Advances in Education 教育进展, 2024, 14(6), 633-637
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2024.146983

基于APOS理论的复数概念教学设计

马鑫宇[1]，于伟艳[2]，桑海风[1]

[1]北华大学数学与统计学院，吉林 吉林
[2]吉林市第一中学，吉林 吉林

收稿日期：2024年5月19日；录用日期：2024年6月19日；发布日期：2024年6月26日

摘 要

复数的引入是高中数学学习阶段中数系的一次扩张，不仅推广了实数的四则运算，而且还遵循着实数的四则运算规律。对于高一的学生而言，面对复数这一抽象的概念，往往理解不透。APOS理论表明数学概念的学习是一种建构过程，理论包括活动、过程、对象、图式四个阶段。本文从APOS理论的视角出发，利用文献研究法、访谈研究法和APOS理论，对复数概念进行教学设计。

关键词

建构主义，APOS理论，复数，教学设计

Teaching Design of Complex Concepts Based on APOS Theory

Xinyu Ma[1], Weiyan Yu[2], Haifeng Sang[1]

[1]School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin
[2]Jilin No. 1 Middle School, Jilin Jilin

Received: May 19th, 2024; accepted: Jun. 19th, 2024; published: Jun. 26th, 2024

Abstract

The introduction of complex numbers is an expansion of the number system in the high school mathematics learning stage, which not only popularizes the four operations of real numbers, but also follows the four rules of operation of real numbers. For students in the first year of high school, they often do not understand the abstract concept of complex numbers. The APOS theory shows that the learning of mathematical concepts is a construction process, which is divided into four stages: activity, process, object, and schema. From the perspective of APOS theory, this study uses literature research and interview research methods to design the teaching of complex num-

文章引用: 马鑫宇, 于伟艳, 桑海风. 基于 APOS 理论的复数概念教学设计[J]. 教育进展, 2024, 14(6): 633-637.
DOI: 10.12677/ae.2024.146983

ber concepts based on APOS theory.

Keywords

Constructivism, APOS Theory, Plural, Instructional Design

1. 引言

复数章节位于高中数学教材必修第二册，该章节的核心任务是“数系的扩充”。学生们对于实系数一元二次方程的判别式小于零时说明方程无解，以及负实数不能开平方的问题存在思维定势，复数的学习表明着学生们已有的实数的运算体系遭受了冲击，由此引发学生们已有知识结构与新知识之间的矛盾。因此，学生们对复数的理解与解题有一定挑战。在数学概念的教学中，教师只有充分展示概念形成的过程，才能让学生能够主动参与建构式学习的过程中，从而更加深刻地理解某个数学概念。美国学者杜宾斯基提出的 APOS 理论认为，数学概念的学习是一种建构学习，要注重概念的形成并且强调学生在学习数学概念时需要经历一系列的心理认知过程，为高中数学概念的教学提供新的视角和思路与思考。本文将以“复数的概念”为例，在系统阐述 APOS 理论四个阶段的基础上，对复数的概念进行教学设计。

2. APOS 理论概述

APOS 理论由美国数学教育家杜宾斯基提出[1]，是一种关于数学概念教学的理论，该理论进一步拓展了皮亚杰的数学学习反思抽象理论。APOS 包括四个阶段并依序取自四个英文单词 action (活动阶段)、process (操作阶段)、object (对象阶段)、schema (图式阶段)的首字母。以下是对四个阶段的具体阐述。

2.1. 活动阶段(Action)

活动阶段是 APOS 概念教学理论的首要前提，该阶段在整个概念教学理论中起到了提供概念例证的重要作用。换言之，此阶段是创设恰当的现实情境或是概念相关的历史文化等，引导学生更直观地从现实情境中发现现实问题，从而抽象成数学问题，一个好的情境创设是概念教学的良好开端，此阶段教师要注意切勿生硬地靠拢现实情境，使得数学概念与现实情境相背离，导致数学概念脱离现实生活。

2.2. 过程阶段(Process)

过程阶段是 APOS 概念教学理论的关键一步。本阶段在整个概念教学理论中的核心任务是抽象本质属性从而形成初步数学概念，与活动阶段相比，过程阶段更加强调的是学生经过多次活动操作，逐渐将操作过程程序化，活动内化，引发学生自身进行思考、反思，发现探索直观材料与概念本质之间的联系，将具体的操作活动上升为抽象的数学表象，自然而然的概括出概念本质特征。数学概念在高中数学的地位极为显著，是开启数学解题关键的金钥匙。在教学中，教师要充分发挥学生的主体地位，以自主探究的形式，引导学生提出数学相关概念的问题，初步了解某个数学概念的必要性。但这只是概念的初步形成，还需进一步的完善辨析。

2.3. 对象阶段(Object)

对象阶段在 APOS 理论运用的整体过程中起到了发展并巩固概念的重要作用。“对象”即数学概念，此阶段的目的是将上一阶段形成的初步数学概念通过严谨的数学表象问题串引导着学生对于概念的发展更为细致化，更为严谨地、正式地进入到数学学习中，有利于学生真正体会到数学概念的本质，使其内化于心，外化于行，为后续的数学概念运用打下坚实的理论基础。一个理想的对象阶段，教师不应当拘泥于教材现成的概念，使得数学概念的教学课堂照本宣科，这样的概念学习对师生而言都是被动的，而应该通过上两个阶段层层递进，使数学概念自然而然的被学生理解与吸收，促进了学生的主动建构式学习。

2.4. 图式阶段(Schema)

图式阶段是 APOS 理论中的数学概念应用阶段，不仅巩固并检验了数学概念在学生认知结构的地位，如新旧概念之间的联系以及相似概念的关系，还促进了数学概念本身发展使其充分地应用于现实，如在解题过程中灵活地识别数学概念并运用到运算中。本阶段的关键在于从前三个阶段把现实情境问题抽象成数学问题的基础上，通过数学严谨运算或思想方法得出数学范畴的结果，还原并解决现实情境问题。

3. 基于 APOS 理论的“复数”教学设计

3.1. 活动阶段设计

现实情境：教师通过引入数学家发现负数开平方的问题的现实情境，引导学生一步一步产生求知欲，进而激发学生的学习兴趣并引入新课。学习数学史可以对纯数学理论学习起到的独特调剂作用，不但提高了学生的数学史理论知识素养，同时培养了学生的人文素养[2]。

教师：1545 年，意大利学者卡丹在《伟大的艺术》一书中提出了之前从未遇到的问题：如何将 10 分成两部分，并使这两部分的乘积为 40。同学们思考一下，能不能帮助卡丹解决此问题呢？

学生 1：对于这个问题，显然可以列出方程 $x(10-x)=40$，即 $x^2-10x+40=0$，求解此方程即可。

学生 2：此问题所列出的方程判别式$\Delta<0$，所以此方程无解，卡丹提出的问题无法解决。

教师：同学们思考的很对，但是卡丹依然写出了这两个根，分别为$5+\sqrt{-15}$ 和$5-\sqrt{-15}$，这样，两个数相加为 10，并且两数相乘为 40。

学生：可是根号下面是负数，负数不能开平方。

教师：因此卡丹也成为了数学研究史上第一个使用负数开平方的人。但是根据已有的认知经验来看，这样的两个数是“虚无缥缈”的，因为在之前所学的知识中，负数是不能开平方的，那么卡丹的研究是没有意义的吗？通过上述情境，请同学们思考，负数能开平方吗？卡丹的结果是否正确？

3.2. 过程阶段设计

过程：教师引导学生小组合作交流，回顾历史，并研究我们经历了哪几次数系扩充？可以引导学生回顾之前所学知识，引导学生在回忆数域扩充过程的基础上，体验数学是不断完善与发展的，帮助学生树立正确的学习观和价值观，这样在旧知识的沃土中滋养出新知识，能够引导学生更为精准的把握所学知识。

教师：同学们还记得从小学学习的自然数到现在所学的实数是怎么发展的吗？

学生：经历了很多次数系的扩充，由远古时期结绳记事形成自然数，到为了表述相反的含义而引入的负数，再到为了实际生活的生产需要引入分数。

教师：同学们对此归纳的非常到位，首先形成了自然数集，再由自然数集发展到整数集，再发展到

现在接触的实数集。数集就这样促进了人类文明的演变。

教师：容易观察到，伴随着每一次数系扩充，数学整体有了里程碑式的发展，由自然数到整数，再由整数到实数，经历过两次数系扩充之后，困扰前人的未解决的问题就自然而然得到了解决，但在实数范围内，上述情境问题中卡丹遗留的关于负数开平方问题还未解决。那么，要如何解决卡丹遗留下了负数不能开平方这个“悬案”呢？

学生：这就要求对数集进行再一次扩充，就像为了解决正方形对角线的问题时，引入无理数，扩充到实数集。

教师：思路非常正确，那么请同学们接着思考如何解决 $\sqrt{-15}$ 不能开平方的问题？要解决这个问题的关键是什么？

学生 1：若要解决 $\sqrt{-15}$ 开平方的问题，问题关键在于负数，可以首先思考如何解决 $\sqrt{-1}$ 能不能开平方?如何开平方？开平方的意义是什么？

学生 2：不妨引入一个新的数，使得这个新的数的平方等于−1。

教师：看来同学们和以往数学家研究此问题的思路是一致的，数学家欧拉正是如此引入新的数来解决负数开平方的问题，他把新引入的数命名 i，i 取自 imaginary 这个单词的首字母，并且规定 $i^2=-1$，这样在课堂开头提出的问题就可以表示成 $\sqrt{15}i$ 。

3.3. 对象阶段设计

对象：在上一阶段，学生们经过自主探究与教师引导，认识与新引入的字母i，它的平方等于−1，即 $i^2=-1$。如果新引入的 i 可以与原有的数进行四则运算，并且可以保证原有的运算律依然成立，这就要求我们对 i 与实数的关系和它们之间表现形式进行思考，将其与所学的实数集整合，构成一个新的数系。

教师：刚刚引入了 i，目的是为了解决 $\sqrt{-15}$ 不能开平方的问题，但是其他类型的关于负数开平方的问题应该如何解决呢？又希望新引入的数i满足实数集的加法和乘法运算并且满足交换律、结合律和分配率，对于 i 而言，是否可以和实数结合起来并把此表达更加一般化呢？

学生 1：例如 2 和 i 相乘可以写成 $2i$，并且和实数进行加减组合，得到 $3-2i$、$5+2i$。

学生 2：还可以加号前面的数字抽象成 a，把加号后面的数字抽象成 b，这样就得到一个类似于 $a+bi$ 的形式，这样就能抽象成一般概念。

教师：回答的很棒，我们把形如 $a+bi\ (a, b \in R)$的数叫做复数，其中i叫做虚数单位，全体复数构成的集合 $C=\left\{a+bi \middle| a, b\in R\right\}$ 叫做复数集。这样我们就再次进行了数系的扩充，集合 C 叫做复数集，负数开平方就在复数集里有了解。复数常用字母 z 表示，即 $z=a+bi$，其中 a 叫做复数的实部，b 叫做复数的虚部。由此引入了本单元的重要概念，即复数的概念。那么，同学们能根据概念再举一些例子吗？

学生 1：$3+2⁄5i$ 为复数，其中 3 叫做这个复数的实部，$2⁄5i$ 叫做这个复数的虚部。

学生 2：当 $b=0$ 时，这个式子就变成了实数，当 $b\neq 0$ 时，叫做虚数，且当 $a=0$，这个式子只剩下 bi，叫做纯虚数。

教师：形如 $a+bi$ 与 $c+di$ 这两个复数相等的条件是什么？

学生：根据复数的定义，实部和实部相等，虚部与虚部相等，得到 $a=c$，$b=d$。

3.4. 图式阶段设计

图式：教师引导学生们利用前三个阶段所积累的复数知识进行应用，从而解决相关数学问题，练习能够很好地帮助学生进行概念的辨析和理解，及时进行归纳和总结，在头脑中形成一个较为清晰的图式结构，更全面的去理解复数概念的本质，把复数的引入放入数学历史的发展中去，而非将复数的概念单

一灌输到学生的头脑当中。

问题 1：已知$-3xi^2 + (2x + 1)i = 6y + 5i$，其中 x，$y \in R$，求 x 与 y。

学生：根据复数的概念有 $i^2 = -1$，原式可化为 $3x + (2x + 1)i = 6y + 5i$，又根据复数相等的定义，写得两个等式，列得方程① $3x = 6y$；② $2x + 1 = 5$，求得 $x = 2$，$y = 1$。

问题 2：复数 $n = a + bi$ 中实部与虚部分别满足什么条件时，复数 $z = n + 2 + (n + 1)i$ 是纯虚数？

学生：将上式 n 带入 z 中，实部与实部运算，虚部与虚部运算，化简得到 $z = (a - b + 2) + (a + b + 1)i$，当实部为 0 且虚部不等于 0 时，$z$ 为纯虚数，故得 $a - b + 2 = 0$ 且 $a + b + 1 \neq 0$。

4. 反思与建议

杜宾斯基提出的 APOS 理论对于概念教学以及引导学生进行建构式学习是很有帮助的。在高中数学教学中，概念教学是一个基础，这个基础体现在学生只有建立了对概念的真理解，才能在其基础上继续建构其他概念或规律[3]。在活动阶段，学生不仅将思维融入本节课，还更好地将复数的引入放入数系扩充的整个数学史中进行研究，是学生对于后续知识框架构建的前提。APOS 理论将复杂难以消化的数学概念清晰明了地在学生面前以抽象的形式展现，真正地做到化抽象为数学的具体，将学生都认为比较难的数学变得简单容易[4]。另外，在过程阶段，学生对于新概念有了一定的认识基础，可以帮助学生在对象阶段更加严谨深入地了解所学概念，帮助学生们在头脑中构成知识框架，引导学生们进行主动建构。最后的练习与总结是图式阶段必不可少的，在学生们反复的练习与反思中，更能更好地捕捉数学概念的生成与运用，学生们主动体会到数学的概念不是枯燥的，而是在探索中具有趣味性的，从而能够爱上数学。教师在教学当中有十分重要的引导作用，教师对于课堂整体进度的把控以及教学概念的运用都起着决定性作用，所以，教师应当将教学概念活学活用，针对不同的课题进行有差别的设计，并且根据课堂当中学生的表现，教师适当运用教育机智，从而更好地提高学生学习效率与学习主动性。

参考文献

[1] 田丽娜. 基于 APOS 理论的集合概念教学设计[J]. 中学数学, 2023(23): 92-93.

[2] 王晰淼. 基于数学史的高中数学概念教学设计研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨师范大学, 2022.

[3] 丁晓军. 关注学生认知过程, 促进数学概念建构——基于 APOS 学习理论的教学思考[J]. 数学教学通讯, 2019(15): 67-68.

[4] 葛江欣. 基于 APOS 理论的高中数学概念教学实践研究[D]: [硕士学位论文]. 新乡: 河南师范大学, 2021.