Advances in Education 教育进展, 2024, 14(5), 860-868
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2024.145777

Hans汉斯

中国古代数学创新与课堂创新

王 博

中国民航大学理学院，天津

收稿日期：2024年4月21日；录用日期：2024年5月20日；发布日期：2024年5月27日

摘 要

本文从古代数学创新思想出发，分别介绍了位值制十进位记数法、矩阵与正负数、圆周率和“招差术”与差分法等发明创造在当时世界中的领先地位。基于科学精神与创新发展，在课堂创新部分从创新教学内容、拓展教学内容、丰富教学方式等几个方面展开讨论如何培养学生的科学探索精神和创新思维能力，使学生做到学以致用、知行合一，为实现国家富强、建设科技强国打下坚实的数学理论基础。

关键词

中国古代数学，创新，课堂创新

Mathematical Innovation and Classroom Innovation in Ancient China

Bo Wang

College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin

Received: Apr. 21st, 2024; accepted: May 20th, 2024; published: May 27th, 2024

Abstract

Starting from the innovation of ancient mathematics, this paper introduces the leading position of the inventions and creations in the world at that time, such as the decimal notation method of place value system, matrix, positive and negative numbers, pi, and “spoofing” and difference method. Based on the scientific spirit and innovative development, in the classroom innovation part, we discuss how to cultivate students’ scientific exploration spirit and innovative thinking ability from the aspects of innovating teaching content, expanding teaching content, and enriching teaching methods, so that students can apply what they have learned and practice what they know, and can unify of knowledge and action, laying a solid mathematical theoretical foundation for the realization of national prosperity and construction of a scientific and technological power.

文章引用: 王博. 中国古代数学创新与课堂创新[J]. 教育进展, 2024, 14(5): 860-868.
DOI: 10.12677/ae.2024.145777

Keywords

Ancient Chinese Mathematics, Innovation, Classroom Innovation

1. 引言

国家的兴旺发达需要科学技术来支撑，民族的进步同样需要不断地创新，数学作为基础学科，它是整个科学体系的重要源头，是所有技术问题的总机关，因此说，数学创新对一个国家的发展是至关重要的。现如今，科技竞争已经成为世界竞争的关键，科技创新也成为了时代发展的潮流，习近平总书记在建设科技强国的“三步走”规划中提到[1] [2]，到 2020 年时进入创新型国家行列，到 2030 年时进入创新型国家前列，到新中国成立 100 年时成为世界科技强国，所以，自主创新是攀登世界科技高峰的必由之路。本文将从中国古代数学出发，学习领会古代的创新精神，并将其应用到课堂教学中。

2. 中国古代数学的创新

爱因斯坦曾说：“提出一个问题往往比解决一个问题更重要，因为解决问题也许仅是一个数学上或实验上的技能而已，而提出新的问题，却需要有创造性的想象力，而且标志着科学的真正进步”[3]。中国古代数学对世界数学发展做出了很大的历史贡献，并且中国古代数学的发展特征对于创新活动具有重要的指导意义。

2.1. 位值制十进位记数法

从原始社会开始，中国的十进位值制就有了雏形，到商代、春秋战国时，已经有了万位数字的记载。在《国语•郑语》中，史伯对桓公说到，“出千品，具万方，计亿事，材兆物，收经入，行姟极。”这句话的意思是“产生了千种品味，具备了上万方法，计算成亿的事物，经营十亿的财物，取得十兆的收入，采取无数的行动。”因此，这里的千、万、兆、经都是十进位的数。在《汉书•律历志》中也记载了五个单位，分别为分、寸、尺、丈和引，其中分为个位，一直十进制到“引”。西汉时期贾谊的《新书•六术》中记录了一句话，“数度之始，始于微细。有形之物，莫细于毫。是故立一毫以为度始，十毫为发，十发为厘，十厘为分，十分为寸，十寸为尺，备于六，故先王以为天下事用也。”在西汉早期，小于分的数已经是十进制了，并且“数”的最小单位是“毫”，这也开启了数学家的小数位值历史[4]。实际上，明确提出小数概念的是我国古代伟大数学家刘徽，他在《九章算术》少广章中提到，“微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所弃之数，不足言之也。”，即微数不需要借助单位来标识其“零”位值，一退再退以 10 的整数幂为分母，可避免通分引起的微数变化。从上述记载可以看到，中国古代的数进位一直以十进制为主干，形成了十进制系统。十进制小数的概念于 1247 年在秦九韶完成《数书九章》时已经通行，但是国外到 16 世纪才逐步涉及。

2.2. 矩阵与正负数

刘徽在九章算术“方程”章首次引出正负数的明确定义，“今两算得失相反，要令正负以名之”，它的含义为正负数表示得失相反的量。另外，他给出了正负数的表示形式，其中红色的杆表示正数，黑

色的杆表示负数(如图 1)。前苏联数学家尤什凯维奇提到，“负量以及它的运算法则的发明是大约生活在两千年以前或者更早的中国学者的最伟大成就，这是第一次越过了正数域的范围，中国数学家在这一点上超出了其他国家的科学几世纪之久”。在印度，婆罗摩笈多于 7 世纪第一次赋予负数的具体含义，他将“财富”表示正数，“债务”表示负数，并且婆罗摩笈多定义了一些正、负概念的运算规则，但是一直到 16 世纪，西欧才出现负数的概念，这才掀起求解二次、三次方程的数学热潮。

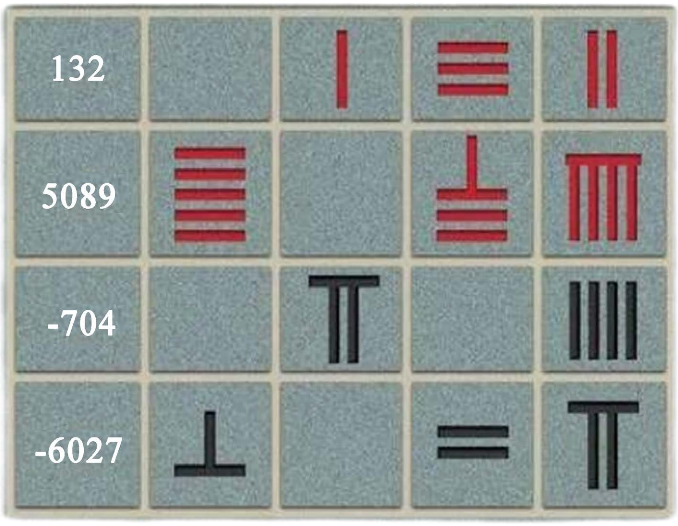

Figure 1. Negative numbers in Nine Chapters of Arithmetic
图 1. 《九章算术》中的负数

我们知道，矩阵是英国数学家凯莱在 19 世纪建立的，并且，他从 1858 年开始，研究并发表了关于矩阵的运算法则、矩阵的转置和矩阵的逆等一系列文章。实际上，矩阵的概念最早出现在《九章算术》“方程”章中，以该章第 1 题为例，今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？用我们熟悉的线性方程组[5]可以表示为

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39, \\ 2x+3y+z=34, \\ x+2y+3z=26, \end{cases}$$

利用算筹可以将上述的三元一次方程组排列成一个方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}.$$

2.3. 圆周率

我国南北朝时期伟大的数学家祖冲之精密计算了圆周率 π 在 3.1415926 到 3.1415927 之间。不幸的是，史料上没有关于祖冲之计算圆周率方法的记载，一般情况下认为祖冲之是沿用了刘徽的割圆术获得的 π。事实上，如果按照刘徽割圆术从正六边形出发连续计算到 24,576 边形时，恰好可以得到祖冲之的结果。祖冲之时代人们使用算筹计算，可以想象，为了获得上述圆周率的近似值，祖冲之进行了多么艰巨的计

DOI: 10.12677/ae.2024.145777

算。在《隋唐・律历志》中记载了祖冲之的另一个重要的结果，“宋末，南徐州从事史祖冲之，更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率，圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率，圆径七，周二十二。”由此可以看到，祖冲之计算了圆周率分数形式的近似值，约率 = 22/7，密率 = 355/113。虽然约率早被阿基米德计算出来，但是密率是空前的杰作，它是分子、分母不超过 1000 的分数中最接近 π 真值的分数。如此精确的 π 值直到 16 世纪才有德国人奥托和荷兰人安托尼兹推算出。国际数学界为纪念圆周率 π 的贡献者祖冲之，则将密率称之为“祖率”。

2.4. “招差术”与差分法

刘徽谈到中国数学史，不可不提的是我国元代伟大数学家朱世杰的两部数学著作，《算术启蒙》与《四元玉鉴》，其中后者包含三项著名的成就，即“四元术”“垛积术”与“招差术”。朱世杰的“四元术”给定了四元高次多项式方程，并利用消元法进行了求解，他的“垛积术”给出了高阶等差级数求和公式，他的“招差术”给出了等间距四次内插法公式，下面我们给出招差公式。

设 $f(n)$ 是一个 p 次多项式，则它可以写成组合数的线性组合：

$$f(n)=a_0C_n^0+a_1C_n^1+\cdots+a_kC_n^k+\cdots+a_pC_n^p,$$

其中 $a_k=\Delta^k f(0)$ 是 f 在 $n=0$ 的 k 阶差分，即我们有

$$f(n)=f(0)C_n^0+\Delta f(0)C_n^1+\cdots+\Delta^k f(0)C_n^k+\cdots+\Delta^p f(0)C_n^p.$$

这一公式直到 300 多年后才被英国数学家格里高利和牛顿才发现。实际上，招差公式也就是现在的有限差分方法，利用上述差分方法可以计算高阶差分，以 $f(n)=n^4$ 为例，即

$$\begin{array}{rcccccc}
n & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
f(n) & = & 0 & 1 & 16 & 81 & 256 \\
\Delta f(n) & = & 0 & 15 & 65 & 81 & 256 \\
\Delta^2 f(n) & = & 14 & 50 & 110 & * & * \\
\Delta^3 f(n) & = & 36 & 60 & * & * & * \\
\Delta^4 f(n) & = & 24 & * & * & * & *
\end{array}$$

根据朱世杰招差公式，可以得到

$$n^4=\sum_{k=0}^{4}\Delta^k f(0)C_n^k=1C_n^1+14C_n^2+36C_n^3+24C_n^4.$$

在欧洲有限差分方法的历史中，除了格里高利－牛顿的提出的内插公式外，一般公认是泰勒在 1715 年首创的，但是实际上朱世杰早在四百多年前就已经研究过了。

综上可知，中国古代数学具有非常多举世瞩目的成就，并且很多都是首创，这些成就充分体现了我国古代数学的发展水平，也体现了中国人民的勤劳聪慧。当然，本文列举的只是很少一部分具有代表性的创新成果，吴文俊先生在[6]中还列举了非常多的中国古代数学在代数方面的发明创造成果，从表 1 可以看到中国古代的很多代数知识都处于领先地位。作为教师，在课堂教学中，如果自然而恰当的介绍一些中国古代数学的成就，对于增强大学生的民族自豪感和树立学生的自信心都有积极的指导作用。

在如今科技发达的时代，习近平总书记多次强调，“青年科技人才要树立科学精神，培养创新思维，挖掘创新潜能，提高创新能力。”高校学生很快都会走出社会，将成为建设国家的有效基石，所以在课堂中应该注重培养学生的创新能力，形成创新思维。

Table 1. A Chinese-foreign comparison table of inventions and creations in arithmetic algebra [6]
表 1. 关于算数代数部分发明创造的中外对照表[6]

	中国	外国
位值制十进位记数法	最迟九章时已十分成熟	印度最早在 6 世纪末
分数运算	周髀已有，九章时已成熟	印度最早在 7 世纪
十进制小数	刘徽注中引入，宋秦九韶 1247 时已通行	西欧 16 世纪时始有之，印度无
开平方、立方	周髀已有开平方； 九章中开平、立方已成熟	西方 4 世纪末始有开平方，但还无开立方； 印度最早在 7 世纪
算术应用	九章中有各种类型的应用问题	印度 7 世纪后的数学书中有某些与中国类似的问题与方法
正负数	九章中已成熟	印度最早见于 7 世纪，西欧至 16 世纪始有之； 所谓公元 3~4 世纪，Diophantus 有正负数规则之说是有问题的
联立一次方程组	九章中已成熟	印度 7 世纪后开始有一些特殊类型的方程组 西方迟至 16 世纪始有之
二次方程	九章中已隐含了求数值解法； 三国时有一般解求法	印度在 7 世纪后； 阿拉伯在 9 世纪有一般解求法
三次方程	唐初(公元 7 世纪初)有列方程法、求数值解已成熟	西欧至 16 世纪有一半解求法、阿拉伯 10 世纪有几何解
高次方程	宋时(12~13 世纪)已有数值解法	西欧至 19 世纪初始有同样方法
联立高次方程组与消元法	元时(14 世纪初)已有之	西欧甚迟，估计在 19 世纪

3. 课程中的创新

培养大学生探索和创新能力是实现中华民族伟大复兴的必然要求，在高科技迅猛发展的社会，创新意识与能力逐渐成为一个国家国际竞争力和国际地位的重要决定因素之一，因此培养学生的探索精神和创新能力是必不可少的。我们知道，发现问题和解决问题是认识、改造世界的关键，在 2010~2020 年的国家中长期教育改革和发展规划纲要中明确提出，高等教育要开展拔尖创新人才培养改革试点，探索教育的创新人才培养途径，着力培养信念执着、品德优良、知识丰富、本领过硬的高素质专门人才和拔尖创新人才。在教学过程中，受课时的影响，教师重视按部就班的讲授，重点授“鱼”，往往忽视了授“渔”，教师独自完成了提出问题、分析问题和解决问题的过程。教师在授课时，直接引出“问题是什么”，经常忽略“为什么会出现这个问题”“出现了问题怎么解决”“不是这个问题该怎么解决”等，教师替代学生完成了问题的思考，替代了问题提出和问题解决的思维过程。因此，从“解决问题”指导数学类教学，在培养学生创新性思维，提高学生发现问题、分析并解决问题的能力方面具有非常重要的意义。下面从《数学分析》课程[7]出发谈谈如何进行探索与创新。

3.1. 创新教学内容，培养学生创新思维

在第六章微分中值定理这一章节中，我们首先给出了罗尔定理的内容。在罗尔定理的三个条件中，其中 $f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)上可导是抽象条件，对于很多函数都是满足的，而 $f(a)=f(b)$ 是具体的条件，只有部分函数满足条件，如果去掉具体条件 $f(a)=f(b)$，罗尔定理显然不成立，此时，我们可以抛出问题，去掉这个条件，有什么结论可以成立呢？

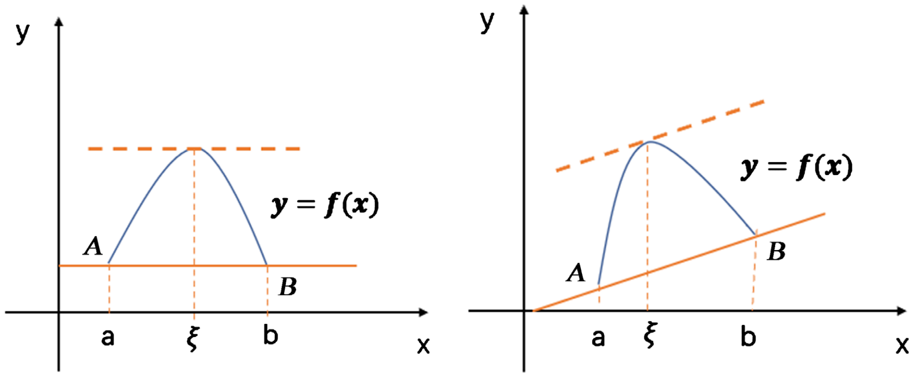

Figure 2. Arithmetic differential median theorem auxiliary graph
图 2. 微分中值定理辅助图形

由图 2 (左)可以看到，罗尔定理的结论是至少有一点的切线与 x 轴平行，也就是说至少过一点 $(\xi, f(\xi))$ 的切线与弦 AB 平行。如果曲线和弦是一个刚性物体，我们任意旋转曲线，$f(a)=f(b)$ 的条件可能不再满足(见图 2 (右))，但是仍然存在一点 $(\xi, f(\xi))$ 的切线与弦 AB 平行，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。这样借助数形结合，我们得到了一个结论，这个结论可以引导学生去解决，这样我们就完成了拉格朗日中值定理及其证明。精心的设计教学内容，不仅可以培养学生的创新能力，而且在专业课的学习中也建立了创新思维。

3.2. 拓展教学内容，培养探索思考能力

以第五章导数这一章节为例，首先引出一阶导数的定义，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h},$$

然后得到二阶导数的公式：

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2},$$

最后，结合数学归纳法，得到高阶导数公式：

$$f^{(n)}(x)=\lim_{h\to 0}h^{-n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}=f(x-jh),$$

其中，n 为正整数，那么这里的 n 能否推广到一般正实数 α 的情形呢？实际上，这就是研究比较热门的分数阶导数，具体如下：

$$D_{\alpha,x}^{\alpha}f(x)=\lim_{h\to 0}\sum_{j=0}^{\left[\frac{x-\alpha}{h}\right]}(-1)^j\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}f(x-jh).$$

上式为左 Grunwall-Liouvill 分数阶导数[8]，类似地，如果利用向前差分，可以得到右 Grunwall-Liouvill 分数阶导数，这说明分数阶导数实际上为整数阶导数的推广。相对于整数阶导数，分数阶导数具有非局部性，非常适合描述自然界具有记忆和遗传性质的材料，此外分数阶模型在粘弹性力学、随机游走和工程学等很多科学研究领域起着至关重要的作用。以这样的拓展创新，可以让学生了解数学领域的前沿研究热点问题，不仅可以拓宽学生的知识面，也提高了学习数学的能力。在此基础上，在学习完欧拉积分时，可以引出分数阶积分[9]

$$J_{\alpha}^{\alpha}f\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{\alpha}^{x}\left(x-t\right)^{\alpha-1}f\left(t\right)\mathrm{d}t,\left(x>\alpha\right),$$

Riemann-Liouville 分数阶导数

$$\left(D_{\alpha,t}^{\alpha}f\right)\left(x\right)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n}\left(J_{\alpha}^{n-\alpha}f\right)\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\int_{\alpha}^{x}\frac{f\left(t\right)}{\left(x-t\right)^{\alpha+1-n}}\mathrm{d}t,n-1<\alpha<n,$$

以及 Caputo 分数阶导数

$$\left(D_{\alpha,t}^{\alpha}f\right)\left(x\right)=\left(J_{\alpha}^{n-\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}^{n}f\left(x\right)}{\mathrm{d}x^{n}}=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{\alpha}^{x}\left(x-t\right)^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(t\right)\mathrm{d}t,n-1<\alpha<n,$$

然后引导学生查阅相关资料，比较这些分数阶微积分的异同点，对于一些基本性质以及结论做进一步证明，逐渐培养学生的探索与创新能力，树立科研信心。

3.3. 丰富教学模式，培养学生创新实践能力

以第三章第四节两个重要极限中的 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 为例，在传统教学中，我们采用纯板书教学模式，内容略显枯燥，但是采用与多媒体等设备结合可提高教学效率。上课伊始，以情景故事的形式引入复利模型(见图 3)，假设租户老王向包租婆借了 10 万元($A_0=100000$)，按 20% （ $r=0.2$)的年利率收利息，若一年结算一次，10 年之后可得本息和 61 万多，若一年结算两次，10 年之后可得本息和 67 万多，若一年结算三次，10 年之后可得本息和 69 万多，那么依次计算下去，如果即时结算，本息和($\lim\limits_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$)会如何变化呢？

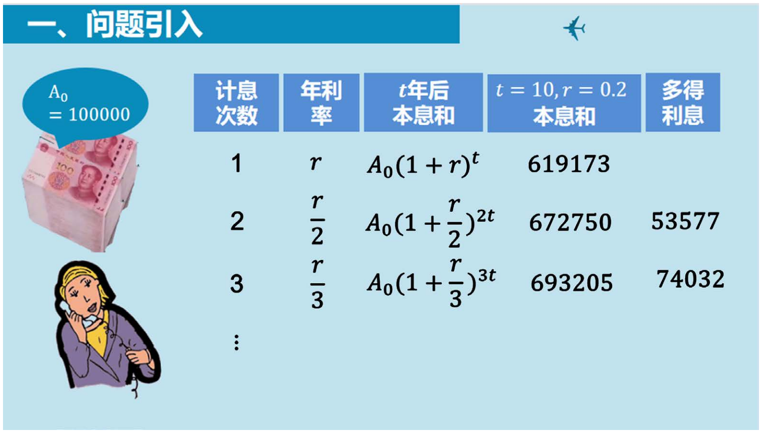

Figure 3. Compound interest model
图 3. 复利模型

可借助 Matlab 软件编写程序观察本息和这个数列随着计息次数的不同如何变化，由图 4 可以看到，当本金、年利率以及计息时间固定时，即使是即时结息，本息和也会趋于一个恒定值，那么，这个恒定值如何求解呢？然后结合板书，再引入并证明重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，最后由同学们解决复利模型中本息和的数列极限值到底是多少，并且总结这种类型的极限如何求解。通过引入复利模型，不仅构建同学们的数学建模意识，而且培养学生的实践动手能力、思考能力，从而引发学习兴趣。总的来说，新形式的教学在一定程度上可以解决学完数学分析课程还认为 1^{∞} 型极限等于 1 类似的错误情形。

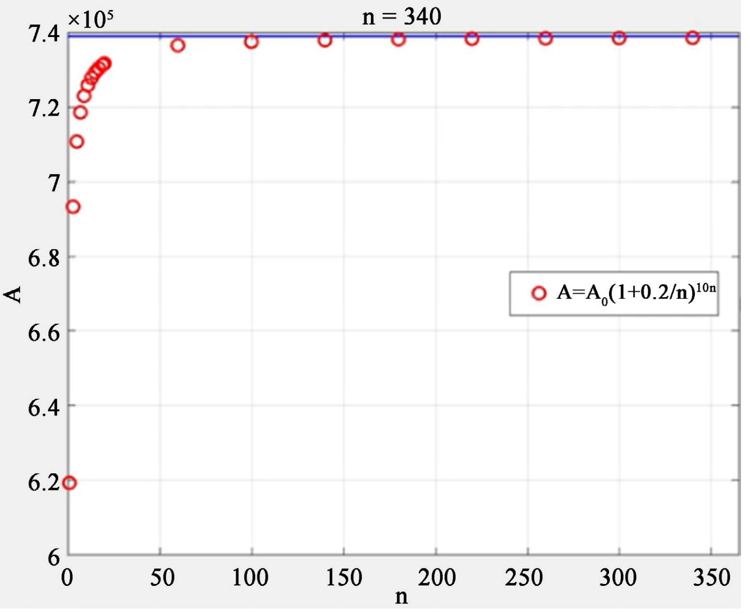

Figure 4. Principal and interest and changes with the number of interest accruals
图 4. 本息和随计息次数的变化

除了专业课程之外，我们也应该积极呼吁并带领同学们参加学科竞赛、数学建模、创新创业项目等活动，以此提高学生的创新实践与应用能力。为了与上述各种活动良好衔接，教师在专业课的授课过程中，要积极拓展相关的教学内容，并设置一些开放性大作业，帮助学生拓宽思路。

4. 结语

科学文化教育不单单指的是传统意义上的课堂知识教育，也包括人文文化教育和科学精神教育的创新能力培养，习总书记多次强调，人才是国家科技创新力的根本源泉，要将人才的教育、培养摆在人才强国和国家发展的重要位置。因此对于肩负文化传承和历史继承的大学生来说，在课堂中融入中国古代数学的创新思想、创新精神，不仅可以鼓励他们积极探索中国特色的自主科技创新，也可以造就求真务实、开拓进取的良好品格和创新精神。

致　谢

作者非常感谢相关文献对本文的启发。

基金项目

天津市普通高等学校本科教学改革与质量建设研究计划项目及项目编号 B231005907。

参考文献

[1] 王文敬, 洪晓楠. 习近平关于科学文化与创新人才的重要论述研究[J]. 科学技术哲学研究, 2022, 39(3): 110-116.

[2] 陈步伟, 郭燕, 谭亚军. 习近平总书记关于科技创新的重要论述研究[J]. 中共石家庄市委党校学报, 2021, 11(23): 10-15.

[3] 阿尔伯特·爱因斯坦, 利·英费尔德. 物理学的进化[M]. 周肇威, 译. 北京: 中信出版社, 2019.

[4] 李春华. 中国古代数学的辉煌成就[J]. 通化师范学院学报, 2003, 24(2): 103-106.

[5] 李文林. 中国古代数学的发展及其影响[J]. 中国科学院院刊, 2005, 20(1): 31-36.

[6] 顾今用. 中国古代数学对世界文化的伟大贡献[J]. 数学学报, 1975, 18(1): 18-23.

[7] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[8] 张玉新, 丁恒飞. 《数学分析》课程中融入数学文化的教学策略研究[J]. 兰州文理学院学报(自然科学版), 2021, 35(3): 105-109.

[9] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego.