

指向高中生直观想象素养的教材对比分析

——以“人教A版”和“鄂教版”必修中函数相关内容为例

乔雄志, 王桂华

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2024年5月23日; 录用日期: 2024年6月22日; 发布日期: 2024年6月29日

摘要

《普通高中数学课程标准(2017版)》提出了六大数学学科核心素养。直观想象是六大数学核心素养要素之一, 其在培养学生逻辑思维能力、培养学生建模能力、发展学生空间观念等方面有着重要应用。本文从数量分布、直观想象素养水平、呈现位置和选材情境对涉及直观想象的内容进行分析, 并对教师的教学提出如下建议: 在教学过程中, 教师要多提供机会让学生去观察、去想象, 引导学生从空间的角度去分析, 以此发展学生的直观想象能力, 提高学生的数学核心素养。

关键词

“人教A版高中数学必修第一册”, “鄂教版高中数学必修第二册”, 直观想象, 统计与分析, 思考与建议

A Comparative Analysis of Teaching Materials for High School Students' Visual Imagination Literacy

—Taking the Function Related Content in the Compulsory Courses of “Human Education A Edition” and “Hubei Education Edition” as an Example

Xiongzhi Qiao, Guihua Wang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: May 23rd, 2024; accepted: Jun. 22nd, 2024; published: Jun. 29th, 2024

Abstract

The Standard of Mathematics Curriculum for Senior High School (2017 edition) puts forward six

core qualities of mathematics subjects. Intuitive imagination is one of the six core qualities of mathematics, which has important applications in training students' logical thinking ability, modeling ability and spatial concept. This paper analyzes the content involving intuitive imagination from the perspective of quantity distribution, visual imagination literacy level, presentation location and material selection situation, and puts forward the following suggestions for teachers' teaching: In the teaching process, teachers should provide more opportunities for students to observe and imagine, and guide students to analyze from the perspective of space, so as to develop students' intuitive imagination ability and improve students' core mathematical literacy.

Keywords

A Version of the High School Mathematics Compulsory Volume 1, Hubei Edition of High School Mathematics Compulsory Volume 2, Intuitive Imagination, Statistics and Analysis, Thoughts and Suggestions

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017 版)》提出了六大数学学科核心素养,包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析[1]。在知网文献库中以数学学科核心素养为主题的文献很多,包括数学抽象 769 篇、逻辑推理 488 篇、数学建模 7656 篇、直观想象 563 篇、数学运算 846 篇、数据分析 14,000 多篇。关于直观想象的研究相对较少,因此本文以直观想象为主题,通过分析对比人教 A 版与鄂教版的教材,重在培养学生的直观想象能力,提升其数形结合的能力,形成数学直观。

直观想象是六大数学核心素养要素之一,是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化,利用空间形式特别是图像来理解和解决数学问题的素养。其在培养学生逻辑思维能力、培养学生建模能力、发展学生空间观念等方面有着重要应用[2]。为了更好地培养学生数学直观想象能力。论文将以“2019 人教 A 版”和“鄂教版”中函数相关内容为例[3] [4],从数量分布统计、呈现方式和选材情境对涉及直观想象的内容进行分析。探究其特点,并以此为基础,针对如何提升学生直观想象能力提出思考与建议。

2. 研究设计

2.1. 研究内容

选取“人教 A 版”必修第一册单三至第五单元和“鄂教版”必修第二册为研究内容。各地方版本教科书虽然总体上都是根据“2017 年版课标”来编写,但会因为地方差异、编写人员观念等各种原因,存在各种差异。为了更好地提升高中生直观想象素养,本文将从数量分布统计、核心素养水平、呈现方式和选材情境对涉及直观想象的内容进行分析。探究其特点,并以此为基础,针对如何提升学生直观想象素养提出思考与建议。

2.2. 研究方法

为了对“人教 A 版”和“鄂教版”中函数相关内容有一个全面的分析。首先,从每一节中涉及直观想象的内容(包括给出图形以及明确让学生作图的内容)进行数量分布统计,再从数学学科核心素养水平、呈现位置和选材情境四个维度进行具体分析,其中数量分布统计包括直观想象在每一章数量占比和密度;根

据“2017年版课标”将数学学科核心素养分为三个水平；呈现位置包括引入、正文、练习、习题、复习题、章末阅读材料等；根据情境的内容，可将情境分为以下三种类型：生活情境包括与日常生活相关的情境；社会情境包括生活中遇到的一些实际问题的情境；科学情境：由一些科学问题和科学知识组成的情境。

3. 统计与分析

3.1. 数量分布统计

数量分布统计是对数据分析的一种最为直观的方式，也是体现教材特点的一种重要方式。为了对“人教A版”必修第一册单三至第五单元和“鄂教版”必修第二册中涉及的直观想象有一个清晰的掌握，首先对其各节内容中直观想象进行数量分布统计，其具体情况如表1所示。“人教A版”将函数相关内容分为了三个单元，而“鄂教版”将函数相关内容分为了四个单元，但是内容划分并不影响直观想象素养。因此，为方便统计，将“人教A版”的内容按照“鄂教版”的内容进行分类。(注：密度 = 直观想象的数量 ÷ 相关章数)

Table 1. Visualize the quantity distribution table

表 1. 直观想象数量分布表

内容	版本		合计
	人教 A 版	鄂教版	
函数的概念与性质	43	31	74
幂函数、指数函数、对数函数	35	17	52
三角函数	61	46	107
函数的应用	42	13	55
合计	181	107	288
密度	45.25	26.75	

由表1可知，在“人教A版”中直观想象数量总计为181，平均章节密度为45.25，而“鄂教版”中直观想象数量总计为107，平均章节密度为26.75。从数量分布来看，两版教材有很多异同点：两版教材中三角函数涉及直观想象最多，占比分别为33.7%和43.0%，其次是函数的概念与性质，占比分别为23.8%和29.0%，幂函数、指数函数、对数函数在两版教材中占比分别为19.3%和15.9%，而函数的应用在两版教材的占比分别为23.2%和12.1%。从表中可以明显地看出在函数内容中“人教A版”明显比“鄂教版”更加倾向于利用图形来进行教学；“人教A版”中三角函数章节涉及直观想象最多，其他三部分分布相对均匀，而“鄂教版”中三角函数分布最多，函数的概念与性质次之，其他两部分分布较少。

同时，对“人教A版”和“鄂教版”中函数相关内容中直观想象出现的数量分布进行方差分析。结果如表2所示。

Table 2. Visualize the content distribution analysis of variance

表 2. 直观想象内容分布方差分析

差异	平方和	自由度	均方	<i>F</i>	<i>p</i> 值
组间	684.500	1	684.500	3.943	0.094
组内	1041.500	6	173.583		
总计	1726.000	7			

根据表2结果可知两版教材中，在涉及直观想象的函数内容的方差分析中*F*统计量为3.943，概率*p* >

0.05, 说明两版教材在函数内容中无显著差异, 分布特征较为相似, 因此不需要做进一步分析。

从数量分布统计结果可以明显地感受到不管是“人教 A 版”还是“鄂教版”都十分重视培养学生的直观想象能力, 特别是在函数的概念与性质和三角函数两部分内容。在函数的概念与性质这一部分内容中, 学生初次接触函数的概念, 需要通过图形抽象出函数的概念, 并且运用函数的图形来学习函数的性质; 而在三角函数这部分内容与学生之前学习的函数内容相比, 是一个全新的内容, 学生一时间可能无法理解, 因此为使学生更生动地理解掌握同样需要从现实情境或者图形中抽象出它的概念, 性质。在函数内容中, 两版教材中都多次给出函数及其图像, 以培养学生的直观想象能力。但是需要注意的是“鄂教版”在函数的运用和幂函数、指数函数、对数函数中, 直观想象涉及内容较少, 可能因为幂函数、指数函数、对数函数在高考中不易出难题, 课本知识也相对比较简单再加上学生已经理解并掌握了函数的概念与性质, 所以在这部分内容中“鄂教版”教材并不怎么重视直观想象; 而函数的应用中, 大部分问题都与现实问题息息相关, 以及这部分内容占比很小, 所以在这部分内容中“鄂教版”教材也不怎么重视直观想象。但是, 为了更好地培养学生的直观想象能力, 应当适当在这两部分内容中适当增加部分图形, 以更好地渗透数形结合思想, 发展其数学直观。

3.2. 直观想象素养水平分析

为了对两版教材中直观想象素养水平有一个清楚的认识, 本文将依据“2017 年版课标”将直观想象素养水平划分为三个水平。水平一: 借助图形进行知识点的讲解或者借助图形进行解题; 水平二: 能够通过图形解决实际问题或数学问题; 水平三: 能够综合利用图形, 对蕴含其他学科知识的数学难题进行求解。经过统计, 直观想象素养水平分布表如表 3 所示。

Table 3. Core literacy level distribution table

表 3. 核心素养水平分布表

核心素养	版本	人教 A 版	鄂教版	合计
直观形象素养水平一		115	71	185
直观形象素养水平二		42	24	66
直观形象素养水平三		24	12	36
合计		181	107	288

从表 3 中, 可以明显地看出不论是“人教 A 版”还是“鄂教版”直观想象核心素养水平一占比最多, “人教 A 版”中占比为 63.5%, 而“鄂教版”中占比为 66.4%, 其次是直观想象核心素养水平二, 占比分别为 23.2%和 22.4%, 最后是直观想象核心素养水平三占比分别为 13.3%和 11.2%。这三种直观想象素养水平之间是一种循序渐进的关系, 水平一是水平二的基础, 而水平二又是水平三的前提。因此, 两版教材中都是水平一比例最多, 其次是水平二, 最后是水平三。

同时, 对直观想象素养水平进行方差分析, 结果如表 4 所示。

Table 4. Analysis of variance of visual imagination literacy level

表 4. 直观想象素养水平方差分析

差异	平方和	自由度	均方	<i>F</i>	<i>p</i> 值
组间	912.667	1	912.667	0.554	0.498
组内	6589.333	4	1647.333		
总计	7502.000	5			

根据表 4 结果可知两版教材中,在直观想象素养水平的方差分析中 F 统计量为 0.554, 概率 $p > 0.05$, 说明两版教材在素养水平领域无显著差异, 分布特征较为相似, 因此不需要做进一步分析。

从分析结果可知, 两版教材都很重视直观想象素养。并且以一种循序渐进的方式, 由浅到深、由表及里逐步培养学生的直观想象能力。首先让学生通过图形发现数学规律并将其描述出来; 在此基础上, 让学生通过图形之间的关系探索数学规律, 解决问题; 最后让学生利用图形之间和图形与数量的关系, 通过想象对复杂的数学问题进行抽象, 从而解决问题。

3.3. 呈现位置分析

“鄂教版”教材在结构上分为章头语、引入、正文、练习题、习题、复习题、信息技术链接、阅读与讨论、思考与实践。“人教 A 版”教材在结构上分为章头语、引入、正文、练习、习题、复习题、阅读与思考、信息技术应用、探究与发现、文献阅读与数学写作。可见两版教材在结构上有所差异。为了方便分析, 选取两版教材都有的引入、正文、练习、习题、复习题进行分析, 此外将其他部分归为阅读与实践一并分析。两版教材都有章头语, 但是“人教 A 版”将函数分为四个单元, “鄂教版”将函数分为三个单元, 且两版教材一共七个章头语数据太少, 故不对章头语进行分析。引入是为了帮助教师开启新知识的学习, 一般出现在每节内容的开头; 正文则出现在引入之后, 其内容包括知识点、例题、思考以及探究; 练习和习题与本节内容的息息相关, 旨在帮助学生更好地理解所学知识; 复习题则于本章内容关系密切, 包含了本章所有内容。它的目的与练习、习题一致, 因此论文在分析时将三者统一归为习题。经过统计, 直观想象具体数量分布统计如表 5 所示。

Table 5. Visualize the position distribution table

表 5. 直观想象呈现位置分布表

内容	版本		合计
	人教 A 版	鄂教版	
引入	20	12	32
正文	65	49	114
习题	84	32	116
阅读与实践	9	10	19
合计	178	103	281

由表 5 可知两版教材直观想象呈现的位置有部分差别。“人教 A 版”教材中习题涉及直观想象最多, 其次是正文, 两者占比接近 85%; 而“鄂教版”教材相反, 正文涉及直观想象最多, 其次是习题, 两者占比接近 80%。两版教材都偏向用图形来讲授新课, 通过图形抽象出新概念, 使学生理解掌握相关知识点, 并让学生通过图形或者通过画图来巩固新知识。而“人教 A 版”更加倾向于利用图形来进行新知识的学习以及巩固新知识。

同时对直观想象的呈现位置的分布进行方差分析, 结果如表 6 所示。

Table 6. Visualizing the analysis of location variance

表 6. 直观想象呈现位置方差分析

差异	平方和	自由度	均方	F	p 值
组间	703.125	1	703.125	0.868	0.387
组内	4857.750	6	809.625		
总计	5560.875	7			

根据表 6 结果可知两版教材中,在直观想象的呈现位置的方差分析中 F 统计量为 0.868, 概率 $p > 0.05$, 说明两版教材在呈现位置领域无显著差异, 分布特征较为相似, 因此不需要做进一步分析。

从分析结果可知, 两版教材都十分重视培养学生的直观想象能力。不仅将直观想象与课程内容结合在一起, 还将其与课后作业相结合, 充分渗透了数形结合思想, 发展了学生的数学直观, 潜移默化地培养学生的直观想象素养。

3.4. 选材情境分析

情境是搭建在数学知识与现实世界中的桥梁, 目的之一是更生动地向学生展示数学的价值与意义[5], 因此情境的选取显得尤为重要。根据情境的内容, 可将情境分为以下三种类型: 生活情境包括与日常生活相关的情境; 社会情境包括生活中遇到的一些实际问题的情境; 科学情境: 由一些科学问题和科学知识组成的情境。经过统计, 直观想象情境类型分布表如表 7 所示。

Table 7. Visualize the situation type distribution table

表 7. 直观想象情境类型分布表

情境类型	版本		合计
	人教 A 版	鄂教版	
生活情境	9	8	17
社会情境	20	9	29
科学情境	18	44	29
合计	47	28	75

由表 7 可以明显地看出, 在函数内容中“人教 A 版”比“鄂教版”运用了更多的情境来培养学生的直观想象能力, 更加贴近现实世界地渗透数形结合思想, 发展学生的数学直观。

同时, 对直观想象情境类型进行方差分析。结果如表 8 所示。

Table 8. Analysis of variance of visualized scenario type

表 8. 直观想象情境类型方差分析

差异	平方和	自由度	均方	F	p 值
组间	60.167	1	60.167	3.282	0.144
组内	73.333	4	18.333		
总计	133.500	5			

由表 8 结果可得, 在直观想象内容的选材情境分析中, 两版教材之间不具有显著性差异, $p > 0.05$, 分布特征较为相似, 因此不需要做进一步分析。

从总体分析结果来看, “人教 A 版”和“鄂教版”函数相关内容都非常重视学生的直观想象素养, 但是“人教 A 版”更倾向于通过情境帮助学生来感悟和内化直观想象。两版教材中多次出现图形, 让学生在学生学习的同时, 注重数形结合, 发展他们的数学直观, 培养他们的直观想象能力。

4. 思考与建议

4.1. 思考

通过对比“人教 A 版”和“鄂教版”函数相关内容可以发现, 两版教材中都出现很多图形, 贯穿于每章节内容的各个部分, 潜移默化地渗透数形结合思想, 发展学生的数学直观。都十分重视培养学生的

直观想象能力。但是在教学过程中, 教师能否真正利用好这些图形, 能否真正渗透数形结合思想, 发展学生数学直观, 培养学生的直观想象能力以及学生在学习过程中能否理解图形的用意, 发展自己的数学直观, 使自己的直观想象能力得到提升是一个值得考虑的问题。此外, 在函数的应用中, 两版教材涉及直观想象的内容相对较少。学生能否利用直观想象来解决与现实相关的实际问题亦值得思考。

4.2. 建议

解题过程中, 借助图形可以有效降低思维难度, 优化运算过程, 提升解题的效率。例如, 求某公司销售某种产品用哪种方案销售利润更大时, 可以将相关函数的解析式求出来之后, 将其图象画出来进行对比分析, 这样可以直观地根据情况选择不同的方案以获取最大利润。教学过程中, 教师要多提供机会让学生去观察、去想象, 引导学生从空间的角度去分析, 以此发展学生的直观想象能力, 提高学生的数学核心素养。例如, 在学习函数的周期性时, 学生可能无法理解口头语言或者文字语言, 这时教师可以将函数图象画出用更直观的方式使学生理解函数的性质。因此, 在日常学习中, 教师要重视渗透数形结合思想, 引导学生利用图形语言来表达世界, 提升学生的数学学习能力。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 5.
- [2] 马明. 关注直观想象素养提升数学综合学力[J]. 数学教学通讯, 2023(18): 68-69.
- [3] 章建跃, 李增沪, 李勇, 李海东, 李龙才, 等. 普通高中教科书数学必修第一册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [4] 彭双阶, 徐胜林, 胡典顺, 郭熙汉, 等. 普通高中教科书数学必修第二册[M]. 武汉: 湖北教育出版社, 2019.
- [5] 梁玮, 胡典顺. 情境视角下的 2019 版普通高中数学(鄂教版)教材分析[J]. 数学通讯, 2020(22): 1-5.