

数学文化融入高等代数教学的探索与实践

孙菊香¹, 庄闪闪², 孙跃娟¹

¹商丘师范学院数学与统计学院, 河南 商丘

²商丘市文化路小学数学教研室, 河南 商丘

收稿日期: 2024年11月1日; 录用日期: 2024年11月29日; 发布日期: 2024年12月9日

摘要

高等代数是高等院校的数学各专业的专业基础课。本文结合具体教学实践, 从数学史、数学情景创设、数学美等方面探讨如何将数学文化有效地融入到高等代数的课堂教学中, 从而增强学生的学习内驱力, 更好地培养他们的数学素养和综合素质。

关键词

数学文化, 高等代数, 数学史, 数学美

Exploration and Practice of Integrating Mathematical Culture into Advanced Algebra Teaching

Juxiang Sun¹, Shanshan Zhuang², Yuejuan Sun¹

¹School of Mathematics and Statistics, Shangqiu Normal University, Shangqiu Henan

²Mathematics Teaching and Research Office, Shangqiu Culture Road Primary School, Shangqiu Henan

Received: Nov. 1st, 2024; accepted: Nov. 29th, 2024; published: Dec. 9th, 2024

Abstract

Advanced algebra is a fundamental course for mathematics majors in universities. In this paper, based on specific teaching practices, we will explore how to effectively integrate mathematical culture into the classroom teaching of advanced algebra from the aspects of incorporating mathematical history, creating mathematical scenarios, and appreciating mathematical beauty, in order to enhance students' intrinsic motivation for learning and improve cultivate their mathematical literacy and overall qualities.

Keywords

Mathematical Culture, Advanced Algebra, Mathematical History, Mathematical Beauty

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

高等代数是高等院校的数学各个专业的专业基础课，包含多项式理论、线性方程组，线性空间及变换等涉及大量公理化的概念和结论，其特点为内容抽象、理论性强。通过高等代数的学习，学生不仅能获得抽象代数、常微分方程、多元统计分析等后继课程所需要的数学知识、数学方法和数学思想，而且能提高抽象思维能力、逻辑思维能力以及分析和解决问题的能力。然而，目前教学现状和教学效果却不尽人意，多数学生感觉高等代数课枯燥无比，丝毫提不起兴趣。究其原因，笔者认为教师没有将数学文化有效融入高等代数的课堂教学，使得学生缺乏学习的内驱力。什么是数学文化？南开大学顾沛教授认为，所谓的数学文化主要指数学的思想、精神、方法、观点、语言，以及它们历史中的形成和发展，包括数学家、数学史、数学美、数学教育等方面[1]。在教学中融入数学文化不仅能有效提高学生的数学素养和综合素质，而且可以激发学生的学习兴趣和创造力，提高他们的逻辑思维能力和问题解决能力。本文从数学史、数学情景创设、数学美等方面探讨了如何有效地将数学文化融入到高等代数课堂教学中，从而激发学生的学习兴趣，提高课堂教学效果。

2. 如何将数学文化融入高等代数教学

2.1. 将数学史融入课堂教学，激发学生学习的热情

数学史是人类在数学研究与探索道路上奋进的历史，不仅包含着许多数学家们在攀登数学高峰时克服困难的事迹和爱国情操，也包含着许多重要的数学思想及方法。法国著名的数学家庞加莱说：“如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门学科的历史和现状。”如果在教学过程中适当融入数学史的教育，介绍数学概念的提出和理论的发展并不是一蹴而就、一帆风顺的，而是一个反复的过程，这不仅可以使学生全面了解相关知识的提出、发展和演变过程，有利于学生对相关知识的理解、掌握和应用，也增强学生学习数学的内驱力，激发学生攀登科学高峰的热情。例如在讲到中国剩余定理时，可以给学生介绍这个在数学学科中唯一的以国家命名的定理的起源、发展和应用。中国剩余定理，又称“孙子定理”，最早可追溯至南北朝时期数学著作《孙子算经》中的一个著名的“物不知数”问题及其解法，此后中国剩余定理得到了进一步的发展和完善。南宋时期的数学家秦九韶的著作《数书九章》中，详细阐述了求解一次同余式组的方法即“大衍求一术”至少比西方早 600 年。在讲到多项式函数的根的性质及其计算时，可以为学生介绍数学家秦九韶和他的秦九韶算法；在讲到解线性方程组的消元法时，应指出线性方程组及其相关解法早在东汉时期的数学巨著《九章算术》中就出现了解线性方程组的需求，并给出了消元法，而西方直到十九世纪才有高斯给出此方法，但是此方法被西方称为“高斯消元法”，这是一个值得大家思考的问题。在讲到矩阵运算时，可以为学生介绍华罗庚先生在数学上尤其在矩阵论上的贡献及以华罗庚先生的名字命名的等式即“华罗庚等式”。在课堂教学中引入这些数学史料不仅丰富了教学内容，加深学生对数学知识的理解，加强学生对中国文化自信，增强了学生的民族自豪感，厚植

爱国情怀。

2.2. 创设数学情境，培养学生的数学应用意识

创设数学情景是将数学文化融入课堂教学的有效途径之一。在新课导入环节创设情景，不但能开拓学生的视野，而且可以去激发学生的学习兴趣使其快速进入学习状态。例如，在可逆矩阵的新课导入环节教师就可以根据可逆矩阵在矩阵加密中的应用创设情景引入课题。在课中创设情景将抽象的代数概念与现实生活相联系，能让学生加深对知识的理解和掌握的同时，培养他们的应用意识。例如，在讲到线性变换这一抽象概念的定义时，教师可以把图像处理中的旋转、缩放、平移、对称变换等操作为例子[2]。通过动画展示图像在线性变换前后的对比，让学生直观感受到线性变换的效果，使得抽象概念具体化、形象化。在讲到矩阵的特征值和特征向量时，教师可以从2020年5月5日广东虎门大桥的桥梁的涡振现象切入[3]，介绍桥梁的涡振现象与矩阵的特征值和特征向量的关系，突出矩阵的特征值和特征向量在桥梁、高层建筑等建造中的应用。

2.3. 将数学美融入教学，提高学生的美学素养

华罗庚说：“认为数学枯燥乏味的人，只是看到了数学的严谨性，而没有体会到数学的内在美。”所谓的数学美是指数学思维、数学理论、数学知识所蕴含的世界和自然之美的集中体现。顾沛教授将数学美分成简洁美、统一美和对称美[4]。高等代数的看似冷冰冰的概念、公式和结论的背后恰恰蕴含了数学的全部的美。

简洁美旨在概念、公式和结论的表达形式和结构体系简洁[4]。高等代数中许多概念、公式甚至定理推导中都蕴含简洁的性质，呈现出简洁美。例如可逆矩阵判定定理：一个 n 阶方阵 A 可逆的充要条件是(A 的行列式不等于0)[5]；线性方程有解判定定理：非齐次线性方程组 $AX=b$ 当且仅当 $r(A)=r(A,b)$ ，其中， $r(A)$ 表示系数矩阵 A 的秩[5]；复数域上一个的 n 级方阵 A 可对角化的充要条件 A 的最小多项式无重根[5]等等，这些结论形式简单明了。在授课时，教师引导学生体会它们蕴含的数学之美的同时，引导他们通过分析比较抓住关键因素，去掉多余条件，将数学概念和结论简洁化。例如在教材上欧式空间的正交变换的定义为：设 σ 为欧式空间 V 的一个变换，若 σ 满足以下条件：(1)保持加法；(2)保持乘法；(3)保持内积，则称 σ 为欧式空间 V 的一个正交变换[5]。在讲授时，教师可以引导学生根据欧式空间内积的性质由上述的条件(3)推出条件(1)和(2)，使得正交变换的定义变成：欧式空间上保持内积的变换称为正交变换。这样不仅简化了定义，而且与中学几何中所学到“正交变换”统一起来。

数学的统一美是数学的概念、公式和定理之间存在着内在的联系和和谐统一的美[4]。首先数学的统一美体现过程与结论的统一，动态与静态的统一。典型里的例子就是利用矩阵初等变换判断矩阵之间的等价、合同和相似之间的关系，以及利用初等变换计算矩阵的秩、可逆矩阵的逆和矩阵方程的解等等。其次，数学的统一美体现在不同的线性空间的同构上。作为线性空间之间的一种等价关系，同构能把表面上看起来没有任何关系的线性空间、线性子空间等对应统一起来。例如设 V 是数域 P 上的一个 n 维线性空间。人们通过同构既可以将 V 与具体线性空间 P^n 对应起来，又可以将 V 的对偶空间与数域 P 上的 $M_n(A)$ （由数域 P 上的 n 阶方阵关于矩阵的加法和数量乘法构成的线性空间）统一起来。这样我们可以利用具体的线性空间 P^n （或 $M_n(A)$ ）去研究抽象空间 V 及其对偶空间。再次，统一美体现在不同概念的对应上。例如人们可以通过二次型 X^TAX 与其矩阵 A 对应建立 n 元二次型与 n 阶对称矩阵、(半)正定二次型与(半)正定之间的桥梁。在教学中，充分调动学生的主观能动性，应引导学生发现知识间的统一性，利用具体、熟悉的知识去探索未知、抽象的事物。

高等代数的对称美，深植于其理论结构与实际应用之中。它体现在公式和定义中，例如对称矩阵的

定义 $A^T = A$ 可逆矩阵的定义 $AB = BA = E$ ，正交矩阵的定义 $A^T A = AA^T = E$ ，对称变换、正交变换等定义以及矩阵之间的等价、相似和合同的定义及其反身性、对称性、传递性等，都展现出一种和谐与平衡之美。这些公式和概念的对称不仅能吸引学生的注意力方便学生记忆公式，而且利用对称性解决问题往往出现事半功倍的效果。

高等代数蕴含的数学之美，既有简洁美又有统一美和对称美。在教学中，引领学生去体味、认识和应用抽象的概念和理论的背后所蕴含的美学元素，培养学生提高数学素质的重要途径和手段。

3. 结论与建议

数学文化是数学学科核心素养的重要组成部分。在高等代数的课堂教学中融入数学文化不仅能提高教学质量，还能提高学生的学习数学兴趣。作为教师，我们应通过阅读相关文献、参加相关研讨会等提升自身的数学文化素养，不断挖掘高等代数课程内容中所蕴含的文化元素，结合学生的兴趣点融入到课堂教学中。

基金项目

1) 2023 年商丘师范学院基础教育教学研究项目“数学文化融入中学数学教学实践与探究”(2023-jcjyyb-17); 2) 2023 年商丘师范学院基础教育教学研究项目“双减背景下中学数学分层作业设计实践研究”(2023-jcjyyb-16)。

参考文献

- [1] 顾沛. 数学文化[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [2] 刘爱兰. 理工科专业课的课程思政教学实践[J]. 中国电力教育, 2021(S1): 217-219.
- [3] 范莉霞, 陈明. 线性代数课程思政教学的案例探索与实施[J]. 嘉兴学院学报, 2022, 34(6): 125-129+140.
- [4] 顾沛. 从美育的角度看南开大学的数学文化课[J]. 中国大学教学, 2016(6): 12-14+30.
- [5] 北京大学数学系前代数小组编. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.