以 结合教师在课堂讲授的内容安排随堂测验或发放问卷调查,让全体学生在下课前用 5~10 min 完成课堂测 验或问卷调查,借以了解和考察学生对教师所讲授内容的理解与掌握状况。作为课程教学过程中使学生 主动参与学习的另外一个重要环节就是,结合钢筋混凝土偏心受压构件配筋设计的教学内容,向学生布 置相应的课程设计。课程设计的内容包括地铁车站框架结构中的立柱、顶底板、边墙、高架桥梁的桥墩、 拱桥主拱以及地下区间隧道中的衬砌等,使学生在课后根据教师的讲义、教学参考书以及通过在线网络 资源如中国大学 MOOC 等的复习和阅读完成对应教学内容的课程设计,并抽检 1~2 名学生在课堂上讲解 其完成的课程设计,与其他同学分享设计的经验。其目的在于督促和加深学生对所学内容中基本概念和 基本原理以及计算方法的理解与掌握,使学生能将理论与实践相结合,逐步积累工程经验。而教师则根 据学生在课堂上完成的单元测验、问卷调查的状况和学生提交的课程设计的质量,及时对教学内容和教 学方式进行调整、补充与完善,并在课堂上进行讲解和说明,以提高课程的教学质量,引导学生理解和 掌握钢筋混凝土偏心受压构件正截面承载力和配筋设计与计算的方法。

按照以上所总结的教学设计,在 2019~2024 学年间为我校土木工程、城市地下空间工程、智能建造 专业本科生而开设的《地下铁道与轻轨》课程中进行了教学实践,通过对选修该课程学生学习效果的考 核,约 96%以上的学生均能正确理解和掌握钢筋混凝土偏心受压构件中受力钢筋配置的计算与设计方法, 取得了良好的教学效果。

9. 结论

钢筋混凝土偏心受压构件正截面承载力和钢筋的计算和设计是我校为土木工程和城市地下空间工程 等专业本科学生开设的《地下铁道与轻轨》课程中的重要教学内容之一,如何使学生理解和掌握与此部 分内容相关的理论公式推导与设计方法,是教师结合课程教学大纲组织和设计教学内容并开展教学活动 的重要工作。本文根据作者多年从事《地下铁道与轻轨》课程中钢筋混凝土偏心受压构件中受力钢筋设 计和计算方法的教学活动,研究和总结了混凝土大、小偏心受压构件中受力钢筋计算方法的理论推导过 程,并给出了教学实践的具体做法。教学内容的安排可从以下 4 个方面实施,即:

1) 以等截面长立柱轴向受压弯曲来讲授钢筋混凝土偏心受压构件的类型、荷载的初始偏心距、计算 偏心距、附加偏心距的概念;

2) 通过建立钢筋混凝土矩形正截面构件的受压模型,分析和讲解钢筋混凝土矩形正截面构件在偏心 压力作用下的大、小偏心受压构件的判断方法;

3) 分析钢筋混凝土受压构件正截面受压、受压钢筋和受拉钢筋的静力和静力矩平衡条件,推导出正 截面上的承载力和受力钢筋横截面面积的计算方法;

4) 分析钢筋混凝土大、小偏心受压构件中对称配筋和非对称配筋的模式;

5) 以某地铁地下车站矩形横截面框架结构的顶板、底板和中间楼板偏心受压构件为工程案例,就各 个构件中的受力钢筋进行计算和设计。

以上教学内容的设计遵循了从讲授基本概念到讲授计算原理再到讲授计算方法和工程案例的教学思 路,并针对小偏心受压构件中受力钢筋横截面面积的求解引入参数转换的计算方法,即注重基本知识的 传授,同时还讲授具有新意的数学算法,使教学内容更加清晰和丰富。通过课程教学实践表明,所采用 的教学设计使学生更容易理解和掌握钢筋混凝土偏心受压构件配筋设计的基本概念、基本原理与计算方 法,并有利于培养学生进行创新思维的意识,达到提高教学质量的目的。

基金项目

本文的研究得到四川省 2021~2023 年高等教育人才培养质量和教学改革项目"服务交通强国,聚焦 智能建造"(JG2021-258)的支持,并得到了西南交通大学课堂教学与改革项目的支持。

参考文献

- [1] 中国城市轨道交通协会. 2024 年前三季度中国内地城轨交通线路概况[EB/OL]. <u>https://infosharingp2-oss.camet.org.cn/resources/manual/2024/10/10/599711040540741.pdf</u>, 2024-10-01.
- [2] 周晓军,周佳媚.城市地下铁道与轻轨交通[M]. 第2版.成都:西南交通大学出版社,2016.
- [3] 周晓军. 混合式教学法在《地下铁道》课程中的应用与效果评价[J]. 教育教学论坛, 2019(48): 176-177.
- [4] 高波, 王英学. 地下铁道[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [5] 张庆贺, 朱合华, 庄荣. 地铁与轻轨[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
- [6] 秦力,魏春明. 混凝土结构基本原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016.
- [7] 沈浦生. 混凝土结构设计原理[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [8] 翟爱良,郑晓燕. 钢筋混凝土结构计算与设计[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2002.
- [9] 宋玉普, 王清湘. 钢筋混凝土结构[M]. 北京: 机械工业出版社, 2015.
- [10] 许成祥,张皓. 混凝土结构基本原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016.
- [11] 中国建筑科学研究院. GB 50010-2010 混凝土结构设计标准(2024 年版) [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.
- [12] 北京城建设计研究总院有限责任公司. GB 50157-2013 地铁设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2014.
- [13] 李守巨. 混凝土结构常用公式与数据速查手册[M]. 北京: 知识产权出版社, 2015.