

复变函数课程思政探析与实践

董巧丽

中国民航大学理学院, 天津

收稿日期: 2024年11月22日; 录用日期: 2024年12月20日; 发布日期: 2024年12月27日

摘 要

复变函数是数学专业的一门专业主干课程, 是数学物理方程等课程的基础。本文以从实变函数到复变函数的科研启示、复变函数闭曲线积分和洛朗级数为切入点, 挖掘课程思政元素, 将数学知识的学习与科研、人生的发展等方面相联系, 把思政工作融入到教学过程中, 实现知识传授、能力培养和价值引领相统一。

关键词

复变函数, 课程思政, 闭曲线积分, 留数定理

Analysis and Practice of Ideological and Political Work in Complex Function Course

Qiaoli Dong

School of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin

Received: Nov. 22nd, 2024; accepted: Dec. 20th, 2024; published: Dec. 27th, 2024

Abstract

Complex function is a core course in mathematics and the basis of courses such as mathematical physics equations. This paper takes the scientific research inspiration from real variable functions to complex variable functions, closed curve integrals of complex variable functions and Laurent series as the starting point, explores the elements of ideological and political work in the course, connects the learning of mathematical knowledge with scientific research and life development, integrates ideological and political work into the teaching process, and realizes the unity of knowledge transfer, ability cultivation and value guidance.

Keywords

Complex Function, Ideological and Political Work in the Course, Closed Curve Integrals, Residue Theorem

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

复变函数[1]课程是大学数学专业学生的专业主干课程,是数学分析课程的延续拓展,也是数学物理方程等后续课程的理论基础。课程的主要内容是复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数、孤立奇点、留数及共形映射等,课程具有高度抽象性和复杂性,导致很难将其与思政内容结合,给课程思政融入教学带来极大的挑战。需要教师深刻理解专业知识,有较广的知识面,恰当挖掘思政点,将思政内容自然而隐性地融入教学内容,力求思政元素与教学内容无缝衔接。

近年来,出现了一些有关复变函数课程的思政元素挖掘的文章[2]-[4],这些论文探讨了一些数学家的事例,以激发学生的爱国热情和文化自信,也研究了一些可以结合思政的教学内容,激励学生的探索精神和创新精神。本文从不同的知识点入手,结合多年教学经验,从三方面探讨其中的思政元素。

2. 从实变函数到复变函数的科研启示

复变函数离不开复数域,复数域是实数域的推广或拓展,而复变函数的定义域和值域都是复数域,因此复变函数比实变函数更为复杂。对比复变函数与实变函数的关于极限、连续、导数、积分、级数展开的概念会发现,有很多相似的地方,比如,他们的定义和一些性质。也有很多不同之处,比如,判断复变函数的极限和连续可以转化为判断两个二元实变函数的极限和连续;判断复变函数是否可导需要判断两个二元实变函数是否可微,偏导数关系是否满足柯西-黎曼方程;除了泰勒展开外,复变函数还有洛朗展开。

借助从实变函数到复变函数的发展历程,启发引导学生如何做科研。对一个概念或定义进行推广或拓展时,开始往往将原来的结论进行直接推广,但新的概念或定义肯定有其独特之处,有其立足之地,需要从这一点出发做研究,才能做出真正原创性的成果。柯西原本基于实变函数积分的定义和性质研究复变函数积分的性质和计算方法,但随着研究的深入,他逐渐认识到复变函数的独特性,转而从复变函数本身出发研究其积分,最终提出了柯西积分公式和留数定理。最近应用数学的一个新兴领域是张量研究,张量是矩阵的高维推广,张量的概念提出之后,学者们热衷于将矩阵中的概念和性质推广到张量。但随着研究的深入,数学家认识到张量和矩阵有本质的区别,譬如,张量的分解和矩阵的分解差别非常大,然而,也正是这些区别,导致了张量在图像、化学和材料中的广泛应用。

从实变函数到复变函数的变化可以看作函数范围的扩大。类似地,人们也在不断地成长,从小学、初中、高中,到大学、研究生、出国深造、名校访问等人们的知识结构和专业素养在不断提升。有些知识和过往的知识类似,譬如从小学数学到中学数学;而有的是全新的,譬如从中学数学注重计算和解题技巧,而大学数学更注重抽象思维和逻辑推导。引导学生认识到人要随着自己的成长,扩大认知,适应新环境,这对完善自我、就业创业都有帮助。

3. 复变函数闭曲线积分所蕴含的思政元素

在复变函数中,针对复变函数闭曲线积分,首先给出了柯西-古萨基本定理,接着将其推广,提出

了闭路变形原理和复合闭路定理。从闭路变形原理，可以看出复变函数闭曲线积分只与被积函数在闭曲线内的奇点相关，而复合闭路定理将一个闭曲线内有有限个奇点的闭曲线积分问题，变为一个闭曲线内有一个奇点的闭曲线积分计算，也就是把复杂问题变简单。进而给出了只含有一个奇点的闭曲线积分的计算方法，即，柯西积分公式和高阶导数公式。柯西积分公式和高阶导数公式只能计算两类特殊的积分(这两类积分也可以看成一类)，因此并未彻底解决闭曲线积分的计算问题。留数从孤立奇点及其洛朗级数出发，给出了所有类型的孤立奇点处计算留数的方法，也就是给出了闭曲线内只有一个奇点时，计算复变函数闭曲线积分的统一方法。结合复合闭路定理给出了留数定理，彻底解决了闭曲线内有有限个奇点时复变函数闭曲线积分的问题。

从复变函数闭曲线积分计算的发展过程可以看到，科学进展是曲折的。柯西在复积分的计算方面做了很多工作，最著名的是提出了柯西积分公式，但是如前所述，柯西积分公式并没有解决所有的闭曲线复积分。直到 1846 年柯西给出了关于沿一条任意闭曲线积分的新叙述：如果曲线包围一些极点，那么积分值是函数在这些极点上留数之和的 $2\pi i$ 倍。这里我们可以引导学生用发展的观点看问题，了解科学研究要有不畏艰难、坚持不懈的科研精神。

留数定理在定积分计算上的应用介绍了用留数计算三类一元实函数定积分问题，可以给出统一的计算公式，相比数学分析中的方法，这些公式更容易。利用留数计算一元函数定积分，相当于在更高的观点下看一元函数定积分。而要想更好掌握留数方法，需要复变函数相关的知识。人生往往也是如此，站得高才能看得远，即所谓的“会当凌绝顶，一览众山小”。借此引导学生要不断努力学习，勇攀科学高峰。

4. 洛朗与洛朗级数

Table 1. Ideological and political teaching content and expected goals of complex function course
表 1. 复变函数课程思政教学内容与预期目标

教学章节	教学内容	专业与思政元素融合案例	预期目标
复数与复变函数	在课程引言部分介绍黎曼、柯西、笛卡尔、欧拉以及高斯等数学家对复变函数发展的贡献。	介绍实复变函数发展过程中起关键作用的代表性数学家，弘扬数学家追求真理的精神。	启发学生对科学现象的“好奇”和探索的欲望，培养学生持之以恒、攻坚克难的科研精神。
初等复变函数	讲述复变初等函数与实变初等函数的区别，指出复指数函数是周期函数，而实指数函数是单值函数，复对数函数是多值函数，而实对数函数是单值函数等。	不断学习科学知识，才能拥有完整系统的知识体系。	培养学生做学问要有严谨的科研精神，要以发展的眼光看待事物和规律。
柯西 - 古萨基本定理，柯西积分公式	数学家柯西在数学史上的地位仅次于欧拉，留下了丰富的学术遗产，他的名字与诸多定理和准则一同被镌刻在数学教材的篇章之中。他在复变函数中主要贡献是给出了柯西 - 古萨基本定理和柯西积分公式。	介绍柯西一生对学术的执着追求和不懈努力，以及他的临终遗言“人总是要死的，但是，他们的业绩永存。”	培养学生追求真理、崇尚创新、实事求是的科学精神，增强学生将来科技报国的家国情怀和使命担当。
留数	介绍留数的定义及留数定理，并将其与第三章中积分公式进行对比，揭示闭曲线上的复积分与被积函数在闭曲线内奇点紧密相关。	留数的定义和留数定理统一了闭曲线上复积分的复合闭路定理、柯西积分公式和高阶导数公式，完美解决了闭曲线积分的计算。	培养学生的创新思想以及从本质出发解决问题的能力。
共形映射	介绍复变函数的导数与转动角、伸缩率的关系。解析函数的共形映射从几何直观说明解析函数具有的良好性质，即保角性和保伸缩率不变性。	解析函数的导数是其内在分析性质，而映射是这一性质的几何直观。	引导学生用联系的观点，结合内在性质和外在表现看问题。

洛朗级数是圆环域内解析的复变函数的无穷幂级数展开，它是泰勒级数的推广，以法国数学家皮埃尔·阿方斯·洛朗(Pierre Alphonse Laurent)的名字命名。洛朗是一流的军事家和土木工程师，在勒阿弗尔从事建筑项目时，他开始写第一篇数学论文。1843年，洛朗提交了一篇研究报告，申报法国科学院大奖，在此报告中洛朗级数首次出现。但是由于他提交的研究错过了最后期限，他的研究成果没有被发表，也没有获奖。之后他的论文多次被柯西推荐发表，但他在世期间从未发表。由于对他的论文未能发表感到失望，洛朗转而研究光波理论，特别是光偏振理论。洛朗在从事艰巨的工作之余，一直从事数学研究，发表了大量的论文。可以通过洛朗的故事培养学生追求真理、崇尚创新、实事求是、永不放弃的科学精神，增强学生将来科技报国的家国情怀和使命担当。

笔者在教学实践中依据课程教学大纲，围绕理念育人和思想育人等思政目标，在课程教学内容中有机融入了洛朗凭借非凡毅力取得杰出成就等八个典型课程思政案例，见表1。

5. 结束语

在复变函数这门课程中，还有很多的思政元素可以挖掘，需要寻找教学内容与思政元素的合理切入点，精心设计课程思政教案，在专业知识传授过程中融入爱国情怀、文化自信等理想信念层面的精神指引，让思政教育自然而然地融入复变函数教学中。

基金项目

本论文受到中国民航大学教育教学改革与研究项目(CAUC-2023-B1-049)和天津市普通高等学校本科教学质量与教学改革研究计划项目(B231005907)的资助。

参考文献

- [1] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [2] 牛英春, 张天宇. 思政元素在《复变函数论》混合课改中的应用[J]. 当代教育实践与教学研究, 2019(6): 204-205.
- [3] 阮世华, 林美琳. 工科复变函数课程思政教学探索与实践[J]. 创新创业理论研究与实践, 2022(2): 37-39+46.
- [4] 张伟伟. 《复变函数论》课程思政元素探析[J]. 潍坊学院学报, 2023(23): 7-8.