

落实波利亚解题思想，助力数学解题教学

——以高考概率与统计解答题为例

史荣华

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年5月19日；录用日期：2024年6月19日；发布日期：2024年6月26日

摘要

2019年全国I卷理数21题横空出世，概率统计解答题改变一如既往送分的常态，变得更加综合和创新。概率统计解答题蕴含丰富的现实情境，在高考卷中是信息量最大的一道题，会有一些学生得分率很低，引起一线教师的困扰。波利亚解题思想是数学教育领域的重要发现，对学生解题和教师解题教学起到至关重要的作用。本文简要分析高考概率统计解答题命题趋势，并利用波利亚解题思想分析学生解题困难，最后为一线教师提出四点提升学生概率统计大题解题能力的高效教学的建议。

关键词

波利亚解题思想，概率统计，高考数学，解题教学

Implement Polya Problem Solving Thought and Help Mathematics Problem Solving Teaching

—Taking the Probability and Statistics of College Entrance Examination as an Example

Ronghua Shi

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: May 19th, 2024; accepted: Jun. 19th, 2024; published: Jun. 26th, 2024

Abstract

In 2019, the national volume I introduced 21 rational number questions, marked a shift in the tra-

ditional approach to probability and statistical solution questions by incorporating more comprehensive and innovative elements. The inclusion of rich realistic situations in these questions has made them the most informative aspect of college entrance examination papers. However, there will be some students with very low scoring rate, causing problems for front-line teachers. Polya's problem-solving thought is a significant development in mathematics education that plays a crucial role in both student and teacher problem-solving abilities. This paper provides a brief analysis of the trend in college entrance examination probability and statistics solution questions, examines students' difficulties using Polya's problem-solving thought, and offers four suggestions for teachers to enhance students' ability to solve complex problems in probability and statistics.

Keywords

Polya Problem Solving Thought, Probability Statistics, College Entrance Examination Mathematics, Problem Solving Teaching

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017 版 2020 修订)》(以下简称“课标”)中将“概率与统计”作为必修、选择性必修和选修课程的一项重要内容[1]。高中阶段所学的“概率与统计”的知识一方面是对小学、初中阶段所学到的概率统计知识的进一步深化,另一方面也是将来在大学阶段学习《概率论与数理统计》的重要基础。随着互联网时代的发展,概率与统计在生活中的应用更为广泛[2]。

2019 年全国 I 卷理数 21 题概率统计作为整张试卷的压轴题引发了无数考生和教师的破防。概率统计从“送分题”变成“送命题”,这个变化确实超出了所有人的预料。从此以后,各地模拟题也开始对概率统计解答题进行创新。两年以后,新高考 II 卷的 21 题,同样也是概率统计大题位于六个解答题中靠后位置出现,由于本题有跨学科,跨模块的特点,在当年引起无数考生在考场破防。又过了两年,全国新课标 I 卷的 21 题、全国新课标 II 卷的 19 题,同样都是概率统计解答题,却以不同的难点被推上热搜。近期 19 题试卷的盛行,各地模拟题也喜欢将概率统计与数列、导数、高等数学等结合成为 17 分的送命解答题。

概率统计大题从“送分题”走上“送命题”的五年中,学生在做概率统计题的时候经常会出现问题,从而导致得分率很低。对此教师应该如何破解这样的难题?本文首先会简要交代这一部分的命题的特点,然后利用波利亚解题思想分析学生解题遇到的困难之处,最后给出一些办法解决问题。

2. 概率统计解答题命题上的特点

2.1. 重视真实问题情境的创设,以真实问题情境实现育人功能[3]

纵观近五年的题目,命题者充分把握概率统计知识在生活中的实际应用,创造出多种多样的真实情境——体育、医疗、环保、生物、气象、工程、竞赛等。考生在解决数学问题同时德育也受到教育,于潜移默化中考查学生模块知识掌握程度。

2.2. 重视本模块核心知识与关键能力的考查

近五年题目在考查学生“概率与统计”模块的“四基”、“四能”上下足了功夫。每道试题都在渗透随机思想、归纳思想和统计思想,考查学生独立性检验、回归分析、概率主干知识的同时,不忽视对

直方图、常见分布、计数原理、数字特征等知识的考查，在模块内综合性很强。整个过程中，命题者借助计算、证明、解释现象等形式考查了学生关键能力和核心素养的发展情况。

2.3. 命题新动态——跨模块命题

2019 年全国 I 卷 21 题、2021 年新高考 II 卷 21 题、2023 年新课标 II 卷 19 题，在这三道题中建立起概率统计与数列、函数与导数知识的联系，强调数学内部分支之间的联系，具有很强的模块间综合性的特点。

在近期模拟题中，大学数学板块知识以新定义形式给出，为了考查学生数学思维，命题者会在跨模块基础上利用这样的新定义，形成一道相对较难的题目。

3. 波利亚解题思想下学生解概率统计解答题出现的问题

3.1. 波利亚解题思想的概述

在数学教育领域，匈牙利著名数学家波利亚在《怎样解题》一书中，利用解题表的形式交代了如何解决数学题，其流程为：你必须理解题意 → 找出已知与未知间的联系 → 执行你的方案 → 检验已经得到的解答。强调拟定计划是解题的核心环节，而拟定计划的关键在于联想[4]。同时，波利亚还提出著名的“启发法”，交了解决一个数学问题要分以下四步完成，即“题目理解 → 制定计划 → 执行计划 → 回顾”，并给出具体的解题方法。

3.2. 学生解题所出现的问题

3.2.1. 题意理解不清

第 2 章已经阐述概率统计大题注重真实情境的设计，这也导致题目需要交代一些关于情境的背景信息，无形之中增加了学生的阅读量。学生在大量背景信息文字、图片中还要找到解题所需要的有效信息——未知、已知、条件，这对他们读题的能力提出了极高要求，从而在理解题目出现一定的障碍，2019 年全国 I 卷是一个典型例子。但是命题者感觉这些远远不够，还需要再具体小题中进行一些字眼、抽象信息、解题必要的背景信息的设置，进一步影响学生对题目的理解，具体案例如下所示：

案例 1. (2020 年全国 I 卷)

- (1) 求甲连胜四场的概率
- (2) 求需要进行第五场比赛的概率
- (3) 求丙最终获胜的概率

案例 2. (2023 年新课标 I 卷)

- (3) 已知：随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$ ， $i=1,2,\cdots,n$ ，则

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n q_i \quad (1)$$

记前 n 次(即从第 1 次到第 n 次投篮)中甲投篮的次数为 Y ，求 $E(Y)$ 。

案例 3. (2023 年全国乙卷)

- (2) 判断甲工艺处理后的橡胶产品伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高。(如果 $\bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$ ，则认为甲工艺处理后的橡胶产品伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高，否则不认为有显著提高)。

近期新结构试卷中，不难发现有些概率统计大题中涉及到大学本科阶段数学知识的新定义，有些同学对这样的新定义不理解也会造成解题出现困难，具体可以看下面三个案例：

案例 4 (2024 山东潍坊一模)

若 ξ, η 是样本空间 Ω 上的两个离散型随机变量, 则称 (ξ, η) 是 Ω 上的二维离散型随机变量或二维随机向量. 设 (ξ, η) 的一切可能取值为 (a_i, b_j) , $i, j = 1, 2, \dots$, 记 p_{ij} 表示 (a_i, b_j) 在 Ω 中出现的概率, 其中

$$p_{ij} = P(\xi = a_i, \eta = b_j) = P[(\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)] \quad (2)$$

(1) 将三个相同的小球等可能地放入编号为 1, 2, 3 的三个盒子中, 记 1 号盒子中的小球个数为 ξ , 2 号盒子中的小球个数为 η , 则 (ξ, η) 是一个二维随机变量。

① 写出该二维离散型随机变量 (ξ, η) 的所有可能取值;

② 若 (m, n) 是①中的值, 求 $P(\xi = m, \eta = n)$ (结果用 m, n 表示)。

(2) $P(\xi = a_i)$ 称为二维离散型随机变量 (ξ, η) 关于 ξ 的边缘分布律或边际分布律, 求证:

$$P(\xi = a_i) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} \quad (3)$$

案例 5 (2024 杭州二模)

(2) 把(1)中“使得 $P_p(Y = k)$ 的取值达到最大时的 p 作为 p 的估计值 \hat{p} ”的思想称为最大似然原理. 基于最大似然原理的最大似然参数估计方法称为最大似然估计. 具体步骤: 先对参数 θ 构建对数似然函数 $l(\theta)$, 再对其关于参数 θ 求导, 得到似然方程 $l'(\theta) = 0$, 最后求解参数 θ 的估计值. 已知 $Y \sim B(n, p)$ 的参数 p 的对数似然函数为

$$l(p) = \sum_{i=1}^n X_i \ln p + \sum_{i=1}^n (1 - X_i) \ln(1 - p) \quad (4)$$

其中 $X_i = \begin{cases} 0, & \text{第 } i \text{ 次摸出白球} \\ 1, & \text{第 } i \text{ 次摸出红球} \end{cases}$. 求参数 p 的估计值, 并且说明频率估计概率的合理性。

案例 6 (2024 东三省二模)

(3) 记(2)中所得概率 P_n 的值构成数列 $\{P_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 。

② 数列收敛的定义: 已知数列 $\{a_n\}$, 若对于任意给定的正数 ε , 总存在正整数 N_0 , 使得当 $n > N_0$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$ (a 是一个确定的实数), 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a . 根据数列收敛的定义证明数列 $\{P_n\}$ 收敛。

3.2.2. 建立已知和未知之间关系时出现困难**(1) 基础掌握不扎实**

从基础知识角度来看, 正如第二章所述, 概率统计大题考察的知识非常综合, 稍微有一点掌握不好就会导致整题崩的情况. 命题老师喜欢一些冷门知识点来检验学生知识上掌握的扎实程度, 比如: 在 2022 年新高考 I 卷中, 第二问的第一部分要求学生利用条件概率的知识和题目中给出的 R 的信息证明二者相等, 命题老师抓住学生知识的盲区——条件概率设置题目。

从基本思想方法角度来看, 概率统计解答题主要考查学生的随机思想、归纳思想和统计思想, 借助计算、证明、绘制图表等手段说明实际生活中的问题. 有些学生缺乏这些思想方法, 或有这些思想方法但不够深入, 同样导致题目做不出来. 近五年统计解答题这样的特点呈现的非常明显, 有些学生正是因为这样思想缺乏, 导致在归纳数据时候不会归纳甚至出现错误, 进而导致后续独立性检验、回归分析时候出现错误, 从而导致失分。

(2) 题目积累过少

我们虽然现在排斥题海战术, 但是在高考备考中, 适度的类似习题能够帮助学生看到新的问题以后

实现正向迁移。在现行教学中,学校训练的基本上是一些常规题,因此在高考中遇到正常的概率统计解答题得分率还算比较乐观。但是现在概率统计大题走上“不归路”,难免会遇到一些创新题,而学校疏于这方面的训练,学生自身也忽视这方面题目的练习,从而影响学生在考场上对创新题的发挥,心态受挫,解题也就出现困难。比如:2021年新高考Ⅱ卷中,概率统计与函数导数实现了一次浪漫的邂逅,很多学校和学生根据2019年的考试情况只练一些概率统计与数列结合的题目,忽视了对这样综合题目的训练,导致考生在考场上极其崩溃,心态受挫,影响了考生解题。

(3) 思维能力不足

这里仍用2019年全国Ⅰ卷、2021年新高考Ⅱ卷的概率统计解答题举例。这两道题的第二问,都是在主情境描述的基础上,新给出一定的抽象情境,让学生说明一些问题。学生在其他模块学习过程中忽视了对知识本质的掌握,进而导致该发展的思维能力没有发展起来,从而在解题中出现重大问题。比如:在函数与方程的关系学习中,学生忽视了对二者关系的本质的学习,函数零点与方程的相互转化思维没发展起来,就会导致2021年新高考Ⅱ卷思路受阻,从而导致解题出现困难;如果在学习数列的时候忽视递推公式本质学习,思维能力没有发展起来,那么遇到2019年全国Ⅰ卷二阶递推公式求证给定数列为等比数列就会感到迷茫无所适从,从而影响学生题目的解答。

(4) 意志品质不强

在概率统计解答题中,学生离不开对数据的处理、分析与描述。有些学生看到很多的数据、很不好算的数据、复杂的题干就开始摆烂,产生恐惧与厌烦心理,从心理学的角度影响了学生的解题。还有些同学在算的过程中就开始深度怀疑自己,即使自己方法正确也不相信自己继续计算,从而影响最后题目成功做出。这些都是意志品质不强导致解题出现问题。

3.2.3. 执行解题方案过程中忽视书写细节

根据波利亚解题表,学生如果能够制定出解决问题的方案,那么大概率会做出来这道题。但是有的时候一些学生受到自身性格的影响,对于写出的答案不拘小节,或者书写不规范导致在概率统计大题中频频扣分,这也就是教师常说的“对而不满”的现象。比如:在某些地区批阅独立性检验这个大题的时候,计算出来的 K^2 要求先化简到既约分数形式,再给出近似值。有些考生直接把这句话当耳旁风,结果明明结论都是对的,就是因为格式上不拘小节导致得不到满分。

3.2.4. 忽视对题目答案进行检验

从现实的情况来看,学生很难有时间对自己所做的答案进行检验,但是在概率统计大题中,由于这一部分与实际生活紧密联系,因此对答案的检验确是十分重要的一个环节。有些学生计算能力让人堪忧,频繁跑数,得出不符合实际的答案;还有一些同学能算对,但是忽略了概率统计中的一些性质或者生活常识忽视对答案的决策,从而导致失误。

受应试教育思想的影响,学生更多地强调记住解题的通性通法,而忽视了对题目的深度思考,这显然是不利于培养学生的创新意识。《课标》指出:数学促进学生创新意识的发展[1]。这样的做法显然是与课标的精神是背道而驰的。长期以往会导致学生解决一些概率统计创新题(比如:2019年全国Ⅰ卷、2021年新高考Ⅱ卷)的能力低下。

4. 实现概率统计解答题的有效教学一些思考

4.1. 狠抓读题审题,扫清题目阅读障碍

波利亚解题思想第一步就是理解题目意思,对此教师在教学过程中也应该遵循这一理论,具体而言就是狠抓学生读题审题。教师可以在解答题的教学中加入一些关于题目已知、未知、条件是什么的思考,

并且不断地向学生渗透这一想法，让学生形成记忆。比如在讲授 2020 年全国 I 卷可以加入如下环节：

环节 1:

师：请大家阅读这一题目思考：能否将题目中的赛制规则用图示的方式呈现出来呢？

(生阅读题目，并且尝试绘画；师让学生分享自己的想法，给出过程性评价)

师：刚才问题回答的非常好，画图有助于帮助我们梳理题目中信息，大家在今后的做题中，如果遇到复杂的问题，不妨试着把图画一画，你会有很大的发现。那么现在请同学们继续思考：能否交代一下本题的已知、未知、条件都是什么呢？

(生思考后回答，师给出过程性评价)

由于新结构试卷利用新定义形式考查学生数学核心素养和数学思维，而新定义一般出现在大学本科学数学中。根据波利亚解题理论，对题目背景信息的熟悉程度也会影响学生的解题。对此，在低年级的时候，学校可以开设数学拓展课，选取与现在所学阶段内容相匹配的高观点知识供大家涉略；在高年级的时候，一线中学数学教师需要将新定义问题作为一个复习专题进行复习，并需要给学生补充交代一些高观点知识，例如：数列极限、多维随机变量、级数、泊松分布、大数定律等，以便解题的时候能够扫清阅读障碍，帮助学生更好地实现解题。

4.2. 重视基础教学，夯实“四基”与“四能”

知识掌握程度、思想方法的熟练程度都会影响一个学生的解题情况，根据波利亚解题思想，教师应该关注学生平时在概率与统计模块中基础知识的教学和基本思想与方法的渗透。“基础不牢，地动山摇”，一旦学生基础出现问题，那么在解题中会表现的非常不好。一方面，教师应该教授课标中所规定要掌握的内容和教材提出的全部知识点，从知识的角度让学生不留死角，为解题提供必要的知识基础。另一方面，数学思想与方法是需要渗透的，不是一下子就完成的，教师在备课的过程中一定要坚持渗透数学思想方法的原则，帮助学生掌握知识的本质，从而提高学生的思维能力、帮助他们更好地进行解题。

例如在条件概率的教学中，教师在备课过程中要狠下功夫，研读教材和教学参考用书，厘清条件概率的本质究竟是什么，在什么样的场合使用条件概率。只有自己弄清楚了，借助合理的教学活动才能够给学生讲明白。再比如在独立性检验的教学过程中，教师备课的时候需要借助一系列的教学活动向学生渗透统计推断思想[5]，理解清楚独立性检验的本质是什么，从而帮助学生掌握这一知识，形成能力，从而帮助学生解题。

4.3. 精讲精练题目，减负与高效齐飞

我国现在处于素质教育阶段，高中的教育教学也需要迎合当今“减负”的主旋律。但是高中学习情况最后用高考进行检验，对此在教育教学中，高效也是非常重要的。《中国高考评价体系》虽然有打击“死记硬背和机械刷题”的倾向[6]，但是适度的刷题，仍然对学生掌握知识有着巨大的帮助。对此，教师在概率与统计的教学中，应该密切关注考情，选择一些具有代表性的题目，将其归类整合，形成完整的知识体系和解题方法体系，亲自在题海中找到对学生解题能力培养有益的东西，切实减轻学生学业负担，提高课程的效率。

4.4. 重视限时训练，培养考场习惯

根据波利亚解题思想，学生的思维习惯和考场习惯对学生的解题有影响。学生按照上面设想学习过概率与统计不代表能够掌握并熟练应用于概率统计解答题中。对此，教师应该坚持波利亚解题思想的最后两个层次，安排一些限时训练，观察学生的状态，从而发现问题、分析问题并解决问题，减少一些个

人习惯的原因导致解题困难的现状。

5. 小结

概率统计解答题总体而言相对稳定,但是略有创新。但是对于学生而言,创新题就是送命题。作为中学数学教师,我们应该坚持波利亚解题思想,运用所掌握的教育教学知识、经验、在大学期间掌握到的数学知识,帮助学生解决解题过程中遇到的困难,从而让学生更好地发挥自己解题的能力。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 王孟利. 2019 年高考理科数学概率统计试题分析及教学对策研究[D]:[硕士学位论文]. 信阳:信阳师范学院,2020. <https://doi.org/10.27435/d.cnki.gxsfc.2020.000137>
- [3] 刘海涛. 探析高考真题 明晰备考方向——对 2023 年全国数学新高考II卷试题的评析与备考建议[J]. 中学教研(数学), 2023(9): 37-40.
- [4] 王杰, 高明. 借助波利亚解题思想, 指导中学数学解题教学[J]. 亚太教育, 2015(16): 36.
- [5] 魏孝章, 姜根明. 概率统计中的数学思想[J]. 陕西教育学院学报, 2003(1): 67-69.
- [6] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京:人民教育出版社, 2019.