

中美高中数学教材习题的个案比较

——以函数的概念为例

袁清瑶

苏州科技大学数学科学学院, 江苏 苏州

收稿日期: 2024年2月21日; 录用日期: 2024年3月22日; 发布日期: 2024年3月29日

摘 要

本文基于鲍建生提出的数学课程综合难度模型, 以函数的概念为例, 对中美初中数学教材的习题部分进行特征对比分析。结果表明: 人教版教材习题在结果目标、推理、运算、知识点含量4个因素水平上高于美国教材, 但背景因素水平略低于美国教材。通过中美教材比较, 希望对我国数学高中在“函数的概念”方面的教学提供有益的启示。

关键词

数学高中教材, 习题, 中美比较, 难度模型

Case Comparison of Exercises in Chinese and American High School Mathematics Textbooks

—Taking the Concept of Functions for Example

Qingyao Yuan

School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: Feb. 21st, 2024; accepted: Mar. 22nd, 2024; published: Mar. 29th, 2024

Abstract

Based on the comprehensive difficulty model of mathematics curriculum proposed by Jiansheng Bao and taking the concept of function as an example, this paper makes a comparative analysis on the features of exercises in Chinese and American senior high school mathematics textbooks. The

results show that the exercise level of the textbook is higher than that of the American textbook in four factors: result objective, reasons, operations and knowledge point content, but the level of background is slightly lower than that of the American textbook. Through the comparison of Chinese and American textbooks, I hope to provide some useful enlightenment to the teaching of function concept in senior high school of mathematics in our country.

Keywords

Mathematics Textbook for Senior High School, Exercises, Comparison between China and America, Difficulty Model

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1.1. 研究缘起

本研究者在读研究生期间学习了《中外数学教育比较研究》这一门课，这门课的家庭作业是以小组合作的形式翻译美国教材——《Glencoe Mathematics. Math Matters》。本研究者分到翻译《函数》这一章节，在翻译时，发现中美两种教材的习题在设计上存在某些差异，这引起了本研究者的关注。

1.2. 研究背景

随着科学技术的创新发展，各国越来越重视基础教育的人才培养，教材是国家进行基础教育人才培养的一种工具，它是教育专家根据课程标准编写而成的书籍，体现了学科特点和课程内容。

1) 习题在教材中有着重要地位，是教学过程中组织学生学习、检验学生学习成果的重要依据。通过习题的练习，能够了解学生基本知识、基本技能的掌握情况。

2) 函数是中学数学的重要内容，在高中数学中占有很大比重，函数既来源于生活又服务于生活，在生活中有很大的应用，并对生活有着一定的指导意义。它不仅是后面学习数学的基础，同时在物理、化学等其他学科中均有广泛的应用，是一种重要的数学模型。

1.3. 研究目的

通过对习题的分析，可以让我们认识到教材的习题形式、难度以及价值。本文以中美两国高中数学教材——函数的概念为研究对象，对函数的概念的习题进行比较，了解中美两种教材在数量、类型及难度上的差异，为教材的习题修订提供一些数据，以期对我国中学数学教师教学和学生提供启示。

1.4. 研究的具体问题

- 1) 两种教材相关习题的类型及数量有哪些差异？
- 2) 两种教材相关习题的难度有哪些差异？

1.5. 研究意义

- 1) 有助于丰富中美教材对比的研究，为教材习题的修订提供一些数据。
- 2) 有助于我国中学数学教师的教学和学生的学习提供一些启示。

2. 研究框架建构

2.1. 研究方法

本文的研究方法有：文献分析法、内容分析法、统计分析法。

1) 文献分析法：本文利用相关数据网络、知网、万方等文献网搜索“习题”“中美比较”“难度模型”关键词，对文献进行整理，了解现有的研究以及存在的问题，明确研究方向。

2) 内容分析法：本研究通过收集两种教材的习题类型及数量的数据，利用鲍建生提出的综合难度模型进行习题难度的量化比较，再通过质性研究分析中美两国教材习题上的差异最终得出结论。

3) 统计分析法：根据编码的结果对中美两种教材的习题进行统计，分析两种教材相关习题的类型、数量及难度上的差异。

2.2. 研究内容

中国教材：选取新人教 A 版《普通高中教科书·数学·必修第一册》(以下简称“人教版教材”)，习题包括人教版教材“函数的概念”中的例题、探究、练习、习题等[1]。

美国教材：选取 The McGraw-Hill Companies 出版的《Glencoe Mathematics. Math Matters》(以下简称“美国教材”)，习题包括美国教材“函数的概念”的例题(Example)、试试这些练习(Try These Exercises)、额外练习(Practice Exercises For Extra Practice)、扩展练习(Extended Practice Exercises)、混合复习练习(Mixed Review Exercises)等[2]。

2.3. 研究工具

基于鲍建生提出的由探究、背景、运算、推理和知识含量五个因素构成的数学题综合难度模型，本文通过认真分析两本教材有关“函数的概念”习题的具体情况，对鲍建生的难度模型进行如下微调，调整结果“见表 1”。

Table 1. Comprehensive difficulty factors and level division
表 1. 综合难度因素及水平划分

难度因素	水平		
结果目标	理解	掌握	运用
背景	无实际背景		有实际背景
运算	无运算	数值运算	简单符号运算
推理	无推理	简单推理	复杂推理
知识含量	1 个知识点	2 个知识点	2 个以上知识点

微调说明：① 将鲍建生模型中的探究替换成结果目标，鲍建生基于对数学探究水平的刻画和反映数学知识综合程度设置了探究。而本研究比较的是教材上的习题，内容是封闭型的，探究型内容很少。根据课程标准中的行为动词，将探究因素调整为结果目标因素，并选取了描述结果目标的行为动词理解、掌握、分析作为对应的 3 个水平[3]。

理解就是指能够描述对象的特征和由来，阐述此对象和相关对象之间的区别和联系。判断、画出、解释等都是理解水平的主要行为表现。如，下列函数中哪个与函数 $y = x$ 是同一个函数？

掌握就是指在理解的基础上，把对象应用于新的情境。如“构建其他可用解析式 $y = x(10 - x)$ 描述其中变量关系的问题情境”。

运用就是指综合使用已掌握的对象，选择或创造适当的方法解决问题。构造、转化等策略是运用水平的主要行为表现。如，“用你认为最简单的方法画出函数的图像， $y = |x - 2|$ 。”

② 鲍建生的数学难度模型将背景因素划分为无实际背景、个人生活、公共常识、科学情境 4 水平[4]。由于美国教材给出的带有背景的习题数量很多，本研究无法根据字面背景界定它是具体属于个人生活还是公共常识水平。同时人教版中的习题背景大多数是科学情境，若根据鲍建生采用的等级变量进行赋值，那么科学情境对应的分值为 4 (即从低到高按照自然数 1, 2, 3, ……进行赋值)，那么这样算出来的结果不能从整体上比较出中美教材在背景因素方面的差异。因此本研究中的背景因素仅由无背景与有背景 2 个水平构成[5]。

③ 运算因素包括无运算、数值计算、简单符号运算和复杂符号运算 4 个水平。本研究对两种教材习题进行编码，发现均没有涉及复杂符号运算这一水平，因此选择前 3 个水平。其中无运算是指不含有任何数或者符号的运算。数值运算指仅包含数的运算，不含有符号运算。简单符号运算指 1 到 2 个步骤的字母符号运算[6]。

④ 推理因素上，本研究采用原来的划分水平：无推理、简单推理和复杂推理 3 个水平。无推理指纯粹的数值计算和概念巩固。简单推理指包含 1~2 个简单的推理步骤。复杂推理指包含 3 个及 3 个以上推理步骤的推理。

⑤ 知识含量水平的划分是采用鲍建生的难度模型划分标准，由 1 个知识点、2 个知识点、2 个以上知识点 3 个水平构成。

对调整后的难度模型水平(见表 1)按从低到高进行自然赋值(1、2、3……)。例如一道题目在结果目标因素上属于理解水平，在背景因素上属于有实际背景水平，并且涉及简单符号运算、简单推理以及包含 1 个知识点的话，那么其五个难度因素上的取值依次就分别是：1, 2, 3, 2, 1。再分别统计两种教材中每一难度因素中每一水平的习题数量及比例，最后求出每一难度因素的加权平均，这样就可以从整体上把握两种教材的习题难度。本研究是和同专业的研究生分别独立编码，有歧义的习题请教老师。

3. 研究结果

3.1. 两种教材相关习题的类型及数量比较

对习题编码时我们约定，题目按大题数量计算，若 1 题含有多次提问的习题，按 1 题统计。统计结果“见表 2”。

Table 2. A comparison of the types and quantities of exercises in the two textbooks
表 2. 两种教材的习题类型及数量的比较

习题类型	人教版教材	美国教材
计算	18	17
作图	10	12
判断	4	3
说理	5	4
数学写作	0	1
复习旧知	0	3
使用计算器	0	1
总计	37	41

由表 2 发现, 人教版教材的习题类型主要集中在计算和作图上, 有少量的说理和判断。如“函数 $f(x) = [x]$ 的函数值表示不超过 x 的最大整数, 例如, $[-3.5] = -4, [2.1] = 2$, 当 $x \in (-2.5, 3]$ 时, 写出函数 $f(x)$ 的解析式, 并画出函数的图像。”相比之下, 美国教材习题类型比较丰富, 有数学写作方面的, 如“WRITING MATH Explain why it is a good idea to use at least three different values of x when you graph a linear equation.” (数学写作 解释一下为什么用至少三个不同的 x 值画一次函数是一个好方法), 有复习旧知方面的, 如利用映射的知识判断函数, 利用垂线测试判断函数, 函数的定义域和值域等; 有使用计算器计算的, 如“GRAPHING Use a graphing calculator to check your answer for Exercise 34.” (图形计算器 用图形计算器检查练习 34 你的答案)由此可见美国教材比较注重信息技术的使用, 引导学生合理使用计算器进一步加深对函数图像的认识。另一方面美国教材还增加了之前的旧知识, 能够有效巩固旧知, 更有利于学生知识的正向迁移。这些方面人教版教材没有涉及, 值得我们学习。

3.2. 两种教材相关习题难度的比较

1) 两种教材的习题各难度因素的量化指标

通过分别统计两种教材每一难度因素中每一水平的习题数量并求出 5 个难度因素下的不同水平所占比例结果“见表 3”。

Table 3. Quantitative index of each difficulty factor of two teaching materials

表 3. 两种教材各难度因素的量化指标

难度因素	等级水平	题量		百分比		加权平均	
		人教版教材	美国教材	人教版教材	美国教材	人教版教材	美国教材
结果目标	理解	12	25	32.43%	60.98%		
	掌握	16	12	43.24%	29.27%	1.92	1.49
	运用	9	4	24.32%	9.76%		
背景	无实际背景	22	23	59.46%	56.10%	1.41	1.44
	有实际背景	15	18	40.54%	43.90%		
运算	无运算	7	9	18.92%	21.95%		
	数值运算	7	9	18.92%	21.95%	2.43	2.34
	简单符号运算	23	23	62.16%	56.10%		
推理	无推理	1	5	2.70%	12.20%		
	简单推理	29	35	78.38%	85.37%	2.16	1.90
	复杂推理	7	1	18.92%	2.44%		
知识含量	1 个知识点	13	18	35.14%	43.90%		
	2 个知识点	16	20	43.24%	48.78%	1.86	1.63
	2 个以上知识点	8	3	21.62%	7.32%		

说明: 加权平均的计算公式是 $d_i = \frac{\sum_j n_{ij} d_{ij}}{n}$ ($\sum_j n_{ij} = n; i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3, \dots$) 其中, ($d_i = 1, 2, 3, 4, 5$) 依次分别表示结果目标、背景、运算、推理和知识含量五个难度因素上的取值; d_{ij} 为第 i 个难度因素的第 j 个水平的权重(依水平分别取 1, 2, 3); n_{ij} 则表示这组题目中属于第 i 个难度因素的第 j 个水平的题目的个数[7], 其总和等于该组题目总数 n 。根据算出来的 d 值, 分析两种教材的总体局部难度与综合难度。

2) 结果目标的水平比较

根据表 3 中“结果目标”这一栏的 3 个水平折线图“见图 1”。

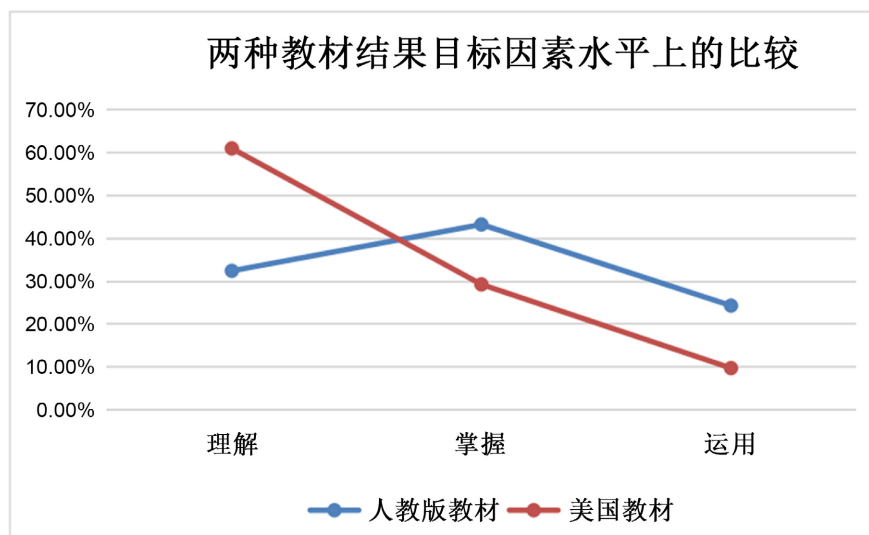


Figure 1. Comparison of two teaching materials at the level of outcome target factors
图 1. 两种教材在结果目标因素水平上的比较

由图 1 可知，两种教材在理解水平差异大，美国教材比人教版教材高出约 28 个百分点；掌握和运用水平差异较大，人教版教材比美国教材高出约 13 个百分点。

美国教材在运用水平的习题占比是最低的，在理解水平的习题占比最高，美国教材在结果目标因层次分明呈单调递减趋势，对学生学习的结果目标要求不高，习题主要集中在理解水平，而人教版教材习题在结果目标因素上分布均匀呈“小山峰”趋势，习题在掌握水平上占比最高。

3) 背景因素的水平比较

根据表 3 中“背景”这一栏的 2 个水平折线图“见图 2”。

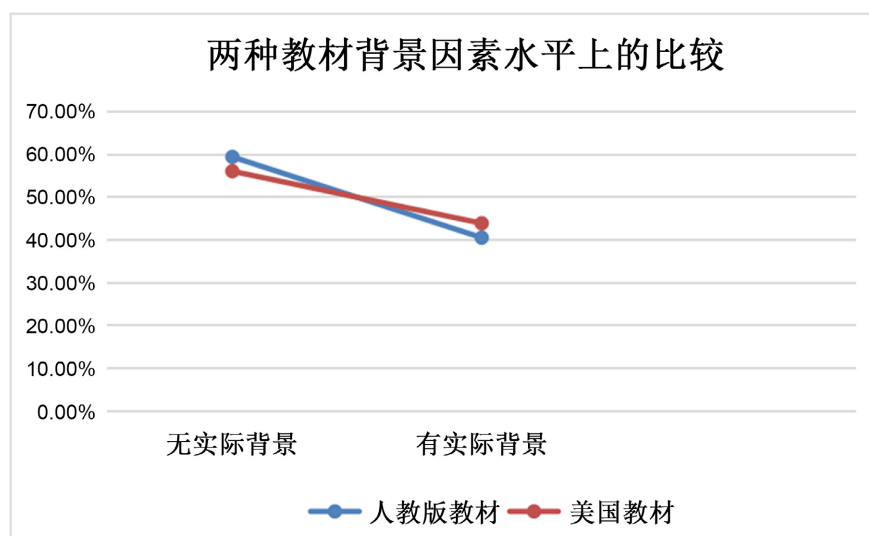


Figure 2. Comparison of the two teaching materials at the level of background factors
图 2. 两种教材在背景因素水平上的比较

由图2可以看出,美国教材有实际背景的习题比人教版高出约3个百分点,数量差距不是太大,但是从实际背景内容来看,美国教材的习题背景类型十分丰富涉及到健康领域、食品服务、商业、健身等。而人教版教材习题背景单一,主要就是与图像有关的一些科学情境,如“在平面直角坐标系内”等,注重知识的情境的反复运用,但是相比于鲍建生在《中英两国初中数学期望课程综合难度的比较》一文中表明我国老版人教版八年级教材有实际背景的习题约占7%,但本文“函数的概念”习题有实际背景约占40%,由此可见新课改实施后,人教版教材的有背景的题目所占比例有了大步提升,这得益于新课程中准里强调的“要加强数学知识与生活的联系”。

4) 运算因素的水平比较

根据表3中“运算”这一栏的3个水平折线图“见图3”。

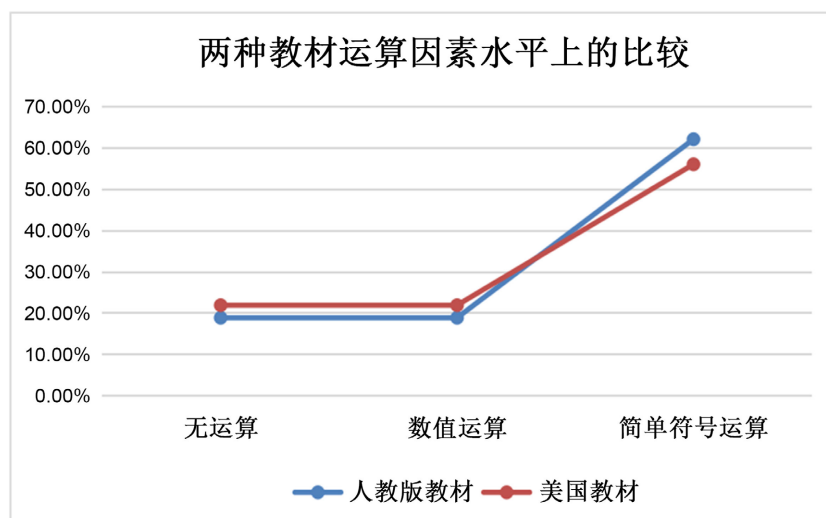


Figure 3. Comparison of two teaching materials in the level of operational factors

图3. 两种教材在运算因素水平上的比较

由图3可以发现,两条折线的走向是基本一致,简单符号运算是两本教材习题中运算的主要形式,这与本文的选题“函数的概念”有着很大的关系。两种教材的无运算和数值运算分别相等,美国教材比人教版教材约高出3个百分点,但人教版教材习题在简单符号运算水平比美国教材高出约6个百分点。

5) 推理因素的水平比较

根据表3中“推理”这一栏的3个水平折线图“见图4”。

由图4可以看出:两种教材的习题在推理因素水平上都呈现“小山峰”趋势,在简单推理水平上最高,美国教材习题约占九成,人教版教材约占八成,两者比例相差约7个百分点。在无推理水平上,美国教材习题占比比人教版教材高出约10个百分点。但在复杂推理水平上人教版教材习题比美国教材高出约16个百分点。这与我国传统的“双基”教学有密切的联系,这在一定程度上也证实了我国课程在数学“双基”上的传统优势。

6) 知识含量因素的水平比较

根据表3中“知识点”这一栏的3个水平折线图“见图5”。

由图5可以看出人教版教材和美国教材习题在知识点含量因素水平上走势保持一致,美国教材习题含有1个知识点比人教版教材高出约8个百分点,含有2个知识点的比例比人教版教材高出约5个百分点。人教版教材习题含2个以上知识点的比例比美国教材高出约14个百分点。部分原因可能是我国更加注重数学知识点之间的关联,涉及知识点的数量较多。

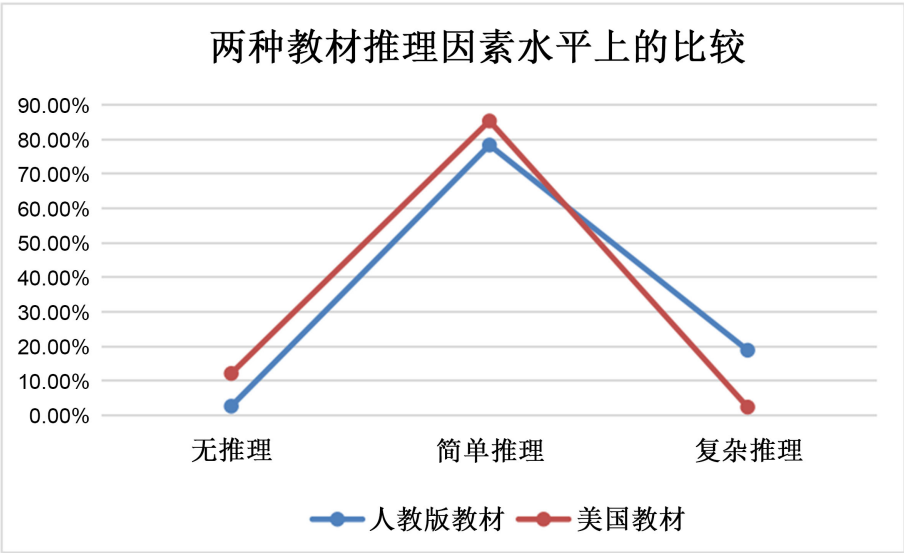


Figure 4. Comparison of two teaching materials on the level of reasoning factors
图 4. 两种教材在推理因素水平上的比较

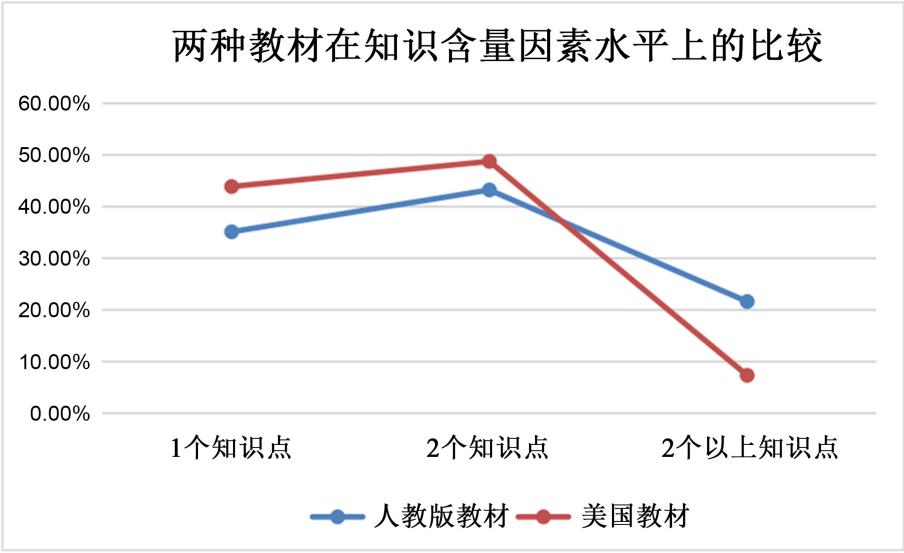


Figure 5. Comparison of two kinds of teaching materials in the level of knowledge content factors
图 5. 两种教材在知识含量因素水平上的比较

7) 综合难度的比较

为了考察两种教材的综合难度水平，通过对两本教材中 5 个难度因素的不同水平题目的统计，并利用公式(*)得到 5 个难度因素的加权平均，所得结果“见表 4”。

Table 4. The weighted average of the difficulty factors of the two teaching materials
表 4. 两种教材难度因素的加权平均

教材	结果目标	背景	运算	推理	知识含量
人教版	1.92	1.41	2.43	2.16	1.86
美国	1.49	1.44	2.34	1.9	1.63

根据表 4 得到了反映两种教材习题综合难度的五边形模型“见图 6”。

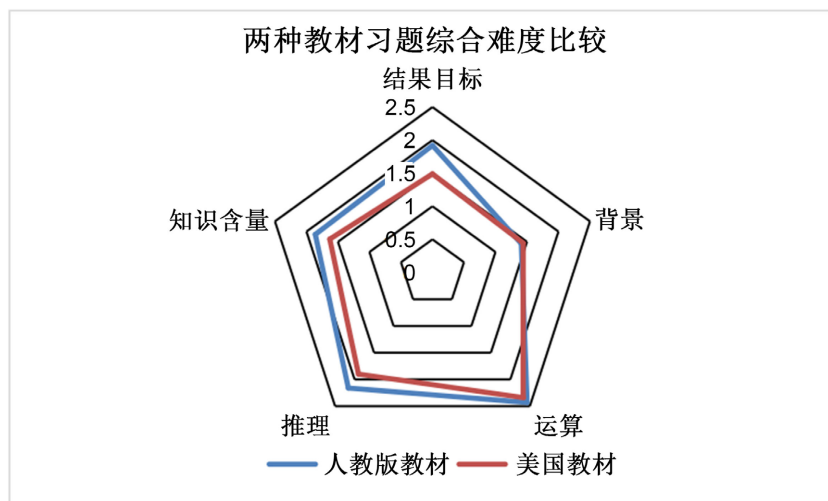


Figure 6. Comparison of comprehensive difficulty of exercises in two textbooks
图 6. 两种教材习题综合难度的比较

由图 6 可以看出, 人教版教材的习题在结果目标、知识含量、推理 3 个因素方面的难度水平要高于美国教材, 两版教材习题在背景、运算 2 个因素水平方面难度相当。从两个图形的整体态势上看, 美国教材习题侧重于运算因素, 其他 4 个因素水平相对平衡; 而人教版教材习题侧重于运算因素, 背景因素水平略低。

4. 启示

通过对中美教材关于“函数的概念”习题的综合难度模型比较分析, 本文得到以下启示:

1) 中美两国高中数学教材都对运算非常注重, 我国高中数学教材的习题中有很多双基训练的题目, 美国教材的习题运算简单, 类型单一, 题型重复。但关于两版教材在“空间几何”“概率与统计”等方面的运算难度要求是否大径相同, 这有待进一步研究。

2) 美国教材有实际背景的习题数量和质量要略高于人教版教材, 问题背景涉及多个领域如健康、食品服务、商业、健身等, 美国教材呈现的方式也很多样, 有通过图片形式展示, 有通过数学文化形式展示。而人教版教材习题问题背景和形式单一, 距离学生生活实际较为遥远, 不利于学生直观角度感受生活中存在数学问题, 不善于利用数学知识解决生活实际问题。人教版教材问题背景的多样和形式有待进一步加强。

3) 人教版教材习题在结果目标、知识含量、推理等难度水平要求更高, 主要表现为这 3 个难度因素中较高水平习题的比例高于美国教材, 美国教材习题虽然没有像人教版教材这样注重前后衔接, 紧密相连, 逐步发展, 还往往将一个知识点反复地应用在不同的情境中, 不太重视知识难易的梯度。但非常注重将数学知识运用到实际生活问题中, 也很注重数学知识与其他学科的紧密联系, 本研究者觉得这种做法值得我们借鉴。

4) 美国教材“函数的概念”的习题中涉及利用计算器或计算机检验所画图形是否正确, 而人教版教材习题中对计算器或计算机的应用没有涉及, 只是在本节后面的“信息技术应用”中谈到了用计算机绘制函数图像。随着信息技术的发展, 大数据的普及离不开计算机, 教材可以增加一些使用计算机或计算器作图、编程的内容。

5) 美国教材中有一部分习题是为了巩固前面的内容设置的,通过对前面知识的复习,有利于学生新知识的正向迁移,特别是数学学习困难的学生,设置复习题是非常必要的,本研究觉得我国数学教材应该借鉴美国的这一做法。

参考文献

- [1] 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书·数学·必修第一册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2007.
- [2] Boyd, C.J., Cummins, J., Malloy, C., Carter, J. and Flores, A. (2004) Glencoe Mathematics. Geometry. The McGraw-Hill Companies, California.
- [3] 教育部. 义务教育数学课程标准[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2001.
- [4] 鲍建生. 中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J]. 全球教育展望, 2002, 31(9): 48-52.
- [5] 贾随军, 吕世虎, 李保臻. 中国与美国初中数学教材习题的个案比较——以“与三角形有关的角”为例[J]. 数学通报, 2014, 53(9): 17-23.
- [6] 王鹏. 高中数学人教 A 版和 IBDP 版教材比较分析[D]: [硕士学位论文]. 扬州: 扬州大学, 2018.
- [7] 王丽玲. 小学数学教材“圆的周长”习题比较研究——以人教版, 青岛版和苏教版为例[J]. 课程教学研究, 2019(12): 56-61.