

线性代数课程思政的研究 ——以可逆矩阵为例

彭 晨

成都大学计算机学院, 四川 成都

收稿日期: 2024年11月5日; 录用日期: 2024年12月4日; 发布日期: 2024年12月12日

摘要

本文研究线性代数课程思政。线性代数既属于公共基础课, 也属于理学课。本文从线性代数不同课程属性出发, 研究了课程思政的建设方法。提出可逆矩阵的教学案例, 分析教学案例中的思政元素。教学案例能够培养学生的科学思维, 提升学生的综合素质。本文旨在运用思政元素, 提升线性代数课程协同育人效果, 达到立德树人的目的。

关键词

线性代数, 课程思政, 数学史, 可逆矩阵

Study on the Ideological and Political Elements in College Course of Linear Algebra —A Case Study on the Invertible Matrix

Chen Peng

College of Computer Science, Chengdu University, Chengdu Sichuan

Received: Nov. 5th, 2024; accepted: Dec. 4th, 2024; published: Dec. 12th, 2024

Abstract

This paper studies the Ideological and Political Education in course of linear algebra. The course of linear algebra belongs to both the common basic course and the course of mathematics. Based on the different attributes of the course, this paper studies the method of the Ideological and Political Education of the linear algebra curriculum. The paper introduces the teaching case of invertible matrix and analyzes the ideological and political elements in this teaching case. The teaching case can cultivate students' scientific thinking and improve their comprehensive quality. The purpose of

this paper is to improve the collaborative education effect of this course through the application of ideological and political elements of linear algebra, so as to achieve the purpose of cultivating people.

Keywords

Linear Algebra, The Ideological and Political Education in ALL College Courses, History of Mathematics, Invertible Matrix

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

线性代数是高等院校中理、工、农、经济和管理等专业的公共基础课程。一般在大学一年级开设，授课主要面向大一新生。线性代数也是一门数学类课程，内容围绕线性方程组展开。据统计，超过四分之三的科学的研究和工程应用中的数学问题，都要应用到线性方程组[1]。线性代数在信息检索、信号处理、图像处理、飞行器定位等高新技术中得到广泛应用。线性代数还是矩阵论、解析几何、常微分方程、泛函分析等理工类研究生课程的数学基础。

为新时代中国特色社会主义事业培养优秀的建设者和可靠的接班人是高等教育的根本任务。高校人才培养的成效，影响国家的长治久安，影响民族复兴和国家崛起。2016年12月，习近平总书记在全国高校思想政治工作会议上强调：“要坚持把立德树人作为中心环节，把思想政治工作贯穿教育教学全过程，实现全程育人、全方位育人，努力开创我国高等教育事业发展新局面”[2]。习近平总书记在会议中为高校如何加强落实立德树人根本任务提出了指导，高等学校教育发展的重要方向就是“课程思政”[3]。线性代数作为大学的公共课，又是重要的数学基础课。线性代数课程思政建设是非常重要的。近年来，一些学者对于线性代数课程思政建设和要素的挖掘做了研究[4]-[6]。

本文研究了线性代数课程思政建设。介绍了两个课程思政教学案例，挖掘了线性代数课程思政新元素。本文丰富了线性代数课程思政的内容，使得线性代数能够更好地与思想政治理论结合，形成协同育人的效应。

2. 线性代数课程思政建设

课程思政是把思想政治教育的理论知识、社会主义核心价值观以及崇高的精神追求等融入到每一门课程中。课程思政的任务是全面提高高等教育人才培养的质量。课程思政建设的特点被总结为“寓德于课是首要特点，人文立课是主要特点，价值引领是核心特点”[3]。2020年5月28日，教育部印发了《高等学校课程思政建设指导纲要》，这进一步明确了课程思政建设目标和重点。根据“纲要”，提出两点建设思路。

2.1. 线性代数的公共课属性与课程思政建设

线性代数作为一门公共基础课，必须通过课程思政建设，做好“各门课都要守好一段渠、种好责任田，使各类课程与思想政治理论课同向同行，形成协同效应”[2]。公共基础课程，思政建设可以侧重增强人文素养教学，增加中华优秀传统文化教育的内容。思政要素的选择服务于提高学生的道德水平、人

文素质、科学精神；作用于培养学生的理想信念、爱国主义情怀、增长学识眼界、培养人文精神；目的是树立学生正确的国家观、民族观、历史观、文化观。

作为授课教师，要保持学习，自身要树立起正确的历史观，文化观。任课老师应该熟悉中华民族的发展过程，熟悉中国数学史，熟悉中国数学的杰出人物和数学领先成果。在数学的方面“要给学生心灵埋下真善美的种子，引导学生扣好人生第一粒扣子”^[7]。对于历史的认识，是会随着考古发现不断更新。举例来说，“中华文明探源工程”的研究结果表明：“中华文明是土生土长，在自身文化传统的基础上形成的原生文明”^[8]。中华文明起源的加速阶段为距今 5800 年至距今 3800 年，这一阶段称为“古国时代”。考古学家发现，距今四千多年的陶寺城址的宫殿区内，有一处夯土建筑基址，编号“IFJT3”，面积达 8000 平方米，基址上有一座面积约为 286 平方米的主体殿堂^[9]。建造这座单体建筑，需运用各种工程技术。由此可见，中华民族在古国时代就已积累数学知识，并将数学知识运用到工程技术中。在距今 3800 年，二里头文化兴起，中华文明进入“王朝时代”。商代殷墟甲骨文有了数字一到十，百，千，万。它们“与二里头陶文数字有明显的继承痕迹”^[10]。最迟在春秋时期，中华民族已经使用算筹进行计算了。算筹表示的自然数，是典型的十进位置值制记数法。其他古文明的记数法“远不及中国的十进位置值制记数法方便”^[10]。记数法的先进性，促进了古代中国数学的发展。之后，著名的《九章算术》及魏刘徽的注，“使得数学成为中国古代最发达的基础学科之一，对我国数学在中世纪世界数学舞台上置身于先进行列十余年，起了奠基作用”^[11]。笔者认为，应在线性代数课程思政建设中，增加上述部分内容，以提高学生的人文素养，培养学生的实事求是的精神，树立学生的历史观，提升线性代数课程的时代性和开放性，使线性代数课程发挥协同育人的功能。

2.2. 线性代数的理学课属性与课程思政建设

线性代数是一门数学课。课程思政建设要把马克思主义理论体系教育与科学精神的培养相结合。课程思政建设的目的是提升学生综合素质，激发创造力，提高线性代数知识的学习效率。通过课程思政设计，将知识传授，能力训练，价值引领有机结合。激发学生的求知欲、探索欲、勇攀科学高峰的责任感。能通过线性代数课程教学，激发出学生科技报国的家国情怀和使命担当。

线性代数的主要内容为：线性方程组，矩阵，行列式，向量空间，内积空间，线性变换，二次型。各个内容板块之间关联性强，讲授同一个知识点，可以有多种讲授方案。不同章节的知识和结论相互关联，增加了学生学习的难度。线性代数课程思政建设要求，课程设计应该重能力培养，降低抽象的知识讲解，提高学生学习的效率。

通过调整各个知识板块的教学顺序，可以降低讲解知理论识的复杂度，提高线性代数课程思维和能力的训练的效果。例如，参考一些线性代数教材^{[12]-[14]}，“初等变换求逆矩阵”这个知识点：首先，引入初等矩阵的定义，介绍初等矩阵的符号；然后，通过推导初等矩阵的可逆性，初等矩阵的性质，得到“矩阵可逆等价于矩阵可以写成初等矩阵的乘积”这个结论；最后，总结出“初等变换求逆矩阵”的方法。从数学理论上看，是严谨的、完善的，但是对于学习来说，非常费时费力，比较抽象。本文提出教学案例，通过调整内容的讲授顺序，可以简化可逆矩阵内容的讲解。

3. 线性代数课程思政教学案例

3.1. 线性代数教学与《九章算术》内容相结合

将中国历史上数学的杰出成就，融入线性代数的授课。选取《九章算术》的内容与线性代数教学内容相结合。

《九章算术》的介绍。先秦时代贵族子弟学习“六艺”，这学生很熟悉。名为“九数”的数学内容，

就是“六艺”之一。《九章算术》，是“先秦‘九数’的发展，张苍、耿寿昌先后删补，因而在西汉中叶成书”[11]。《晋书·卷一十六·志第六》记载，魏景元四年(263)刘徽注《九章算术》。根据专家[11]的推测，刘徽注《九章算术》是在他三十五、六岁之前。刘徽可以称为年轻有为。《旧唐书·李淳风传》载：显庆元年(656)，李淳风等受诏注《九章算术》等十部算经。书成后，唐高宗令为国子监算学馆教材。现在看到的《九章算术》包含原文、刘徽的注和李淳风的注三种内容，之后基本固定下来。《九章算术》历来被视为算经之首。刘徽的注文在正文各题目之后，内容是数学概念定义，公式证明，比较详细的解题方法等。刘徽的注丰富了《九章算术》的内容，体现了刘徽的数学成就。

《九章算术》的例题。选择卷八“方程”中的第8题原文：“今有卖牛二、羊五，以买一十三豕，有余钱一千；卖牛三、豕三，以买九羊，钱适足；卖六羊、八豕，以买五牛，钱不足六百。问牛、羊、豕价各几何？”随后，给出解答过程：“术曰：如方程。置牛二、羊五正，豕一十三负，余钱数正；次，牛三正，羊九负，豕三正；次，五牛负，六羊正，八豕正，不足钱负。以正负术入之”。

从这个例题，可以很清楚的发现，早在《九章算术》成书的时代，中国古人就开始使用负数。题目和解答的文字，一般人都可以看懂。正文解答过程，是很简略。刘徽的部分注文：“先令牛二遍乘左、中行，而以右行直除之”，运算前几步过程可表示为：

$$\left(\begin{array}{ccc} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & 0 & 1000 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} -10 & 6 & 2 \\ 12 & -18 & 5 \\ 16 & 6 & -13 \\ -1200 & 0 & 1000 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 37 & -33 & 5 \\ -49 & 45 & -13 \\ 3800 & -3000 & 1000 \end{array} \right). \quad (1)$$

从(1)可见，刘徽注文的过程和矩阵初等列变换几乎是一致的。

“方程”章所解的数学问题，就是线性代数的线性方程组问题。十九世纪以后，“方程”作为“equation”的翻译，词语本意已经不使用。刘徽给出“方程”的定义。简单说来，“方”是“并”的意思，“程”是长度单位，引申为动词“求某物的度量”。《九章算术》提出了一套完整的解线性方程组的方法“方程术”，具体的计算步骤是“直除法”和“正负术”。笔者认为，“方程”相当于“线性方程组”，“方程术”类似于“高斯消元法”，“直除法”类似于“矩阵的初等行变换”等线性代数内容。

“方程术”是《九章算术》中最杰出的成就。《九章算术》被历代著名数学家，祖冲之，祖暅，杨辉等研究。在线性代数课程中，增加中华优秀传统文化，培养学生爱国情怀。十三世纪之后，中国数学急剧衰落[10]。要培养学生的使命感，责任感，自觉为实现中华民族伟大复兴不断奋斗。

3.2. 可逆矩阵求逆矩阵教学案例设计

教案设计目的是提升学生综合素质，激发创造力。教学要适当降低数学推导，注重思维训练。

学习情况介绍。已知矩阵 A ，判断矩阵 A 的可逆性是线性代数重要定理，属于数学知识性内容；求矩阵 A 的逆矩阵，是应用性内容，需要熟练掌握。均是线性代数中教学的重点。主要有两个方法，可以判断矩阵的可逆性和求逆矩阵，分别是“求 A 的伴随矩阵”和“初等变换求矩阵 A 的逆矩阵”。

对于矩阵可逆的判断，若已经讲授行列式的章节内容，可获得矩阵可逆的一个充要条件。矩阵 A 是可逆矩阵，等价于矩阵 A 的行列式不等于 0。教案要介绍矩阵初等行变换与高斯消元法的关系。这个方法，在教材中一般表示为： $(A, E) \sim (E, A^{-1})$ 。那么，可以不需要介绍初等矩阵的内容，就可以得到“初等矩阵求逆矩阵”的方法。

教学方法。若矩阵 A 可逆，求矩阵 A 的逆矩阵。以三阶矩阵为例讲解，假设 $AB = E$ ， E 为三阶单位阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

需要解决的问题是从(2)中求出 \mathbf{B} 矩阵。由于已知矩阵 \mathbf{A} 可逆, 可知矩阵 \mathbf{B} 为矩阵 \mathbf{A} 的逆矩阵。解决问题需要转化问题, 培养问题的转化能力, 提升学生的数学能力, 简化数学知识点的讲解。可以将 \mathbf{B} 矩阵和(2)换个写法:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

将(3)中的 \mathbf{E} 进行列分块, 那么问题(3)就变成了求三个系数相同的线性方程组的解:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

矩阵 \mathbf{A} 可逆性, 保证了三个线性方程组(4)解的唯一性。注意的是, 这里的唯一性是由矩阵代数的方式得出。求三个线性方程组的解, 就相当于对方程组做高斯消元, 本教学案例要求把高斯消元法前置到和矩阵初等行变换一起讲解, 初等行变换方法可求出(4)的解:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

在(5)中, 要让学生做思考, 已知线性方程组解的唯一性, 那么矩阵 \mathbf{A} 的标准型一定是单位矩阵。最终, 求出了 \mathbf{A} 矩阵的逆矩阵:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

实施本教学方案, 优点是不需要讲解初等矩阵, 将解线性方程的方法融入求逆矩阵, 可以提高学生的学习效率, 提高线性代数课程思维和能力的训练的效果。如果教学计划是矩阵代数在行列式之前, 那么则需讲解初等矩阵得到矩阵可逆的充要条件: “矩阵 \mathbf{A} 可逆充要条件是 \mathbf{A} 等于若干初等矩阵相乘”, 证明此结论不应该使用行列式的任何结论, 这个是很重要的。

4. 结语

本文研究了高校线性代数课程思政建设的思路。线性代数作为公共基础课, 课程思政建设应该围绕道德修养、人文素养建设, 以培养学生的爱国主义情怀, 提高学生的认知能力, 加强学生品德修养。线性代数作为理学类课程, 课程思政应该围绕科学思维来建设, 以培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感, 提升学生的综合素质。对应于两个建设思路, 本文给出了两个教学案例, 供广大教育工作者参考。

基金项目

成都大学本科教学工程“人才培养质量和教学改革”建设项目(项目编号: cdjgb2022078)。

参考文献

- [1] Leon, S.J. and de Pillis, L.G. 线性代数: 原书第 10 版[M]. 张文博, 张丽静, 译. 北京: 机械工业出版社, 2022.
- [2] 责任编辑. 习近平在全国高校思想政治工作会议上强调 把思想政治工作贯穿教育教学全过程 开创我国高等教育事业发展新局面[N]. 人民日报, 2016-12-09(01).
- [3] 王学俭, 石岩. 新时代课程思政的内涵、特点、难点及应对策略[J]. 新疆师范大学学报(哲学社会版), 2020, 41(2): 50-58.
- [4] 何立国, 陈胜. 思政视角下的线性代数课程[J]. 高等数学研究, 2024, 27(2): 21-26.
- [5] 陈肖宇. 线性代数课程思政教学设计——以矩阵求幂问题为例[J]. 高教学刊, 2024, 10(19): 173-176.
- [6] 高月凤, 刘锡平. 线性代数课程思政教学方案设计与实践[J]. 大学数学, 2023, 39(3): 20-24.
- [7] 责任编辑. 习近平主持召开学校思想政治理论课教师座谈会强调 用新时代中国特色社会主义思想铸魂育人 贯彻党的教育方针落实立德树人根本任务[N]. 人民日报, 2019-03-19(01).
- [8] 王巍, 赵辉.“中华文明探源工程”及其主要收获[J]. 中国史研究, 2022(4): 5-23.
- [9] 中国社会科学院考古研究所山西队, 山西省考古研究所, 临汾市文物局. 山西襄汾县陶寺城址发现陶寺文化中期大型夯土建筑基址[J]. 考古, 2008(3): 3-6.
- [10] 郭书春, 田淼, 邹大海. 规矩方圆: 中国数学小史[M]. 沈阳: 辽海出版社, 2001.
- [11] 郭书春, 汇校. 汇校《九章算术》[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1990.
- [12] 吴赣昌, 主编. 线性代数(理工类·简明版·第五版) [M]. 第 5 版. 北京: 中国人民大学出版社, 2017.
- [13] 赵树嫄, 主编. 经济应用数学基础(二): 线性代数[M]. 第 4 版. 北京: 中国人民大学出版社, 2013.
- [14] 张慎语, 周厚隆, 编. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.