Advances in Education 教育进展, 2024, 14(12), 830-837
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2024.14122347

基于APOS理论的椭圆及其标准方程教学设计

郝润佳[1]，武文胜[2]，关晋瑞[1]

[1]太原师范学院数学与统计学院，山西 晋中
[2]邹城市第一中学，山东 济宁

收稿日期：2024年11月15日；录用日期：2024年12月12日；发布日期：2024年12月20日

摘 要

概念是思维的基本单位，数学概念的理解是一切数学思维活动的基石，学生对数学概念理解不充分会导致其它数学活动的实施变得困难。在高中数学教学中，圆锥曲线的概念较为抽象，而椭圆又是学习圆锥曲线的起始，如何合理引导学生学习椭圆及其标准方程至关重要。APOS理论将数学概念学习划分为操作、过程、对象和图式四个环节，旨在通过活动辅助获得数学概念，加深理解。本文基于APOS理论对高中椭圆及其标准方程内容进行了教学设计，探究该理论在教学实践中的可行性，旨在为提升高中数学教学水平提出建议。

关键词

APOS理论，椭圆及其标准方程，教学设计

Teaching Design of Ellipse and Its Standard Equation Based on APOS Theory

Runjia Hao[1], Wensheng Wu[2], Jinrui Guan[1]

[1]School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
[2]Zoucheng No. 1 Middle School, Jining Shandong

Received: Nov. 15th, 2024; accepted: Dec. 12th, 2024; published: Dec. 20th, 2024

Abstract

A concept is the fundamental unit of thought, and the understanding of mathematical concepts serves as the cornerstone for all mathematical thinking activities. Inadequate understanding of mathematical concepts by students can render the implementation of other mathematical activities difficult. In high school mathematics teaching, the concept of conic sections is relatively abstract, and the ellipse marks the beginning of studying conic sections. Therefore, it is crucial to guide students in

文章引用: 郝润佳, 武文胜, 关晋瑞. 基于 APOS 理论的椭圆及其标准方程教学设计[J]. 教育进展, 2024, 14(12): 830-837.
DOI: 10.12677/ae.2024.14122347

learning about ellipses and their standard equations in a reasonable manner. The APOS theory divides the learning of mathematical concepts into four stages: action, process, object, and schema, aiming to facilitate the acquisition and deepening of understanding of mathematical concepts through activities. Based on the APOS theory, this paper designs a teaching plan for the content of ellipses and their standard equations in high school mathematics, exploring the feasibility of this theory in teaching practice. The aim is to propose suggestions for enhancing the teaching quality of high school mathematics.

Keywords

APOS Theory, Ellipse and Its Standard Equation, Concept Teaching

1. 引言

近年来，教育改革随着时代的变化而不断推进，国家出台了众多改进教育质量的政策，同时进行了相应的课程改革，在此浪潮下许多教育理念逐步渗透到中学数学课堂中，数学教学相应取得了一定的效果，当然也面临一些挑战。在教学过程中，数学概念教学往往被认为是可以弱化的教学环节，概念的学习只是为了在解题中作参考，但并不意味着所有学生可以在解题中完成对概念的理解。在高中数学中，椭圆及其标准方程作为圆锥曲线单元的第一课，具有一定的抽象性、代表性，学好椭圆的标准方程对学生后续的学习有很大益处，如何帮助学生完全掌握并将其推广运用到本单元其它知识的学习中是我们该思考的问题。为了解决难题，在课堂教学中引入 APOS 理论，基于该理论对教学进行一定的创新，以求帮助学生达到更好的学习效果，在认知中构建起学生自己的数学知识框架。

2. APOS 理论概述

二十世纪九十年代，美国教育学家杜宾斯基提出了针对数学概念学习的理论——APOS 理论，该理论中 A、P、O、S 四个字母分别代表了四个教学环节：操作(Action)、过程(Process)、对象(Object)和图式(Schema)。APOS 理论是基于建构主义理论发展而来的，故该理论一样强调学生主体地位在数学学习活动中的重要性。张奠宙先生 2004 年发表的《数学教育概论》一文为 APOS 理论做了简要的解释；而后乔连生先生发表的《APOS，一种建构主义的数学学习理论》让我们对 APOS 理论有了更进一步的理解；在了解该理论后，国内数学教育工作者认可了 APOS 理论的实践意义，慢慢将其应用中中小学数学课题中，扩大了对 APOS 理论的研究范围。由于 APOS 理论将学习活动划分为四个具体的可操作性步骤，所以相较于建构主义理论具有更强的执行性[1]。

操作阶段：在学习活动开始的时候教师引导学生进行一些与学习内容相关联的操作或思维活动，增强学生对于数学学习的兴趣，使得数学课堂更加生动、丰富，是后续开展概念教学的关键。在这一过程中，学生参与活动并结合已有的认知经验，从而对数学概念形成初步认知。

过程阶段：学生在本阶段对活动操作过程进行反思，将知识不断内化于头脑中，逐步形成对数学概念的认识，并在教师引导下学会用数学语言概括数学概念。在具体的学习过程中，“操作”和“过程”两个环节往往是同时发生的，学生会在进行操作的过程中同时进行知识的内化。

对象阶段：当从现实情境或直观操作中获得一点对于数学概念的认识后，还需要进一步对其进行加

工和细化，用数学符号加以定义，抽象出数学概念的本质属性，并能够适当运用概念进行一定的运算。

图式阶段：在这一阶段过程当中，学生将新获得的数学概念进行整理、归纳，将其纳入已有的适当的认知结构当中，形成新的数学概念结构，建构起更加完整的数学概念框架。

在学习数学概念的过程中，学生只有经历“活动－过程－对象－图式”四个步骤，才能够逐步加深对概念的理解，进而建构新的认知图式。最开始，绝大多数国外学者将 APOS 理论应用于高等数学教育，很少将其与初等教育和中等教育相结合。近年来，随着研究领域的不断拓展，逐渐将 APOS 理论运用到初等教育和中等教育进行理论研究和实践验证[2]。

3. 基于课程标准的椭圆及其标准方程教学分析

在《普通高中数学课程标准(2017 版)》中对椭圆相关内容的学习要求是：“经历从具体情境中抽象出椭圆的过程，掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质。了解椭圆的简单应用。”[3]相较于对抛物线内容要求的“了解”，明显椭圆内容的“掌握”要求更高，突显出了椭圆在圆锥曲线乃至高中几何内容中的重要性。

通过对近五年的全国高考试卷中椭圆相关考试题目进行分析(见表 1)，容易看出椭圆通常以选择题和解答题的形式出现，且往往与别的知识点相联系进行考察，难度较高，这就导致学生在相关题目上费时费力、不易得分，因此学生对于椭圆的学习任重而道远，其概念作为圆锥曲线这座“大厦”的基石，深刻理解其含义尤为重要。

Table 1. Analysis of exam questions related to ellipses
表 1. 椭圆相关考试题目分析

年份	试卷类型	题目类型	知识点
2024	全国 I 卷	解答题 21	椭圆和直线方程综合
	新高考 I 卷	解答题 16	椭圆和直线方程综合
	新高考 II 卷	选择题 5	特殊点的轨迹方程
2023	全国 I 卷	解答题 20	定点位置证明
	新高考 I 卷	选择题 5	椭圆离心率
	新高考 II 卷	选择题 5	焦点三角形面积
2022	全国 I 卷	解答题 20	椭圆和直线方程综合
	新高考 I 卷	填空题 16	定点与曲线交点距离
	新高考 II 卷	填空题 16	直线与椭圆位置关系
2021	全国 I 卷	选择题 11	椭圆离心率
	新高考 I 卷	选择题 5	定点到椭圆焦点距离
	新高考 II 卷	解答题 20	直线与椭圆位置关系
2020	全国 I 卷	解答题 20	椭圆和直线方程综合
	新高考 I 卷	解答题 22	直线与椭圆位置关系
	新高考 II 卷	解答题 21	点到直线距离

4. 椭圆及其标准方程教学设计

4.1. 学情分析

圆锥曲线在高中数学内容中属于一大板块，而椭圆属于圆锥曲线中最重要的部分之一。学生在学习椭圆内容之前已经学过了曲线与方程、圆的方程等内容，具有一定的数形结合能力，能够将代数与几何

相结合解决一些问题；其直观想象、数学运算素养也经历了一定的发展，具备一定的逻辑推理能力。

4.2. 教学目标

学生在经历椭圆的生成过程情境后，能够理解椭圆的定义，了解椭圆标准方程的推导过程，能够熟练运用椭圆的定义和标准方程解决简单问题；在椭圆定义的生成过程中，渗透数形结合思想、转化思想，学生能够自己说出椭圆的定义，明白 a，b，c 之间的关系，提高学生的思维能力，为后续学习椭圆的性质以及双曲线、抛物线打下基础[4]。

在学习椭圆定义及其标准方程的过程当中，调动学生学习数学的积极主动性，激发学生的数学学习兴趣，培养学生的团队精神，提高学生的合作交流能力。

教学重点：学会利用坐标法求解几何代数相关问题，理解椭圆的生成过程及定义，掌握椭圆的标准方程并且能够一定程度上应用。

教学难点：椭圆的焦点的位置判断，a，b，c 之间的关系以及灵活应用标准方程。

4.3. 教学过程设计

4.3.1. 环节一：操作阶段

【活动 1】某位同学家正在装修，需要设计一个椭圆形的安装吊灯的轮廓，装修师傅该怎么样在房顶上画出一个完整的椭圆呢？

教师引导学生在纸上绘画椭圆：在纸上找到两个固定点(控制好距离)，钉上两颗图钉，将一条细绳的两端分别固定在点上，取一支铅笔将细绳拉紧，缓慢在纸上移动铅笔并观察勾勒出的轨迹。得到一个椭圆轨迹。

【活动 2】为了验证画出的图形确是椭圆轨迹，教师借助几何画板工具演示椭圆的生成过程，具体步骤如下：

1) 按住 Shift 键，用“面直线”工具在屏幕的上方画一条直线 AB，在直线 AB 上构造一点 C (使得 C 在 AB 之间)；

2) 按住 Shift 键，用“画线段”工具在直线 AB 的下面画一线 DE，使 DE 的长度小于线段 AB 的长度(估计即可，不必度量)；

3) 选中点 A 和 C，构造线段 AC；以点 D 为圆心，线段 AC 为半径构造圆 c_1；

4) 选中点 B 和 C，构造线段 BC；以点 E 为圆心，线段 BC 为半径构造圆 c_2；

5) 作出圆 c_1 和 c_2 的两个交点 M，N；

6) 画出线段 MD 和 ME；

7) 分别追踪点 M 和 N，移动点 C，观察轨迹，得到椭圆的轨迹方程(如图 1)。

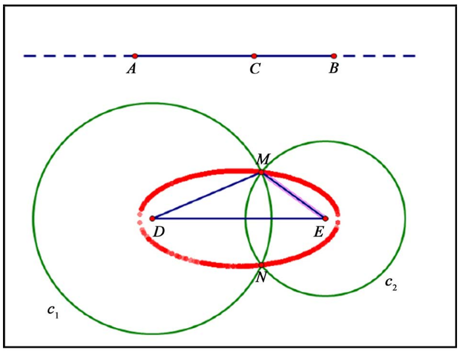


Figure 1. Equation of path
图 1. 轨迹方程

学生通过亲自动手操作以及观察几何画板制作椭圆的过程，发现画出的图形是即将学习的椭圆。

设计意图：以生活中的有趣现象引入课题，意在向学生渗透数学文化，激发学生的学习兴趣并使其感受到生活与数学的联系；提问引发学生思考，使学生处于想知道但又无从回答的状态，引起认知冲突和探索欲望。以具体的活动为课堂载体，让学生在做中学，经历椭圆的形成过程，积累获得椭圆的基本活动经验、同时给学生一个自主探究学习的机会，对椭圆的理解更加深入。

4.3.2. 环节二：过程阶段

【活动 3】组织学生对刚才作图过程中的操作步骤进行讨论，描述有哪些量是不变的、哪些量是变化的。

经过小组讨论得出两固定图钉之间的距离是不变的，细绳的长度也是固定不变的，即笔尖到两固定点的距离之和是不变的；笔尖的位置是不断变化的。

【活动 4】教师提问：那么两个定量之间有什么关系吗？

经过引导学生可以得出笔尖到两定点的距离之和比两个定点之间的距离要大(三角形两边之和大于第三边)。如果两个定量相等或者定点距离比笔尖到两点距离之和大的话便得不到椭圆轨迹。

组织学生小组讨论，初步得出椭圆轨迹的结论：一个动点到两定点的距离之和是一个常数，这个动点的轨迹就是椭圆。

【活动 5】经过学生充分思考讨论，教师给出椭圆标准定义：平面内到两定点的距离之和等于常数(大于两定点之和)的点的轨迹叫做椭圆。这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离叫做椭圆的焦距。

设计意图：在操作活动获得一定经验的基础上，教师引导学生对刚刚进行的实践活动进行思考、归纳，通过学生之间的实际操作和相互讨论，能够用口头语言描述出椭圆的几何特征，提升学生的交流能力以及实践能力[5]。遵循理论联系实际的原则，要扣教学内容、遵循教学目标，数学归根到底是来源于生活，故不能完全脱离生活实际而只进行抽象的数学教学。

4.3.3. 对象阶段

【活动 6】现在我们有了椭圆的初步定义，那么该怎样得到椭圆的标准方程呢？令两个定点为 F_1，F_2，两定点距离为 $2c$，设动点到两定点距离之和为 $2a$，类比圆的标准方程生成过程，组织学生讨论如何得到椭圆的标准方程。

讨论过程中提示学生：求椭圆的标准方程类比圆的标准方程，归根结底是求动点的轨迹方程，所以首先要设动点 $M(x,y)$，根据定义动点到两定点的距离之和为定值(即 $2a$)，运用两点间距离公式列出方程。

【活动 7】结束讨论并邀请学生上台进行椭圆标准方程的板演：

设 $M(x,y)$，由已知得 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，由定义得 $|MF_1|+|MF_2|=2a$

根据两点间距离公式得：$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$

移项得到：$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

平方得到：$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

整理得：$4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

约分、再平方得：$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)$

再整理得：$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=\left(a^2-c^2\right)a^2$

方程两边同时除以$\left(a^2-c^2\right)a^2$得：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$。

教师提问：经过同学们的计算，我们现在得到了一个椭圆的方程式，那么这个方程式中的a^2和c^2可以相等吗？那我们怎样整理可以使这个方程式变得更加简洁呢？

引导学生回顾课堂开始时的绘制椭圆活动，可以得到a比c大，所以a^2和c^2不能相等，故$a^2-c^2>0$，不妨设$b^2=a^2-c^2$，使得方程式更加整洁便于记忆：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。这就是焦点位于$x$轴上的椭圆的标准方程。

a、c的大小关系确定，同样根据$b^2=a^2-c^2$，b、c的大小关系可以确定吗？经引导学生可得出其大小关系不能确定的结论，只知道a是最大的。

【活动8】教师提问：a，b，c三个量在椭圆中分别有什么几何意义呢？

引导学生探究得出：因为焦距为$2c$，所以c代表焦点到原点的距离；再通过计算可得椭圆与x轴的其中一个交点为$A\left(-a,0\right)$，也就是说A到原点的距离为a；同理可得椭圆与y轴的交点$B\left(0,b\right)$到原点的距离为b，且a，b，c三个量之间满足勾股定理，所以可得到一个特殊的直角三角形，如图2所示。

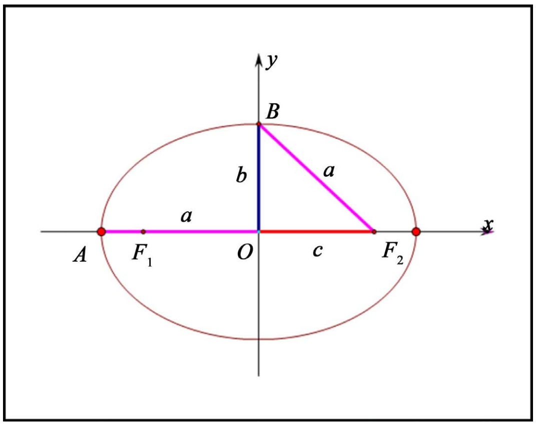


Figure 2. Special triangles in an ellipse
图2. 椭圆中的特殊三角形

【活动9】在学习完椭圆焦点位于x轴上的椭圆的标准方程之后，请同学们类比推理出焦点在y轴上的椭圆的标准方程。组织学生讨论、探究，由学生自己推导出焦点在y轴上的椭圆的标准方程，过程中教师进行引导、纠错，最后得出方程：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$。

【活动10】教师追问：那么焦点在x轴上和y轴上的椭圆标准方程有什么区别与联系吗？

引导学生得出结论：两种方程形式相同，但x^2，y^2的分母不一样，所以焦点在哪个轴上所对应的分母就比较大。

【活动11】完成例题：求椭圆的标准方程，使其符合以下条件

1) 焦点坐标为$\left(-4,0\right)$和$\left(4,0\right)$，椭圆上任意一点到两个焦点的距离之和为12。

2) 经过点$\left(3,1\right)$，焦距为6。

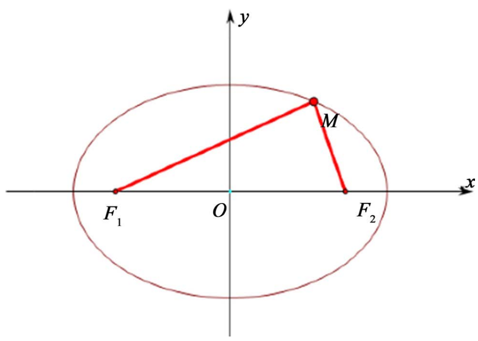
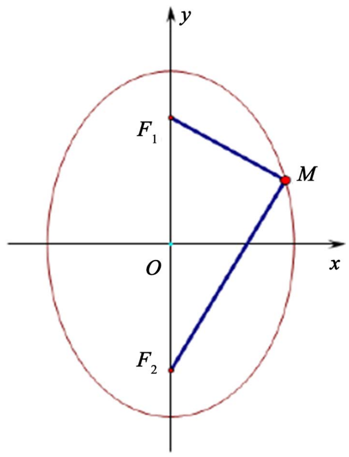
设计意图：这一阶段，学生在教师的引导下共同探究椭圆的标准方程，基于椭圆定义亲自探索、化简，逐步用符号定义椭圆，从而加深对椭圆定义及标准方程的理解。后通过教师的追问对所得到的两种椭圆标准方程进行辨析，在这一过程中加深学生对方程本质的理解和记忆，提升学生观察分析、类比归

纳的能力[6]。最后以一道例题结束本环节教学活动，再一次加强了学生对于本节课知识的理解，并且通过问题讨论提升学生的交流能力，帮助学生提升数学学科素养，从中发现数学的美与价值。

4.3.4. 图式阶段

【活动 12】目前对椭圆的两种标准方程都进行了推导，那么这两种椭圆方程之间有什么区别与联系呢？请同学们互相讨论完成如下表 2。

Table 2. Conceptual framework diagram of an ellipse
表 2. 椭圆的概念框架

定义	平面上到两个定点 F_1，F_2 之间的距离之和为常数(大于 $\lvert F_1F_2\rvert$)的点的轨迹	
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
焦点	$F_1(-c,0)F_2(c,0)$	$F_1(0,c)F_2(0,-c)$
a，b，c 的关系	$a^2=b^2+c^2$ a 最大，b 与 c 的大小不确定	
焦距	$2c$	
焦点位置判断	看 x^2，y^2 的分母大小：哪个分母大焦点就在哪个轴上	

经历填写表格的过程，学生对于椭圆基础知识有了一定的框架概念。

【活动 13】教师提问：我们回顾椭圆的生成过程：一个动点到两个定点的距离之和等于定值，那么我们之前是否学习过类似的概念的生成过程呢？教师引导学生回顾圆的标准方程的生成过程，学生发现圆与椭圆的标准方程生成过程极为相似。

教师继续引导学生回顾得到圆的标准方程之后研究学习了什么内容，即圆与直线的位置关系、圆与内接图形的代数关系等内容，由此学生大胆猜想有关椭圆后续要学习的内容可能有哪些。

设计意图：在这一阶段，教师引导学生将两种椭圆方程的异同进行了对比并进行总结，帮助学生加强理解记忆椭圆标准方程；在活动 13 中，由教师的提问勾起学生学习圆的标准方程的回忆，学生自觉将二者进行对比学习，有利于学生建构新的知识结构，将椭圆纳入原来的认知结构中并推测后续学习内容，有利于整个圆锥曲线知识结构的构建及几何代数部分的知识构建。

5. 基于 APOS 理论的教学建议

5.1. 基于学生认知设置情境与活动

高中阶段的学生具有一定的思维方式和认知水平，所以在进行教学时要依据特点合理设置。首先应该以学生为中心，了解学生的兴趣和需求，从而更好地设计课堂情境。在本节课中，以“装修”实际情景入手，与学生生活相联系但又创造了认知冲突，提高了学生的兴趣。其次在教学过程中应该把握重难点，突出重要内容，例如椭圆标准方程要把握其定义的生成与标准方程的推导过程[7]。

5.2. 强调学生自主探究与思考

APOS 理论强调学生在课堂中参与活动、自主探究能力。在课堂中我们可以采取探究性学习、启发式等教学方法帮助学生思考，突出学生的主体地位，从而提升其创新意识和解决问题的能力。在椭圆标准方程教学课中，教师引导学生讨论椭圆是如何生成的，经过思考与试错，学生逐步理解椭圆的定义，为后续化简椭圆标准方程提供了一定的思路。

5.3. 辅助学生归纳总结知识结构

在 APOS 理论的图式阶段，学生需要通过教师的引导进行反思、归纳、总结等方式建立起对数学概念的完整认识，在原有认知结构的基础上构建出新的数学知识框架。本节课教学中学生通过填写教师给出的两种椭圆标准方程的表格，进行对比，从而对知识内容理解更加深刻，而后与圆的定义及标准方程的生成相联系，为后续代数几何的大知识框架构建做了铺垫[8]。

6. 结语

综上所述，APOS 理论对于椭圆的标准方程的创新教学具有重要的理论及实践意义，通过具体的教学设计，验证了该理论在教学中的可实施性，体现了其在帮助学生深入理解以及建构数学知识框架过程中的重要性。基于 APOS 理论进行数学概念的教学会帮助教师和学生取得教法、学法上的进步，由此可见，在今后应该更进一步结合 APOS 理论进行数学概念的教学。

基金项目

太原师范学院基础教育教学改革项目(YJSJCJY-2320)，山西省科技创新人才团队专项资助(202204051002018)。

参考文献

[1] 王婷. 基于 APOS 理论的高中椭圆概念教学研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨师范大学, 2023.
[2] 李成. 基于 APOS 理论的圆锥曲线概念教学研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2019.
[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2017.
[4] 李莹. 基于 APOS 理论的椭圆方程的教学设计[J]. 中小学数学(高中版), 2023(12): 4-7.
[5] 单泽辉. 基于 APOS 理论的圆锥曲线概念教学设计研究[D]: [硕士学位论文]. 济宁: 曲阜师范大学, 2024.
[6] 孙红, 翟洪亮. 基于 APOS 理论的椭圆概念教学实践分析[J]. 中学数学研究, 2023(4): 11-15.
[7] 吴为丹. APOS 理论在初中数学概念教学中的运用策略研究[J]. 数理化解题研究, 2024(8): 55-57.
[8] 朱怡祺, 喻平. APOS 理论对中学数学教学的启示[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2023(5): 8-14.