

基于GeoGebra的高中数学教学探究 ——以《三角函数》为例

龙 静, 赵 洁

重庆三峡学院数学与统计学院, 重庆

收稿日期: 2024年4月27日; 录用日期: 2024年5月24日; 发布日期: 2024年5月31日

摘 要

随着信息技术的发展, 信息技术辅助教学是教学改革的重要手段, 信息技术和高中数学课堂的融合是数学教育的发展。本文基于学科教学软件GeoGebra, 分析设计三角函数教学, 提升学生对知识的理解和应用, 发展学生的数学核心素养。

关键词

信息技术, GeoGebra, 数学核心素养

Exploration of High School Mathematics Teaching Based on GeoGebra —Taking Trigonometric Functions as an Example

Jing Long, Jie Zhao

College of Mathematics and Statistics, Chongqing Three Gorges University, Chongqing

Received: Apr. 27th, 2024; accepted: May 24th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

With the development of information technology, information technology assisted teaching is an important means of teaching reform, and the integration of information technology and high school mathematics classrooms is the development of mathematics education. This article is based on the subject teaching software GeoGebra, analyzing and designing trigonometric function teaching to enhance students' understanding and application of knowledge, and develop their mathematical core literacy.

Keywords

Information Technology, GeoGebra, Mathematical Core Literacy

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

根据数学课程标准, 高中数学课程是面向全体学生, 实现“人人都能获得良好的数学教育, 不同的人在数学上得到不同的发展[1]。”高中数学知识相对初中数学知识更抽象, 难度更高, 涉及的知识更广泛, 内容也更复杂, 学生的理解能力相对薄弱, 解题能力不足, 因此高中数学教师要注重提升学生的学习兴趣和学习理解能力, 提高学生的数学核心素养和数学水平的发展。作为新时代的教师, 要借助新技术的优势条件, 合理利用新技术, 在运用新技术的教学软件基础上, 提升学生的理解能力, 发展学生思维。

GeoGebra 是一个动态数学教学软件, 提供各级教育使用, 包括几何、代数、表格、图形, 同时具有处理代数与几何的功能, 不仅可以做动态几何变换图形还具有处理变数的能力[2]。它作为一种智能交互软件, 打破传统的教学模式, 从抽象到具体, 从静态到动态, 从有限到无限, 可从多方面多角度理解数学概念知识[3]。在新时代背景下, 信息技术和中数学教学深度融合是高中数学课程改革的主要任务之一, 这不仅有利于提高教学策略而且提升学生对知识的兴趣和理解, 掌握概念的本质属性, 增强数学解题能力和数学核心素养。在信息技术的发展下, 作为教师必须将新信息技术带入课堂, 以信息技术带动教育现代化, 发挥信息技术优势, 优化课堂教学, 提高课堂效率, 培养学生的数学核心素养。

2. 基于 GeoGebra 在高中三角函数教学中数学核心素养的培养

根据高中三角函数内容和数学核心素养, 将 GeoGebra 软件和函数教学情境进行联系, 对基于 GeoGebra 软件的函数教学所涉及数学核心素养培养内容进行分析。

2.1. 数学抽象素养的培养

数学抽象是指通过数量关系与空间形式的抽象得到数学研究对象的素养, 指学生能够从数量关系和图形几何关系中抽象出概念间的关系并用数学语言表达与交流。学生能够通过现象理解其概念的本质意义, 能够从不同内容角度中抽象出概念和结构, 理解知识并应用知识, 逐渐形成一般性思考问题的习惯[4]。

相比初中三角函数的概念, 高中三角函数在单位圆中定义, 抽象概括性更强, 还涉及公式变形和诱导公式。教师在进行概念教学时要关注学生的理解, 注重学生对三角函数认知的思维转变过程, 切记生搬硬套的方式, 教师在进行三角函数概念教学时可结合 GeoGebra 软件加以辅助, 激发学生学习兴趣和理解, 培养学生数学抽象的核心素养。

例如, 在高中三角函数函数的图像及变换时, 使用 GeoGebra 软件动态展示三角函数进而分析图像变换的分析, 加深学生对概念的理解和应用。如图 1, 我们可以快速准确探究出 $\sin x$ 和 $\sin 2x$ 以及 $2\sin x$ 的图像变化区别, 进而从特殊推出一般, 得到三角函数图像变换的相互联系。

进而得出一般的三角函数图像变换中, 各字母对三角函数的影响, 加深对知识的理解, 也可更理解和应用结论。如图 2, 可结合 GeoGebra 准确画出三角函数图像, 分析三角函数的单调性、奇偶性和周期性等问题, 带动学生的学习兴趣并且加深学生对三角函数性质的理解。通过分析描画图像的过程, 直观准确地理解函数的几大性质, 理解过程应用在更加抽象题型中[5]。

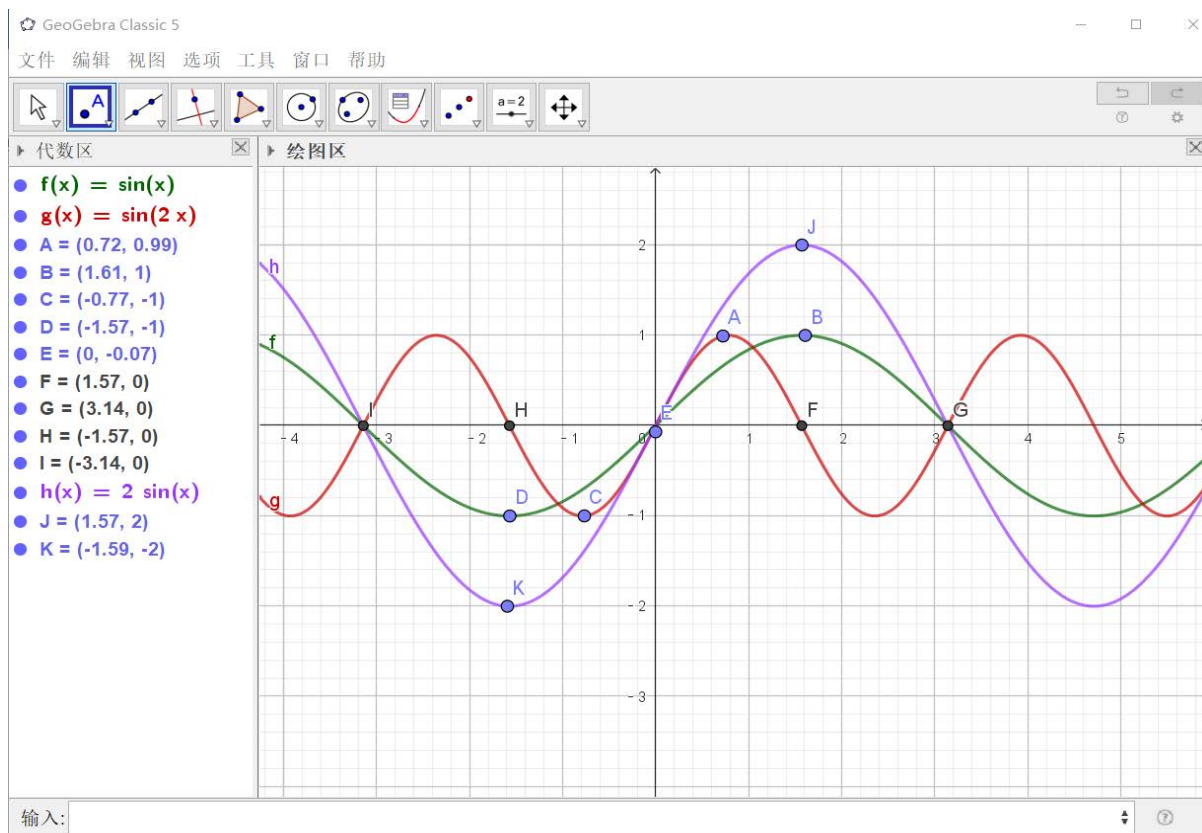


Figure 1. Image transformation of trigonometric functions

图 1. 三角函数的图像变换

2.2. 数学建模素养的培养

数学建模是对现实问题进行数学抽象, 用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养, 利用模型来解决现实问题的能力。学生通过审视问题, 建立知识与客观世界的联系, 针对不同的问题建立模型, 最终解决实际问题。在函数模型应用中, 选择函数模型时, 先要理解各函数模型的概念和性质再选用最适合本问题的数学模型, 分析解决实际问题[6]。

在三角函数的应用中, 教师要利用各种工具来引导学生理解现实问题, 将现实问题和数学问题相互联系, 再引导学生掌握建模的方法, 解决问题。例如在三角函数应用中的摩天轮问题, 教师可结合 GeoGebra 具体展示摩天轮中可能存在的三角函数问题, 分析检验三角函数模型解决实际问题。

2.3. 数学运算素养的培养

数学运算是指在明晰运算对象的基础上, 依据运算法则解决数学问题的素养。学习运算和解题是学习数学的一个重要核心, 要在理解运算对象的基础上, 掌握运算法则, 设计运算程序, 进而求得运算结果解答实际问题。通过高中数学课程的学习, 学生能够进一步发展数学运算能力, 通过运算的方式促进

思维能力的发展, 提升数学核心素养。

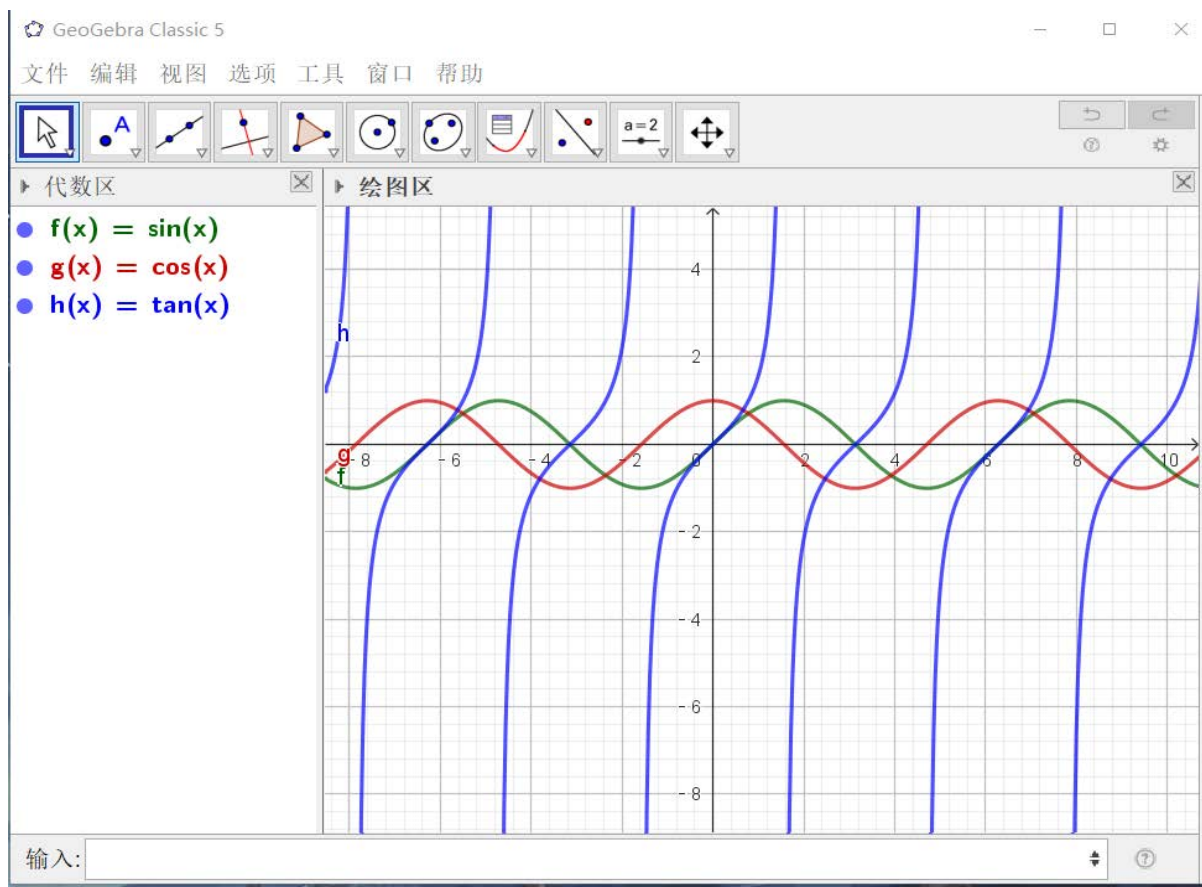


Figure 2. The properties of trigonometric functions

图 2. 三角函数的性质探究

数学运算常指教师根据教材和教辅设计数学题目, 教师和学生根据理论知识和运算法则, 环环相扣得到运算结果的过程。在以往教学中, 教师提前设计和提出几个问题, 学生在解决一个个变式题目的过程中掌握运算的思想方法, 完善知识结构和认知结构, 提升解决问题的能力。GeoGebra 的计算功能既方便准确又丰富, 只需要在运算区输入函数、方程等算式, 就可以迅速得到解决, 而且对于含有参数的算式, GeoGebra 会自动提示创建滑动条并设定取值范围。在教学中教师可以借助 GeoGebra 的丰富运算能力, 为学生提供一个探究学习的平台, 让学生展开想象自主探究, 引导学生在课堂中发现问题、提出问题、解决问题, 培养学生的运算素养[7]。

例如, 在探究三角函数图象时, 我们需要通过运算法则算出点纵坐标和横坐标, 在这个繁琐且抽象的过程中, 教师可使用教学软件 GeoGebra 引导学生, 和学生一起算相对应的点再总结三角函数图象特征, 如图 3 和图 4 通过创建滑条, 算出点 C 的坐标, 进而描点, 快速准确地展示 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的轨迹图象, 进而准确分析三角函数图象。

3. 基于 GeoGebra 的高中数学三角函数的概念教学案例

1. 教学内容及学情分析

本案例设计位于人教版 A 版必修第一册第五章 5.2 三角函数的概念(第一课时)。本节课主要任务是理

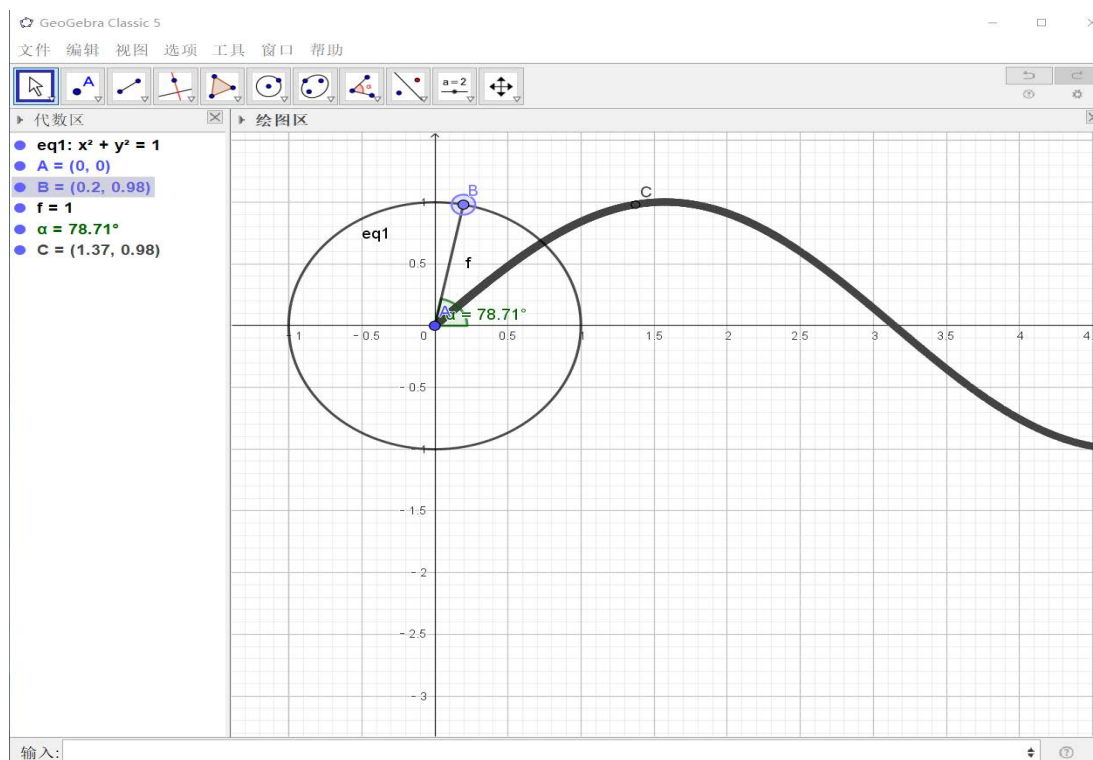


Figure 3. Sine image

图 3. 正弦图像

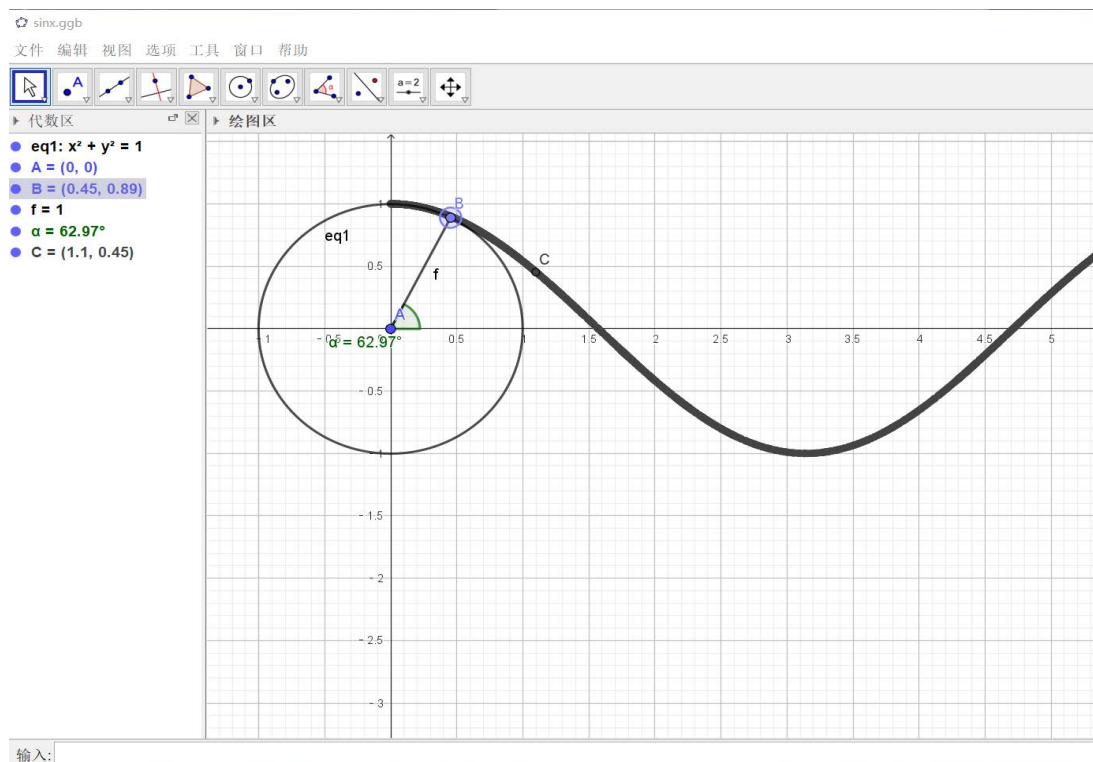


Figure 4. Cosine image

图 4. 余弦图像

解角的弧度制与实数间是否存在某种函数关系, 并利用构建单位圆的方式来探讨这种一一对应的函数关系, 掌握三角函数基本概念。

在本章之前学生已经系统地掌握研究函数的基本步骤方法, 并且在本章 5.1 中已经理解了任意角的定义和角的周期性变化规律, 这都为本节三角函数概念学习提供基础。

2. 教学目标分析

通过数学抽象, 能将圆周运动归结到单位圆上的点的运动规律刻画, 借助单位圆上点的坐标定义三角函数, 进而建立三角函数的概念, 体会数形结合思想方法的作用, 发展直观想象、数学抽象等核心素养。

3. 教学重点难点分析

1) 教学重点: 任意角的三角函数概念。

2) 教学难点: 学生因锐角三角函数影响难以将“三角函数”纳入函数概念中, 如何建立任意角的三角函数概念是一项难点, 并理解三角函数的概念是周期现象。

4. 教学方法

多媒体展示法, Geogebra 辅助法, 合作探究法。

5. 教学过程设计

(一) 导语: 现实世界中存在着各种各样的“周而复始”的变化现象, 圆周运动是这类现象的代表。

如图 5 所示, $\odot O$ 上的点 A' 以 A 为起点做逆时针旋转, 在弧度制下, 我们已经将角的范围扩展到全体实数, 能否建立一个函数模型, 刻画点 A' 的位置变化情况?

师生活动: 教师提出问题, 学生独立思考, 在已有的研究函数的经验基础上给出研究路线。

教师追问: 要解决函数问题, 通常需要什么研究工具?

学生: 建立函数模型, 需要建立直角坐标系, 并先研究单位圆上点的运动变化规律。

(二) 探索新知: 以单位圆的圆心 O 为坐标原点, 以射线 OA 为 x 轴的正, 建立直角坐标系, 点 A 的坐标是 $(1, 0)$, 点 A' 的坐标是 (x, y) 。把该问题抽象为一个质点 A' 从点 $A(x, y)$ 开始在单位圆上的运动, 如图 5 所示。

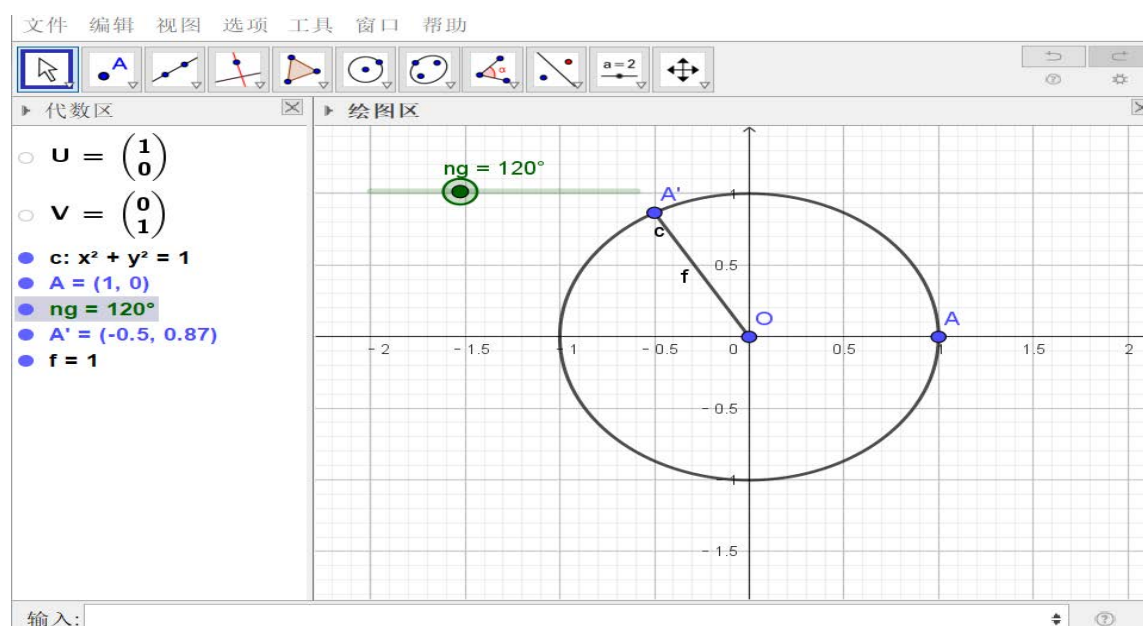


Figure 5. Create slider

图 5. 创建滑块

问题 1: 当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时, 点 A' 的坐标是什么? 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 点 A' 的坐标又是什么? 它们是唯一确定的吗?

师生活动: 学生讨论问题, 得到结果当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时, 点 A' 的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 点 A' 的坐标分别是 $(0,1)$ 和 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 它们都是唯一确定的, 点 A' 的坐标由转动角度和圆的半径决定。

设计意图: 要探究现实中周而复始的圆周运动, 将现实问题抽象化, 锻炼学生抽象的数学素养。在研究圆周运动时从圆上一点的位置变化情况出发, 研究特殊角下点 A' 坐标, 观察在角转动情况下点 A' 的横纵坐标, 体现由特殊到一般的数学思想方法, 进而总结点 A' 的坐标由转动角度和圆的半径决定。为方便师生观察探究, 我们可采用 GGB 动态展示角 α 在转动时点 A' 的坐标。

问题 2: 任意一个角 α , 它的终边 OA' 与单位圆交点 A' 的坐标能唯一确定吗?

师生活动: 学生思考讨论, 单位圆的半径不变, 因此点 A' 的坐标只与角 α 有关, 当角 α 确定时, 点 A' 的坐标是 (x,y) 也就确定了。

问题 3: 用 GGB 动态展示角 α 的变化过程, 如图 5 观察角 α 的终边 OA' 与单位圆的交点 A' 的坐标, 有什么发现? 能运用函数的语言刻画这种对应关系吗?

(三) 概念理解: 对任意一个实数 α , 它的终边 OA' 与单位圆的交点 A' 的横、纵坐标 x 、 y 都是唯一确定的, 有如下对应关系:

f : 任意角 α (弧度) $\rightarrow$ 唯一实数 x ;

g : 任意角 α (弧度) $\rightarrow$ 唯一实数 y 。

一般地, 在单位圆中, 任意一个角 α 它的终边 OA' 与单位圆交点 A' 的坐标, 点 A' 的横坐标 x 、纵坐标 y 都可由角 α 确定, 都是角 α 的函数。

设计意图: 从特殊到一般, 发现点 A' 的坐标与角 α 的对应关系满足函数的定义, 角的终边与单位圆的交点的横、纵坐标都是圆心角 α (弧度) 的函数, 这为三角函数的概念做好铺垫。

师生活动: 设 α 是一个任意角 $\alpha \in R$, 它的终边 OA' 与单位圆相交于点 $A'(x,y)$, 那么把点 A' 的纵坐标 y 叫做 α 的正弦函数, 记作 $\sin \alpha$, 即 $y = \sin \alpha$; 把点 A' 的横坐标 x 叫作 α 的余弦函数, 记作 $\cos \alpha$, 即 $x = \cos \alpha$; 把点 A' 的纵坐标与横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫作 α 的正切函数, 记作 $\tan \alpha$, 即 $\frac{y}{x} = \tan \alpha (x \neq 0)$ 。

问题 4: 任意角三角函数的定义域分别是什么呢?

学生思考: 正弦函数和余弦函数的定义域都是实数集, 即 $x \in R$, 对于正切函数而言, 要求点 A' 的横坐标 $x \neq 0$, 即角 α 的终边 OA' 不能位于 y 轴上, 那么正切函数的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$ 。

设计意图: 在问题的一步一步引导下, 确定三角函数的概念与定义域。用 GeoGebra 辅助教学引起学生的学习兴趣, 利于学生理解知识, 建立知识体系。

问题 5: 任意角三角函数的定义是否符合高中函数的定义呢?

师生活动: 教师提出问题后, 学生思考讨论。正弦、余弦、正切都是以角为自变量, 以单位圆上点的坐标或者坐标的比值为函数值的函数, 由于角的弧度与实数集之间存在一一对应关系, 所以三角函数可以看成是自变量为实数的函数。

按照函数的定义与常用的符号, 我们通常将它们记为:

正弦函数 $y = \sin x$, $x \in R$;

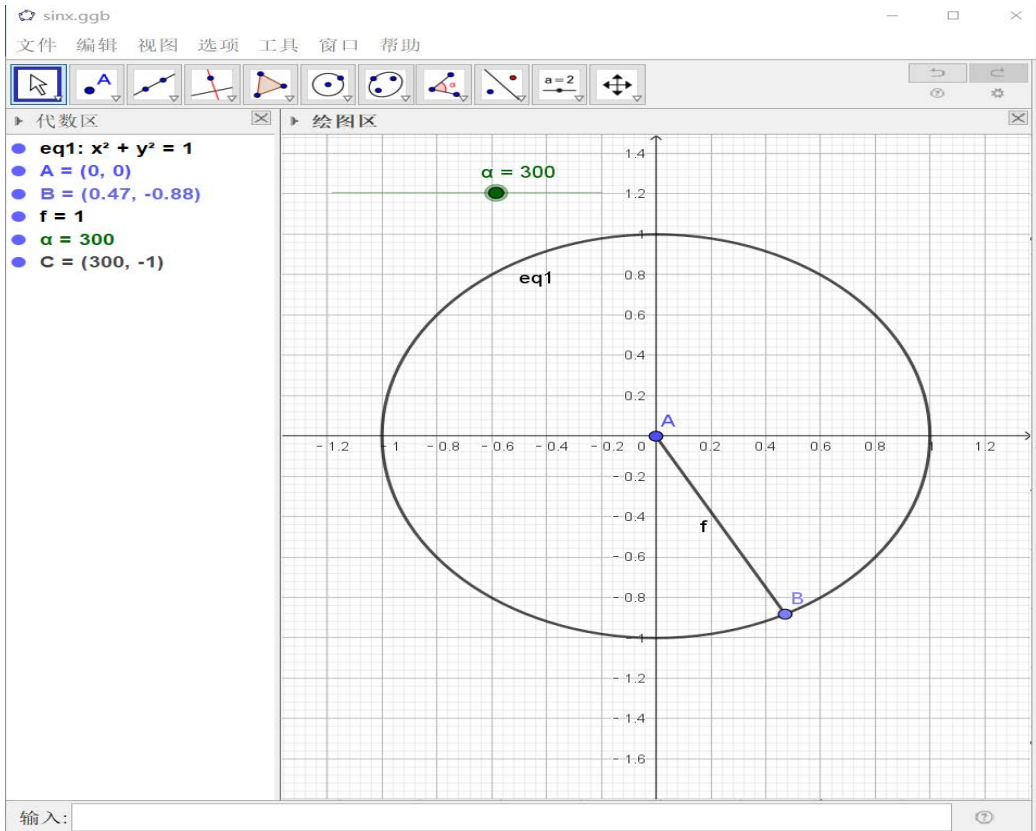
余弦函数 $y = \cos x$, $x \in R$;

正切函数 $y = \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)。

将正弦函数、余弦函数和正切函数统称为三角函数。

(四) 概念深析:

例: 求 $\frac{5\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值。



解: 在直角坐标系中, 作 $\angle AOB = \frac{5\pi}{3}$, 此时 $\angle AOB$ 的终边与单位圆的交点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

所以 $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$ 。

设计意图: 通过概念的简单应用, 明确用定义求三角函数值的基本步骤, 进一步理解定义的内涵。

(五) 课堂小结:

问题 6: 怎样建立三角函数的概念? 如何理解三角函数符号的意义? 经历三角函数概念的学习过程你体会到了哪些数学思想?

师生活动: 学生回答, 若不完整, 再请其他的同学进行补充。

设计意图: 回顾所学内容和学习过程, 感悟本节课涉及的数学思想方法, 交流分享关于本节课的收获。

4. 结论

三角函数对于高一学生有一定的挑战性, 首先因为高一学生受初中锐角三角函数概念的影响, 学生

在学习任意角三角函数的概念后较难接受其刻画周期运动变化的本质, 其次高中三角函数定义公式存在死记硬背现象, 难以将知识进行转化和迁移, 最后学生对三角函数模型实际情况了解甚少, 根据现实情景建立三角函数模型是一道难点。本文发挥 GeoGebra 教学软件的优势, 促进 GeoGebra 与三角函数深度融合的教学策略, 将教学软件和课堂深度融合, 不仅有利于教师的教学课堂有效安排, 而且吸引学生的学习兴趣, 加深学生对知识的理解[8]。GeoGebra 与数学教学的深度融合能够提高数学课堂教学效率, 提升学生的数学核心素养和能力, 因此 GeoGebra 与数学教学的深度融合不仅要考虑教与学的效果, 还要将数学核心素养的培养融入教学环节。GeoGebra 技术如何融入数学教学环节? 是否能提升数学核心素养的培养? 如何提升课堂效果? 这些问题都需要教师在使用技术软件要进行深入思考的问题。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 雷青兰. GeoGebra 软件在高中数学教学中的应用探究[J]. 数学学习与研究, 2023(26): 23-25.
- [3] 谭春荣. GeoGebra 与高中数学教学深度融合的实践[J]. 新课程教学(电子版), 2023(5): 151-152.
- [4] 金华. 《普通高中数学课程标准(实验)》与新版《高中数学课程标准》内容比较研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中央民族大学, 2017.
- [5] 郭璇. GeoGebra 与高中三角函数深度融合的教学研究[D]: [硕士学位论文]. 淮北: 淮北师范大学, 2023.
- [6] 沈梦浩. GeoGebra 在数学建模活动中的应用研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2023.
- [7] 汤丹. 基于 GeoGebra 应用的正弦函数图象线上教学实践[J]. 课程教材教学研究(教育研究), 2023(5): 26-27.
- [8] 凌翔. GeoGebra 软件辅助高中数学教学的实践研究[D]: [硕士学位论文]. 阜阳: 阜阳师范大学, 2023.