

基于HPM的数学建模思想融入高中数学的教学设计

——以等差数列的前 n 项和公式为例

王景

苏州科技大学数学科学学院, 江苏 苏州

收稿日期: 2024年5月24日; 录用日期: 2024年6月23日; 发布日期: 2024年6月30日

摘要

数学知识的学习过程是学生在已有基础上主动建构的过程。数学史与数学文化有效融入数学知识的学习有助于学生更好地经历数学知识层层深化的过程, 感受到深厚的数学文化。同时, 通过还原数学家解决问题过程为主线的情境, 有助于提升学生的问题解决与创新能力。本节课精心选取我国古代杨辉良马图的数学史, 通过设计问题串, 促使学生主动发现问题、提出问题、分析问题和解决问题。

关键词

HPM, 教学设计, 等差数列的前 n 项和

The Mathematical Modeling Idea Based on HPM Is Integrated into the Teaching Design of High School Mathematics

—Taking the First n Terms and Formulas of Arithmetic Series as an Example

Jing Wang

School of Mathematical Science, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: May 24th, 2024; accepted: Jun. 23rd, 2024; published: Jun. 30th, 2024

Abstract

The learning process of mathematical knowledge is a process that students actively construct on the existing basis. The effective integration of mathematical history and mathematical culture into the study of mathematical knowledge helps students to better experience the deepening process of mathematical knowledge and feel the profound mathematical culture. At the same time, it is helpful to improve students' problem-solving and innovation ability by restoring the situation in which mathematicians solve problems. This lesson carefully selects the mathematical history of ancient Yang Huiliang Horse Map in our country, and encourages students to actively discover, propose, analyze and solve problems by designing problem strings.

Keywords

HPM, Teaching Design, Sum of the First n Terms in an Arithmetic Sequence

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题的提出

《义务教育数学课程标准(2022年版)》在2011年版课标的基础上提出数学课程要培养学生的核心素养,初中阶段要培养学生的九大核心素养,其中包括模型观念[1]。《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》提出,数学课程要培养高中生包括数学建模在内的六大数学学科核心素养[2]。模型观念和数学建模都强调了模型思想在数学学习过程中的重要性。在我国教育改革工作推进的过程中,学者们对模型思想的研究较多,但对基于HPM视角的模型思想融入高中数学教学的应用研究并不多见。鉴于模型思想与数学史和数学教育的紧密联系,所以,本文基于HPM视角将模型思想融入高中数学教学设计,为一线教师的教学提供一定的参考。

2. 教学解析

2.1. 教材分析

“等差数列的前 n 项和公式”选自高中数学人教A版选择性必修第二册,在之前的学习过程中学生已经掌握了数列的基本概念,了解了等差数列的概念和通项公式,学生对于等差数列有了初步的认知,同时对于数列的求和也有一定的经验。等差数列前 n 项和为后续学习等比数列的知识提供经验,奠定基础,对数列的知识完成第一次深入探究,同时该内容包含大量的从实际生活中抽象出的数学问题,与学生的实际生活紧密联系,帮助学生完成知识的应用:在该部分的公式的推理过程中也对于学生的逻辑推理,数学运算的核心素养得到了发展,为学生核心素养的发展提供帮助,为培养学生的创新能力和实践能力提供帮助。教材由高斯求和引入,得出等差数列前 n 项和公式。已有教学实践表明,学生小学就学习过高斯求和法,教材情境较难引起学生学习共鸣,实现深度学习。因此,本课通过深挖《九章算术》教学价值,创新性地设计了问题情境,生动还原了杨辉解决等差数列求和问题的探究历程。

2.2. 教学目标

- 1) 与教师共同完成等差数列前 n 项和的公式推理，理解并掌握等差数列 S_n 计算公式；
- 2) 能够利用等差数列的前 n 项和公式解决实际问题，发展逻辑推理、数学运算与数学建模素养；
- 3) 在完成等差数列前 n 项和的学习过程中提高数学学习兴趣，感知我国古代数学的优良传统和伟大成就，培养发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力，增强协作能力和交流能力。

2.3. 教学重难点

重点：等差数列前 n 项和公式及其应用；

难点：等差数列前 n 项和公式的推导。

3. 教学过程

3.1. 利用史料，提出问题

师：我国古代数学巨著《九章算术》中有这样一个故事：今有良马与驽马发长安至齐，齐去长安三千里。良马初日行一百九十三里，日增十三里。驽马初日行九十七里，日减半里……

问题 1 故事中，有哪些与我们上节课所学有关的知识呢？

生 1：等差数列。

问题 2 你能提出与“等差数列”相关的问题吗？

生 2：日行程和。

生 3：何日到达齐。

【设计意图】这是一个知识觉醒的过程。首先，通过《九章算术》中的故事引出本节课的学习重点，帮助学生建立前后知识点之间的联系，发散学生的思维，让学生发现并提出问题；并借助数学史的故事，使学生自己提出问题去解决，激发学生的好奇心和探究欲，培养学生的问题意识。

3.2. 师生合作，解决问题

师：我们首先以良马为例来解决第一个问题，如果我们要求良马前 10 日的行程和，你该怎么求呢？

问题 3 能否求出良马前 10 日的日行程和？

生 4：高斯求和法。

教师活动：对学生给予肯定，带领学生共同深入研究高斯的算法，同时将高斯的算法给出新的数学方法——“首尾配对法”。并带领学生探讨高斯算法的本质是：利用乘法解决加法运算，通过将不同项求和问题转化为相同项求和，进而把加法转化为乘法来简化运算。

问题 4 能否利用“高斯求和法”求出良马前 11 日的日行程和 S_{11} ？

教师活动：组织学生思考计算，鼓励学生发散思维，尝试采用不同的方法计算结果。完成计算活动后，让学生总结归纳不同方法之间的区别与联系，带领学生发现解题关键依旧是“收尾配对法”，利用收尾两项之和相同，将加法运算转化为乘法运算。

学生活动：根据问题 3 的经验和方法，将不同项加法转化为相同项加法。主动展示自己的计算过程。

师：那第 11 项解决了，第 12 项可以吗？第 13 项呢？……如果是第 n 项呢？

生 6：分奇偶性进行讨论。

【设计意图】带领学生深入研究高斯的“快速算法”，将学生原有的经验进行转化，抽象出方法的本质：将不同项的加法转化为相同项的加法，进一步利用乘法简化运算，让学生在数学活动中体会转化化归的思想方法。在设计问题 1 与问题 2 的时候，由偶数项求和进阶为奇数项求和，让学生体会不同的

项数之间在方法上的异同点，从方法的本质上体会“首尾配对法”的本质。提醒学生注意在奇数项求和时利用首尾配对法时，采取补一项或将中间项单独计算的方法，从而自然而然的过渡到有无通解通法的思考，帮助推进等差数列的前 n 项和的课程进度。有利于促进学生对于“首尾配对法”的理解与熟练运用，有利于培养学生的发散思维，提高学生的课堂投入度，激发学生的数学学习兴趣。

思考：那是否存在一种方法可以避免分类讨论呢？

教师活动：介绍我国古代著名数学家杨辉解决数列求和问题时构造的“良马图”（如图 1 所示）：为求首项为 193，公差为 13 的等差数列的前 11 项和公式，杨辉分别构造了长为 193、 $193 + 13$ 、 $193 + 13 \times 2$ 、……、 $193 + 13 \times 10$ ，宽为 1 的 11 个长方形，得到的如下所示的“阶梯形”图形的面积即为数列的前 11 项和。引导学生根据“良马图”尝试计算等差数列求和公式。

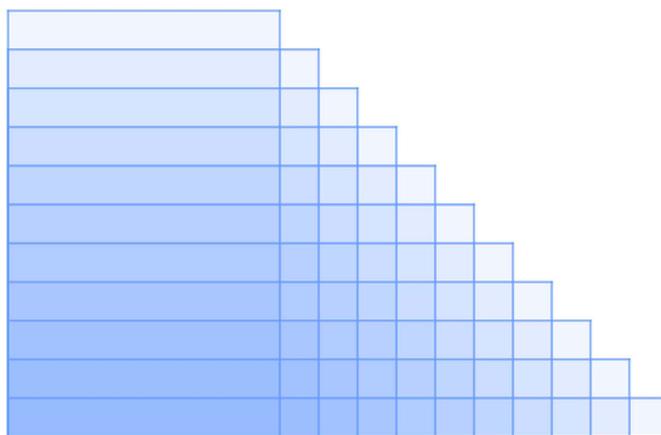


Figure 1. Good horse map

图 1. 良马图

学生活动：自主探究，利用几何的方法思考求等差数列的前 n 项和公式。

学生可能会想到两种求面积的方法，法一：

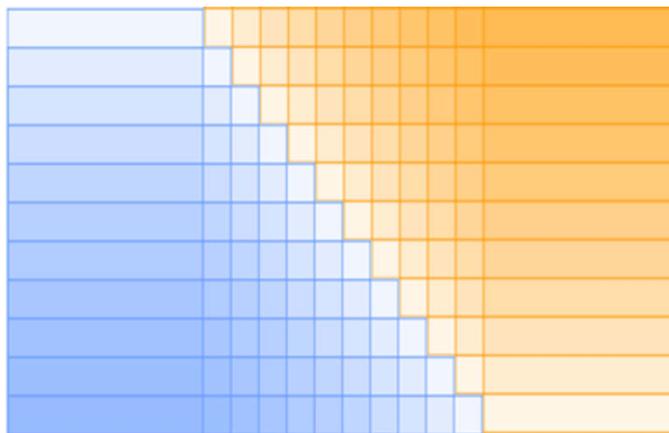


Figure 2. A good horse is inverted

图 2. 良马图倒置

第一种方法是将另一个相同的“良马图”倒置(如图 2 所示)，与原本的图拼成一个长为 $(193 + 323)$ 宽为 11 的长方形，易得：
$$S_n = \frac{11 \times (193 + 323)}{2}。$$

法二:

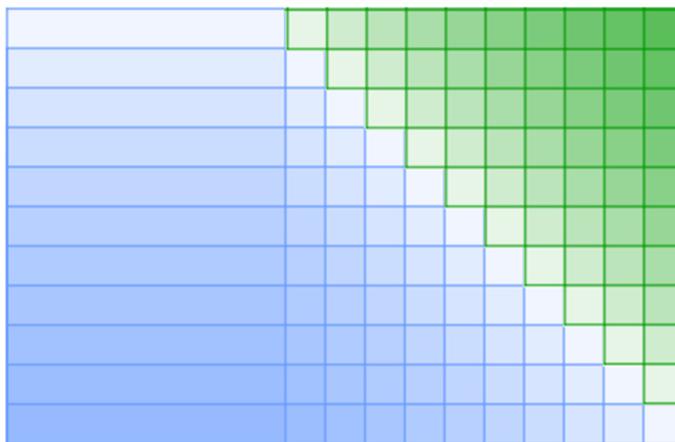


Figure 3. The “Good Horse Map” after the supplement
图 3. 补后的“良马图”

第二种方法是将“阶梯形”图形补成一个长方形(具体见图 3),也就是由长分别为 193、 13×10 , 宽为 11 的两个小长方形组成的大长方形, 可得: $S_n = 11 \times 193 + \frac{11 \times 13 \times 10}{2}$ 。

【设计意图】让学生经历由特殊到一般的过程, 学生自然的发现“首尾配对法”存在的“分类讨论”的问题, 提出该问题后, 引入“良马图”的数学史, 帮助学生拓宽思路, 利用几何的方法解决代数问题, 将数形结合的思想与数列知识相融合, 帮助学生多角度的思考问题, 拓宽学生的思维。在探究的过程中, 让学生结合已有的经验, 通过利用“首尾配对法”的经验完成对“良马图”面积求解, 发现倒序相加法。利用数学史帮助学生完成等差数列前 n 项和的计算, 让学生感受到古代数学家的智慧, 让学生对于数学又有了新的感悟与理解, 体会到数学的魅力。利用几何直观, 借助几何的方法完成代数的求和运算, 培养学生的数形结合的意识, 提高学生的直观想象的核心素养。

问题 5 类比 S_{11} 的形式特征, 猜想等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 为多少?

$$\text{生: } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (1), \quad S_n = na_1 + \frac{n(n+1)}{2}d \quad (2)。$$

3.3. 探索证明, 建立模型

问题 6 是否所有的等差数列前 n 项和 S_n 都满足公式(1)呢? 你能进行证明吗?

学生活动: 动手探究, 根据图 2 的经验探究一般等差数列的前 n 项和, 可将两个分别正序写和倒序写的 S_n 一一对应相加进而得到求和公式: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 。

师: 你能说说高斯在求和过程中利用了等差数列的什么性质吗?

生: 根据等差数列的性质: 在等差数列中, $p, q, s, t \in \mathbb{N}^*$, 若 $p+q=s+t$, 则 $a_p + a_q = a_s + a_t$ 。

问题 7 刚刚我们利用“倒序相加法”确定了公式(1)的一般性, 你能将公式(2)也进行证明吗?

教师活动: 引导学生回忆第二种求解“良马图”面积的方法, 尝试将等差数列的通项公式与首项 a_1 和公差 d 建立联系。

学生活动: 回顾等差数列的通项公式, 带入公式(1)中, 得到等差数列的另一个前 n 项和公式:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n+1)}{2}d。$$

追问：你还能想到其他方法得到这个结论吗？

教师活动：组织学生进行小组合作，并针对小组讨论情况给予相应指导。对小组成果进行全面评价。

学生活动：小组讨论探究其他方法，考虑用等差数列定义求等差数列前 n 项和公式。

派小组代表展示所得成果：

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \\ &= na_1 + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]d \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \end{aligned}$$

【设计意图】通过学生的实践操作，建立两个公式之间的联系，帮助学生探究公式(1)(2)之间的转化关系，加强学生对于等差数列前 n 项和公式的理解与运用，第二种方法帮助学生完成通项公式与求和公式之间的联系，完成知识网络的建构，深化学生对于等差数列的理解与运用，加深了学生对于公式的理解，帮助完成本节课的教学重难点。发展学生的逻辑推理能力与数学运算素养。

3.4. 例题练习，应用模型

师：回到本节课开始时同学们提出的问题中，我们已经解决了良马问题，那驽马问题你能否解决呢？

例 1 驽马前 11 日的行程和 S_{11} 为多少？

例 2 良马、驽马分别何日至齐？

学生活动：回顾等差数列通项公式和两个求和公式，独立完成。

教师活动：带领学生对以上两个问题进行总结(具体思维图见图 4)，分析可知：

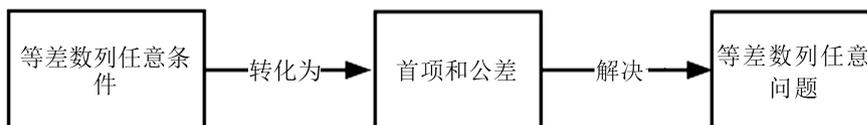


Figure 4. The first n terms of arithmetic sequence and the mind map
图 4. 等差数列前 n 项和思维图

带领学生归纳解决此类问题的关键：求解等差数量的首项 a_1 和公差 d ，通过建立 a_1 、 d 、 n 、 S_n 、 a_n 五个基本量之间的关系，可以解决等差数列的大多数问题，这种方法称为“基本量法”在面对此类问题时，只需要将题目中的条件与首相、公差建立联系，完成条件之间的简单转化，代数公式(1)或(2)即可完成此类问题的求解。

练习 1 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

1) 若 $a_1 = 7$ ， $a_{50} = 101$ ，求 S_{50} ；

2) 若 $a_1 = 2$ ， $a_2 = \frac{5}{2}$ ，求 S_{10} ；

3) 若 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $d = -\frac{1}{6}$ ， $S_n = -5$ ，求 n 。

练习 2 已知一个等差数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项的和是 310，前 20 项的和是 1220，求 S_n 。

分析：练习 1 中 1) 考查等差数列的前 n 项和公式(1)的直接运用；2) 需要利用通项公式求出公差，再利用公式(2)求得 S_{10} ；3) 待定系数法，通过列方程即可求得 n ；练习 2 需根据公式(2)列出关于首项 a_1 和公差 d 的方程组，解方程，再次利用公式(2)即可求解。

【设计意图】利用难度层层加深的题目，帮助学生完成求和公式的进一步理解与运用，有利于学生强化对于公式的运用熟练程度。让学生在例题完成后对于该题目反思，帮助深化学生对于“基本量法”的理解，帮助学生把握求和公式的本质，掌握通解通法，有利于知识的内化与迁移，帮助学生提高问题解决能力。

3.5. 师生总结，反思模型

3.5.1. 小结

师：回顾本节课的研究过程，你学会了什么？

学生活动：回顾本节课的探究互动过程，数学活动中涉及到的方法，画出本节课思维导图，形成等差数列部分完整的知识体系。

教师活动：引导学生进一步总结本节课的内容，让学生尝试从思想方法的角度进一步归纳，同时学生的总结与思维导图进行评价和补充。

【设计意图】带领学生反思总结，既回顾了本节课的探究活动过程，由帮助学生完成知识体系的搭建，在巩固知识点的同时，完成知识点的深化与理解，帮助学生完成知识的进一步内化与升华。

3.5.2. 作业

1. 教材 p. 22~23 练习：1, 2, 5 题；

2. 拓展提升：查阅杨辉与良马图的相关数学史，以“杨辉与等差数列”为题写一篇小论文。

【设计意图】将传统的作业与开放式的作业结合，帮助学生检验学习成果的同时拓宽思维，有利于学生对于数学史数学文化的进一步理解，避免了传统形式作业的枯燥乏味，激发学生对于数学学习的兴趣，培养学生的动手能力，发展学生的核心素养。

4. 教学思考

(一) 设计递进的数学问题串，突破教学的重难点

问题是数学的心脏，有效的问题是促进学生思维的内驱力。问题的呈现忌重复堆砌，宜递进生成。本课通过良驽马这个情境，在大背景下不断生成新问题，让学生建立等差数列的前 n 项和模型的建立过程，感悟模型的数学本质。比如“关于这个故事中的驽马还会产生哪些问题？”引导学生生成应用模型的不同问题；“你会选择哪个公式？”引导学生感受方法的多样性和独特性；“问题解决的过程是否有相同之处？”引导学生思考应用模型的本质；“用另一个公式，你能尝试解决吗？”唤醒学生应用模型的主动性。在一系列问题驱动下，引领学生自主提出问题，尝试从不同角度解决问题，保持学生思维的活力。

(二) 灵活捕捉资源，促进精彩生成

教育家克拉夫斯基提到“如何判断教师的教学水平，一方面看教学计划是否完备性，这里的完备并非看实际教学是否和计划的保持一致，而是看教学设计是否具备灵活性，可以灵活地应对各种突发情况，结合实际情况做出教学计划的调整；另一方面是看教学过程中学生能否参与进来，教师是否可以有效地引导学生。”为了保证教学计划的完备性，在进行教学预设时，应该尽可能地做到细致研究，包括教学内容、教学方法及学生实际情况，还要考虑到可能出现的情况，只有这样才能保证教学设计的完备性。为了给预留发挥的空间，教学预设应该具备弹性，一方面包容可能出现的突发情况的预设，另一方面也要给予学生发挥创造力的空间。

教学过程中，经常会出现一些超出预设的情况，教师可以充分利用这些情况，生产精彩的讨论。例如，在课堂互动中，笔者发现学生不仅提出了求和问题，还提出了“何日至齐”的问题。因此，学生在

课堂互动中出现的错误思维，又或者是提出的问题，都需要教师做好应对，可以敏锐地捕捉其中的价值信息，师生共同探究，实现新观点的碰撞，培养学生的创新思维，拓宽学生的知识面。

(三) 以板书为线索，经历模型的生成过程

板书是由教师在黑板上书写的文字、符号等组成的，从而来传递数学知识，好的板书是学生的遨游数学王国的地图。随着数字多媒体的推广，当今课堂重多媒体轻板书的现象越来越严重，而笔者却感受到板书在课堂教学的主要地位。本节课的板书分为提出问题、生成模型、应用模型、理解模型等方面，注重突出学习线索的梳理与数学思想方法的提炼。如果数学模型是实际问题与数学问题之间的桥梁，那么好的板书能体现隐形线索与显性表达的联系，从而帮助学生更加直观地感受模型思想。

(四) 体会模型思想，感悟应用价值

史宁中教授认为：数学基本思想的本质是抽象、推理、模型[3]。模型在高中数学教材中无处不在，例如三角函数模型、基本不等式模型、指数函数模型、对数函数模型、等差数列模型、等比数列模型等。数学教学不仅要教给学生数学的基本概念和定理，更要教给学生解决问题的思想方法，从而提高学生的素能。学会解决问题才能让学生应用数学，而数学思想方法则是问题解决过程中的精华。而解决问题的关键就在于将实际问题转化成数学模型，再利用所学知识进行求解。因此，日常教学中要培养学生的模型思想，提高解决问题的能力，让学生形成数学应用意识。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准: 2022 年版[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准: 2017 年版 2020 年修订[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [3] 史宁中. 漫谈数学的基本思想[J]. 中国大学教学, 2011(7): 9-11.