

从解题教学案例中分析如何培养学生问题解决能力

乔宇佳

黄冈师范学院, 数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2024年6月20日; 录用日期: 2024年7月22日; 发布日期: 2024年7月29日

摘要

数学新课标越来越重视培养学生问题解决能力, 目前我国学生数学知识掌握良好, 仍然缺乏解题能力。笔者通过对同一题目的两次教学实录进行对比分析, 发现名师更注重利用波利亚的启发性提示语来培养学生的元认知能力, 提出了波利亚解题提示语的使用策略。

关键词

问题解决, 案例分析, 波利亚提示语

Analyzing How to Cultivate Students' Ability to Solve Problems from the Teaching Cases of Solving Problems

Yujia Qiao

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Jun. 20th, 2024; accepted: Jul. 22nd, 2024; published: Jul. 29th, 2024

Abstract

The new mathematics curriculum standard pays more and more attention to cultivating students' ability to solve problems. At present, students in our country have a good grasp of mathematics knowledge, but still lack the ability to solve problems. Through the comparative analysis of the two teaching records of the same topic, it is found that the famous teachers pay more attention to the use of Polya's enlightening prompts to cultivate students' metacognitive ability, and the use strategies of Polya's problem-solving prompts are put forward.

Keywords

Problem Solving, Case Analysis, Polya Prompt

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

数学义务教育新课标和普通高中新课标，都把培养学生的问题解决能力作为重要的课程目标，并提出了培养相关数学核心素养的一些教学建议[1][2]。问题是数学的灵魂，涂荣豹教授认为教师教解题的重点不在于只注重解题的结果，应更注重解题的过程，而解题过程是一种包含元认知的学习心理活动[3]。波利亚是20世纪伟大的数学教育家，他的著作和解题思想具有划时代的意义，他在《怎样解题》中的“启发性提示语”被教育者们广泛关注，并应用于中学数学课堂教学实践[4]。启发性提示语主要有认知提示语和元认知提示语，认知提示语对认知活动进行提示，帮助学生对知识内容和具体信息进行加工[5]。如什么是同解方程，三角形全等定理的判定条件是什么？等等；元认知提示语对元认知活动进行提示，有助于学生调节和监控自身的认知活动，不提示具体知识，而激发学生思考。如你打算从哪里着手？问题的关键是什么？有研究发现不少学生已经掌握了足够的数学知识和解题策略，仍然缺乏解题能力，实际是因为学生元认知水平的差异[6]。

如何提升学生解题中的元认知水平？波利亚提示语的核心价值在于其引导学生自主思考，通过提出关键问题，激发学生的好奇心和求知欲，进而促使学生主动探索问题的解决方法。这种策略不仅有助于提高学生的解题能力，更重要的是，它培养了学生的独立思考能力和创新精神。下面，首先介绍波利亚解题思想，接着以解题案例教学实录对比的形式说明波利亚解题提示语对指导教师的教与学具有重要意义，以及波利亚解题提示语的使用策略。

2. 波利亚元认知提示语简介

Table 1. Teaching and learning in problem-solving teaching

表 1. 解题教学中的教与学

学什么？	教什么
怎样解难题	教解题
怎样解难题的方法	教解题技巧
怎么找到解难题的方法	教解题中的元认知思维
还有比方法更值得学习的	育人的价值观

波利亚提示语是一种有效的解题策略，它通过引导学生主动思考、提出假设和猜想、提供多种解题策略等方式来培养学生的问题解决能力和数学思维。其中，“怎样解题表”则较好地体现了波利亚解题思想的精髓，在“怎样解题表”中，波利亚把数学解题分成了理解题目、拟定方案、执行方案、回顾四个步骤，每一个解题步骤都包含了若干提示性问题，这些问题问的不是别人，而是解题者自己，是解题

者在解题活动过程中的自我意识、自我监控、自我调节。在使用这种策略时，教师应遵循循序渐进、针对性强、启发思维等原则，并注重设定合适的问题情境、逐步引导深入思考、鼓励学生提出假设和猜想、提供多种解题策略以及及时反馈和总结等方面的工作。

在数学解题教学中，如何利用波利亚提示语来回答教师的教与学(见表 1)。

下面以一道题目的两个教学实录案例来分析说明。

3. 案例教学实录及分析

题目：

徒弟：师父多大了？

师父：我在你这年纪时，你才 5 岁；但你到我这年纪时，我就 71 岁了！

请问：徒弟几岁？师父几岁？

案例教学实录

[教学实录 1]：

师：在年龄问题中，我们知道年龄差不变。这里要求师父和徒弟的年龄，怎么办？

生：沉默……

师：我们能否找到师父和徒弟年龄的等量关系？

生 1：这里徒弟和师父的年龄都不是同一时间的，我没有办法。

师：我们可以画一张图把题目的意思表达出来。发现师父变到徒弟现在那个年纪时，也就是师父的年龄变到徒弟现在的年龄，同时师父的年龄变成了以前师父的年龄，这时徒弟的年龄也变成了之前徒弟的年龄。这时同学们有什么特殊的发现吗？

生 2：我发现现在师父的年龄同之前师父的年龄之差等于现在徒弟同之前徒弟的年龄之差。

师：你们能解释说明这一点吗？

生 3：因为年龄差不变，所以现在师父的年龄同现在徒弟的年龄之差等于师父之前的年龄同徒弟之前的年龄差。

师：还可以用时光倒流来解释，师父的年龄倒退回去几年，徒弟的年龄自然也倒退回去几年。同样你们画出未来师父的年龄，并解释其中的数量关系吗？

生 4：发现徒弟长到师父那么大时，也就是徒弟的年龄变到师父现在的年龄，同时师父的年龄变成了未来师父的年龄，这时徒弟现在的年龄也变成了徒弟未来的年龄。

生 5：同样，因为年龄差不变，所以未来师父的年龄同现在师父的年龄之差等于未来徒弟的年龄同现在徒弟的年龄差。

师：你能看出现在三段年龄之差有什么关系吗？

生 6：我发现三段年龄之差相等。

师：你能算出现在徒弟和师父的年龄了吗？

生 6： $71 - 5 = 66$ (岁) $66 \div 3 = 22$ (岁) $5 + 22 = 27$ (岁) $27 + 22 = 49$ (岁)

师：回顾这个题目，解题的关键在于通过画图我们知道了年龄一共有三个时间，六个量。并通过年龄差不变，我们得出有 3 段相等的年龄差。

[教学实录 2]：

师：我从“微信朋友圈”找到了这个题目，题目的文字叙述非常简单，你能在 3 分钟解决这道题目吗？

师：有谁做出来了吗？(两人举手)

师：我有 8 种以上的方法，我也不说，我相信同学们在下课时 90% 以上的同学都能做出来。在做这个题目的时候，你碰到了什么难处？

生 1：读不懂这个题目。

生 2：列不出方程，找不到等量关系。

师：数学问题解决不出来，往往有三大困难。一是“题目”读不懂，二是关系找不到，三是完全没思路。

师：关于“题目”读不懂，我们有句古话，书读百遍，其义自见。

师：这个题目问徒弟几岁，请问是徒弟什么时候的年龄？徒弟还有什么时候的年龄？

生 3：现在的年龄。还有未来的年龄和过去的年龄，师父也有现在、过去和未来的年龄。

师：所以这个题有 6 个量，已知其中两个量求另外 2 个量。其实，当我们把题目读懂后，我们就可以进入时光隧道，在这时光隧道中，过去、现在、未来就可以自由穿越。

教师在黑板上画出一条线段(见图 1)。

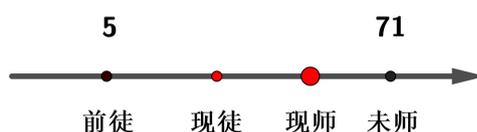


Figure 1. Meaning diagram of title

图 1. 题目含义图

师：我这个小珠子，代表徒弟现在的年龄，有颗大些的珠子代表师父现在的年龄，请问 5 岁是谁的年龄？71 呢？

全班：过去徒弟的年龄。未来师父的年龄。

师：现在就是已知徒弟过去的年龄和师父将来的年龄，求徒弟现在和师父现在的年龄。读懂题目是解题的前提，现在有的同学还是不会做，关系找不到又该怎么办呢？我有祖传秘方。

教师黑板板书“投石问路”

师：投石问路这个成语什么意思？有谁能分享一下？

生 4：当不知道路况怎么样的时候，投出一颗石子来探探路。

师：我们解这道题是不是也像是在茫茫黑夜中不知道路怎么走，怎么办呢？扔石头。怎么扔石头呢？问徒弟多大，我就假设扔一个徒弟 23 岁，问师父多大，我就假设师父 43 岁。请问根据题目的意思，当师父是徒弟现在这么大时，徒弟多大？

全班：5 岁。

师：当师父是徒弟现在这么大时，徒弟多大？

全班：3 岁！

师：你看，五(3)班的孩子特别可爱，刚开始说 5 岁，现在异口同声都说 3 岁。为什么是 3 岁？谁能说？

生 5：因为这里设的师父和徒弟的年龄差是 20 岁，那如果 $43 - 23$ 等于 20 的时候， $23 - 20$ 就是 3 岁了。

师：请问当徒弟长到师父现在这么大时，师父多大？直接说。

全班：63。

师：为什么是 63 啊？

生 6: 因为 $43 - 23$ 是 20, 那么再过 20 年徒弟长到师父现在的年龄, 师父也再长 20 岁, 也就是 63 岁。

师: 当徒弟长到师父现在那么大, 师父会不会在那儿等他? 也必须加 20。现在年龄对了吗?

全班: 不对。

师: 不对没关系, 你发现 3 和 63 什么关系了吗?

这时有不少学生举手。

师: 哦, 已经有 7 个、8 个、有 9 个发现了。厉害, 厉害, 孩子, 手放下。如果等会今天课上你发现了他们之间的关系了, 不举手, 把手放在胸前, 给自己竖一个大拇指, 不给其他人压力, 好不好? 因为人和人是不一样的, 有人反应快, 有人反应慢, 有人是顿悟, 有人是渐悟。

此时有个女生笑了, 并给自己比了一个大拇指。

师: 你看她笑得漂亮! 这只是老师做个样子, 你自己看出来的。拿出笔来, 我们就学这个方法, 画一个时光隧道。我们现在不去解这个题, 学这个投石问路的方法, 你的徒弟多大? 师父多大? (见图 2)

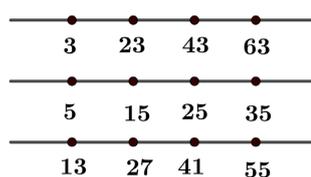


Figure 2. Student case diagram
图 2. 学生案例图

生 7: 先假设徒弟为 15 岁, 师父为 25 岁, 因为徒弟和师父之间的年龄差为 10 岁, 那么十年前的徒弟年龄就是 5 岁, 那么十年后师父就是 35 岁。

生 8: 先假设徒弟为 27 岁, 师父为 41 岁, 可以看出师父和徒弟的年龄差是 14 岁, 然后可以算出, 师父在徒弟现在的年龄时, 徒弟是 $27 - 14 = 13$ 岁, 当徒弟在师父现在年龄时, 师父是 $41 + 14 = 55$ 岁。

师: 投石是为了问路, 你问出来了吗? 请问什么变了? 什么没变? 你发现其中的规律了吗? 你能找到 5 和 71 的关系了吗? 地上本没有路, 走的次数多了。就有了路。

此时又有一些孩子发现了, 在微笑着给自己比大拇指。

师: 没发现, 没关系。有句话叫定能生慧, 当你心定下来, 你就盯着看, 从左往右看, 再从右往左看。63 和 3 再和 20 有什么关系? 从上往下看, 再从下往上看。当你静下心, 左看、右看、上看、下看就能发现, 原来每道题目都很简单, 你就发现他们之间的关系了。

此时全班只有少数几个孩子仍然没有给自己比大拇指。

师: 我可以看到全班多少个同学发现了, 还有一两个同学没发现, 没事儿, 哪位同学能做小老师, 到前面来。注意, 不是告诉他, 它们之间有什么关系, 而是用问题, 让他算一算, 一定憋着, 不能说 5 和 71 之间的关系。谁能接受挑战。

一名学生到讲台上, 指着黑板说这里和这里是可以变的, 而有两个地方之间是绝对不会变的。

小讲师: 这个绝对不会变的地方是什么?

生 9: “师徒的年龄差”不会变。

小讲师: 63 和 3 相差多少? 它们之间隔了几个? 这个也是同理, 35 和 5 之间隔了多少? 它们之间有多少个空? 最后一个跟前面也是一样的?

师: 明白的人当然是是一样的, 那不太明白的你就说这个题, 你说别说那句话, 那句话的意思就是,

你太笨了，你就出一个题让他算。

生 10：55 和 13 相差多少？它们之间相差几个？所以它们之间的年龄差是多少？

师：赶快动手写出算式和结果。

此时教师下去收集了很多份同学们的解答过程，接着一份一份展示在投影仪之下，全班同学欣赏着用工整的铅笔字写出的逻辑清晰完整的解答过程。

师：是不是发现英雄所见略同啊？这道题会做了吗？会做的举手？举高点。这道题我没说，让刘焯和张韩也没说，是不是刚才你投了石头之后就有感觉了。（板书：题试三回、必能生慧）

师：所以当题目你不会做的时候，等不是办法，“投”才有希望。现在回头看看，老师摆的这两颗小珠子，你要不要微调一下？谁愿意到前面来？

生 11：因为通过 3 次的尝试，我们发现未来的师父和过去的徒弟有 3 个等量的年龄差的，所以珠子要微调一下，这样三段就差不多相等了。

（现在全班响起了整齐的掌声）

（二）案例教学实录分析

本道题的文字叙述简单，和生活情境相关，难点在于理解题目的隐藏条件和挖掘其中的数量关系。理解题目：师徒的年龄根据将来，现在和从前一共有 6 个量，知道了徒弟之前的年龄和师父将来的年龄。数量关系：师徒之间的年龄差不变，之前徒弟和将来师父的年龄一共可以分为 3 个相等的段。从解题来看，两次都讲清楚了。从解题方法来看，两种教学案例都呈现画线段图的方法，但一种是直白地“告诉”，一种是水到渠成地进入“时光隧道”进行自主探索。从找到解题方法的方法来看，第一种和第二种差异明显。从育人的价值观来看，第一种毫不涉及，第二种贯穿始终。

教学实录 1 是完全不尊重学生主体地位的“填鸭式”讲解，主要体现在“三包上”。“包审题”，教师直接告诉学生题目的隐藏条件，没有静待学生去探索隐藏条件被发掘的过程，缺乏启发诱导，把学生视为“接受者”。“包拟定解题计划”，教师基于关于年龄问题的模型图，直接给同学说 3 段年龄差相等，整个过程学生就像是看平铺直叙电影，一晃而过，没有遇到任何困难就把难题给解出来了。“包反思”，反思和回顾，变成了教师的自说自话，学生有没有掌握要画一个问号。

可以看出，“填鸭式”讲题模式，教师往往为了学生能快速掌握解题的步骤，灌输数学的知识，忽略了解题方法和思想的习得，更丢失了学生学习的宝贵兴趣。不但会让学生下次遇到类似的题，仍然抓不住重点，更是造成学生厌学的原因。

相对于教学案例 1，教学案例 2 则是波利亚解题思想的生动诠释，其最大特点就是教师始终以普遍性的建议去不漏痕迹地引导学生去理解题意，拟定计划，执行计划和回顾。这些普遍性的建议作为启发性的提示语，有助于学生打开思路，降低解题难度。如果这些常态化的提示语，被教师经常使用，学生学习内化后，自己的元认知能力就能得到提升，从而习得解题方法的方法。

例如，“书读百遍，其义自见”，“条件是什么？”，“问题是什么？”“你见过类似的题目吗？”让学生能流畅地阐述题目，初步熟悉题目的条件含义。通过这些提示语，学生想到这是一种年龄问题，而年龄不是恒定不变的，从而学生能知道该题目给出的已知条件是徒弟之前的年龄和师父将来的年龄。

“题试三回、必能生慧”，“我们先不去解题，先学投石问路的方法”，教师不慌不忙，先提示个别同学先憋着不说他的答案，再让同学们自己去“投石子”，经历探索发现的过程。这里体现教师把学生视为探索者，教育始于生命唤醒。

“你能否满足部分条件吗？”，学生一开始无法获得解答的思路，教师带领学生进入时光隧道，先假设徒弟和师父现在的年龄，满足隐藏条件“年龄差不变”后分别求出之前徒弟和将来师父的年龄，发现此时之前徒弟和将来师父的不是刚好等于题目给定的条件。接下来让学生自己“假设数字”进行“投

石问路”，通过把学生的探索展示几组到黑板，教师接着引导“静下心来观察”，“左看右看上看下看”，这些都属于“元认知”的提示语，说明波利亚元认知提示语和解题思想具有普遍的适用性。

回顾和反思环节，教师让学生上台移珠子，这是我们才看到教师开始故意把珠子的位置摆错的高明之处，学生正好带着全班回顾了，如何进行“化错教育”。

比解题更重要的是什么，把学生视为生命个体，课堂变成一种尊重交往。华老师说每个学生都是不一样的，有的人是顿悟，有的人是渐悟，大家不要给别人压力，自己在自己胸前竖一个大拇指，尊重了每个学生都能得到应有的发展的素质教育理念。

4. 波利亚解题提示语的使用策略

波利亚提示语，源自著名数学家乔治·波利亚的解题思想，旨在引导学生有效地解决问题。其核心理念是通过一系列的提示和问题，引导学生主动思考，而非直接告诉答案，从而培养学生的问题解决能力和数学思维。以下是关于波利亚提示语的使用策略的详细探讨。

设定合适的问题情境，为了有效使用波利亚提示语，首先创设一个直观生动的教学情境来激发学生的兴趣。让学生经历观察、比较、归纳、提出猜想的过程。

鼓励学生提出假设和猜想。这不仅可以激发他们的创新思维，还可以帮助他们更好地理解问题。即使学生的假设或猜想是错误的，也应给予及时的正强化。多用鼓励的语言，采取分段鼓励的方式。

提供多种解题策略，波利亚提示语强调的是解题策略的多样性。因此，在引导学生解决问题时，应提供多种不同的解题策略供他们选择。这有助于学生拓展思路，发现问题的不同解决路径。

及时反馈和总结，在使用波利亚提示语的过程中，教师应及时给予学生反馈和总结。这不仅可以帮助学生了解自己的不足之处并及时改正，还可以让他们更加清晰地认识到问题的本质和解决方法。同时，教师还可以通过总结学生的解题经验和策略，进一步完善自己的教学方法和策略。

5. 结语

为了有效使用波利亚提示语，首先需要设定一个合适的问题情境。在提出问题后，可以通过一系列的“问题链”来逐步引导学生深入思考。接着不要着急给出结论，鼓励学生提出假设和猜想。在解决问题后提问学生有没有其他的策略或发现，因为发现一朵蘑菇，再仔细找找四周，你会发现蘑菇总是成群出现。通过使用波利亚的提示语，有利于让数学题目变成宝山，有利于引导学生入宝山自己发现宝藏，收获数学思想。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 11.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版, 2020年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 8.
- [3] 涂荣豹. 数学解题的有意义学习[J]. 数学教育学报, 2001(4): 15-20.
- [4] G·波利亚. 怎样解题[M]. 涂泓, 冯承天, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2007.
- [5] 韩龙淑. 数学教学中启发性提示语的特征及运用[J]. 教学与管理, 2010(4): 59-61.
- [6] 沈南山. 发掘元认知实现对波利亚解题思想的超越[J]. 数学教育学报, 2001, 10(3): 40-42.