Advances in Education 教育进展, 2024, 14(8), 83-89
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2024.1481375

真实情境视域下“一道最佳投资应用题的风波”课例分析

江一雄，肖加清*

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2024年7月2日；录用日期：2024年7月29日；发布日期：2024年8月8日

摘 要

普通高中课标提出情景创设和问题设计要有利于发展数学学科核心素养，通过创设合适的数学情境、提出合适的数学问题，促进学生实现知识结构的构建和思维水平的进阶。本文以“一道最佳投资应用题的风波”为例，分析课例中问题情境的真实性，经过分析和思考后提出创设真实性问题情境的针对性教学策略，以期帮助学生提高数学素养和问题解决能力。

关键词

数学核心素养，真实性问题情境，教学策略

A Case Study of “The Storm of an Optimal Investment Word Problem” from the Perspective of Real Situation

Yixiong Jiang, Jiaqing Xiao*

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal College, Huanggang Hubei

Received: Jul. 2nd, 2024; accepted: Jul. 29th, 2024; published: Aug. 8th, 2024

Abstract

The curriculum standard of ordinary high school proposes that scenario creation and problem design should be conducive to the development of core literacy of mathematics subject, and promote

*通讯作者。

文章引用: 江一雄, 肖加清. 真实情境视域下“一道最佳投资应用题的风波”课例分析[J]. 教育进展, 2024, 14(8): 83-89.
DOI: 10.12677/ae.2024.1481375

the construction of knowledge structure and the advancement of thinking level of students by creating appropriate mathematical situations and proposing appropriate mathematical problems. Taking "a storm of the best investment word problem" as an example, this paper analyzes the authenticity of the problem situation in the lesson example, and proposes targeted teaching strategies to create the reality problem situation after analysis and reflection, so as to help students improve their mathematical literacy and problem-solving ability.

Keywords

Mathematics Core Literacy, Authenticity Problem Situation, Teaching Strategy

1. 问题提出

随着教育理念的更新和教学方法的多样化，传统的教学方式已逐渐难以满足当代学生全面发展的需求。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》[1]中(以下简称课标)提出不仅要传授学生数学知识与技能，更要培养学生的数学思维能力、应用能力和问题解决能力。真实性问题情境教学策强调将数学与实际生活、实际问题紧密结合，使学生在解决实际问题的过程中学习和应用数学知识，提高其数学应用能力和问题解决能力，进而从中体会数学的实质性内涵[2]。

然而从课例中可以发现，通过学生们的探讨和分析后，得到的结果与实际严重不符，甚至教师也无法给出准确的答复，因此质疑问题情境的真实性。非真实性问题情境会造成数学内容与现实生活情境割裂，促使学生只会单一解决数学问题，而无法思考和解决现实中的问题。因此，如何构建符合学生认知水平和兴趣爱好的真实性问题情境，如何设计有效的教学活动以引导学生深入探究和解决问题，都是当前高中数学教学中亟待解决的问题。

本文首先从课例中探讨高中数学问题情境的真实性，提出要重视问题情境的真实性，最后提出如何创设真实性问题情境的教学策略。例如引入现实生活问题、适当考虑游戏导入、注重问题情境的开放性等。

2. 理论基础

2.1. SOLO 分类理论

SOLO 分类理论是基于认知发展理论提出的对学生思维认知结构分类的评价方法，但与之不同的是，SOLO 理论更侧重于通过学生对特定问题的回答来评估其思维结构，而不是根据年龄来划分认知阶段。其将学生的思维结构分为螺旋上升的 5 个层次，依次是无结构、单点结构、多点结构、关联结构、抽象拓展结构，每个层次代表不同的理解深度和复杂性，其反应了学生的思维水平从单一和混乱向系统而有逻辑地方向发展[3]。

SOLO 分类理论的核心在于，它允许教师观察和评估学生在具体问题上所表现出的思维层次，而不是简单地依据学生的年龄或总体认知水平。这种方法更注重于学生对知识的深入理解和应用，而不仅仅是知识的积累。

2.2. 思维结构理论与问题情境

思维结构理论是 SOLO 分类理论的另一种叫法，该理论是吴煜乐在高中地理情境设计中提出的，其主要思想也是促进教师整合教学资源、设计教学过程，对学生学习过程中的思维结构水平进行评价[4]。课标中提出，实现对学生思维水平的评价，评价的内容包括情境设计是否体现数学学科素养、数学问题的产生是否自然，可以通过设计好的问题来考查学生的思维过程、思维深度和思维广度[1]。不难发现，在数学解题过程中，学生思维结构的变化就体现在对题干信息的读取、解读分析和概括归纳中，因此教学要发展学生的数学素养，就要重视问题情境的设计。

以 SOLO 分类理论为载体，可以有效优化问题情境的设计。教师可以根据 SOLO 分类理论创设不同层次的问题情境，且需要与学生当前的认知水平相匹配，以促进学生向更高的认知层次发展。而通过观察学生在问题情境中的表现，教师可以诊断出学生的思维结构水平，同时根据学生在问题情境中的表现，教师可以调整教学策略，以更好地满足学生的学习需求。因此，SOLO 分类理论不仅仅关注学生学习的最终结果，更重视学习过程和学生是如何达到这些结果的。根据学生的学习阶段、思维水平，对问题情境的尺度大小、方向把控、组成要素、设问角度、学科联系等方面进行优化。

3. 课例重现与分析

3.1. 课例重现

课例“一道最佳投资应用题风波”的题目如下：

有甲、乙两种商品，经营小伤这两种商品所能获得的利润依次是 p 和 q (万元)。它们与投入资金 x (万元)的关系有经验公式 $p=\frac{1}{5}x$，$q=\frac{3}{5}\sqrt{x}$。今有 3 万元资金投入甲、乙两种商品，为获得最大利润，对甲、乙两种商品的资金投入应为多少？能获得多大的利润？

实际上单从题目中的信息来看，这是一道非常好处理的数学应用题，一方面题目材料贴近实际，比较容易引起学生的共鸣，另一方面题目涉及到的两个知识点(换元法求最值和二次函数在闭区间上的最值问题)不算太难，学生只要掌握了一定的方法和技巧后，解决起来十分轻松。

学生经过思考后解法如下。

解法一：设经营甲商品投入资金为 x 万元，则经营乙商品投入资金为 $(3-x)$ 万元，能获得的利润为 y 万元，则

$$y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}\sqrt{3-x} \tag{①}$$

设 $\sqrt{3-x}=t\ \ (t\geq 0)$，则 $x=3-t^2$，代入①中得

$$y=\frac{1}{5}(3-t)^2+\frac{3}{5}t=-\frac{1}{5}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{21}{20}$$

则当 $t=\frac{3}{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{21}{20}$，由 $\sqrt{3-x}=t=\frac{3}{2}$ 得 $x=\frac{3}{4}$，即对甲商品投入资金 0.75 万元，对乙商品投入资金 2.25 万元，获得利润 1.05 万元最大。

但曲阜在《中学数学杂志》中认为这是一种错误解法，给出了另一种解法。

解法二：设经营甲商品投入资金为 x 元，则经营乙商品投入资金为 $(30000-x)$ 元，能获得的利润为 y 元，则

$$y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}\sqrt{30000-x} \tag{②}$$

设 $\sqrt{30000-x}=t$ （$0\le t\le 100\sqrt{3}$），则 $x=30000-t^2$，代入②中得

$$y=-\frac{1}{5}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+6000.45$$

所以，当 $t=\frac{3}{2}$ 时，$y_{\max}=6000.45$ (元)；

此时 $x=29997.75$ 元，$30000-x=2.25$ 元。

通过比较上述两种解法后，不难发现启示只是计算单位不一样，而运算都是正确的，一个以万元为单位，一个以元为单位。但重新审读题意会发现解法二不太符合现实生活情境，从 3 万元里投入 2.25 元给一个产品得行为明显不合常理。但解法一就一定合理吗？

单从乙商品得利润公式来看，$q=\frac{3}{5}\sqrt{x}$，虽然 q 是 x 的增函数，但 q 与 x 的比(即投资 x 的相对收益)却是减函数，会出现投入越少越合算的情况，尤其是当 $0<x<1$ 时，$\sqrt{x}>x$，从而会出现暴利，下面举例说明。

1) 取 $x_1=100$ 元 $=0.01$ 万元 代入 $q=\frac{3}{5}\sqrt{x}$，得 $q_1=\frac{3}{5}\sqrt{0.01}$ 万元 $=600$ 元，投入回报为 6 倍；

2) 取 $x_2=1$ 元 $=0.0001$ 万元 代入 $q=\frac{3}{5}\sqrt{x}$，得 $q_2=\frac{3}{5}\sqrt{0.0001}$ 万元 $=60$ 元，投入回报为 60 倍；

3) 若将 1 万元直接投入乙，可直接获利 $q=\frac{3}{5}\sqrt{1}$ 万元 $=6000$ 元，是投入的 60%；

4) 若将 1 万元拆成 100 个 100 元投入，可获利 $q=100q_1=60000$ 元，是投入的 600%；

5) 若将 1 万元拆成 10000 个 1 元投入，可获利 $q=10000q_2=600000$，是投入的 6000%。

通过计算可以发现，投资越少次数越多获得的利润越高。

一位在职教师提供了在处理这道题时发生的情况如下。

首先，学生 1 与解法 1 的做法一致，即投资甲 0.75 万元，投资乙 2.25 万元，利润最大为 1.05 万元。学生 2 设投资乙 x 万元，投资甲 $(3-x)$ 万元，得到的结果同上。学生 3 不用换元法，用配方法得到的结果也是同上。这三个学生的解法实质一样，只是形式不同。但学生们接下来进行了更为深入的思考与讨论，分析出以下几种情况。

学生 4：我觉得应该先比较 $\frac{1}{5}x$ 和 $\frac{3}{5}\sqrt{x}$ 的大小，若 $\frac{1}{5}x$ 总不超过 $\frac{3}{5}\sqrt{x}$，就应该把全部资金投入乙。

学生 5：对学生 4 的情况进行运算，不难发现 $\frac{1}{5}x\le\frac{3}{5}\sqrt{x}$ 的解为 $0\le x^2\le 9$，即 $0\le x\le 9$ 时，总有 $\frac{1}{5}x\le\frac{3}{5}\sqrt{x}$，所以应该把全部资金投入乙，得到的最大利润为 $\frac{3}{5}\sqrt{3}$ 万元。

学生 6：在学生 1 的解法中，已经得到最大利润为 1.05 万元，比 $\frac{3}{5}\sqrt{3}\approx 1.039\cdots$ 万元大，这说明 $\frac{3}{5}\sqrt{3}$ 万元不是最大利润，如果把投入甲的 0.75 万元也投入到乙呢？

学生 7：验证如下：$\frac{3}{5}\sqrt{3}<1.05=\frac{1}{5}\times 0.75+\frac{3}{5}\sqrt{2.25}<\frac{3}{5}\sqrt{0.75}+\frac{3}{5}\sqrt{2.25}$，所以最大利润应该为 $\frac{3}{5}\sqrt{0.75}+\frac{3}{5}\sqrt{2.25}$，即把投入甲的 0.75 万元也投入到乙，所得到的最大利润为 $0.9+\frac{3}{5}\sqrt{0.75}\approx 1.4196$ 万元。

学生 8：上述情况只能说明，把 3 万元资金一次性投入乙和分两批投入乙，所得利润是不同的，且分两次投资时，利润较大。

老师：那如果分 3 次，4 次，n 次对乙投资呢？

学生9：设把3万元资金分n次投入给乙，每次投入的资金分别为$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$万元，则总利润为$y$，则$y=\frac{3}{5}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\right)$，用柯西不等式得$y \le \frac{3}{5}\sqrt{n\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)}=\frac{3}{5}\sqrt{3n}$，当且仅当，$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{3}{n}$时取等号，所以最大利润为$\frac{3}{5}\sqrt{3n}$。

学生10：按照学生9的说法，最大利润与投资次数有关，当且仅当n趋近于无穷大时，最大利润也无穷大。即投资3万，利润却无限。

此时老师也处于沉思状态，无法给出合理的解释，因此只作了小结，表示这节课同学们思考问题十分积极，敢于探索，讨论热烈，值得肯定，以上的同学回答都很合理，但结果却产生了与实际不符的矛盾，这说明了什么？

3.2. 课例分析与思考

不管是从课例中作者对该题的一些结论和思考，还是在职教师真实课堂中的提到的矛盾，都无一不体现出对这个题目的质疑，那就是这个题目与现实生活情境真的相关吗？不难发现，其实产生这个疑问的最根本原因就是问题情境的设计脱离了实际，现实生活中不存在这样的真实投资问题，因为$p=\frac{1}{5}x$，$q=\frac{3}{5}\sqrt{x}$都是增函数，因此投资产生的利润就会一直增长，但真实的投资不会一直盈利，且不应该是线性函数，其生成的应该是比较复杂的函数图像，因此利润不会一直呈现曲线增长，尤其是投资仅有3万元，现实得到的回报不会呈现这样的高增长，而投资某个项目也不会仅投资几元、几十元、几百元如此之少，因此这个题目中的所谓的“最佳投资”可以说在现实生活中是漏洞百出的。

综上所述，当前中学数学在设计问题的过程中，许多题都存在类似的问题，有的严重偏离实际，有的经不起详细推敲，有的甚至完全不管问题中的情境是什么样，使得题目变成了一个简单数学运算题。有的数学问题的问题情境会误导学生，导致他们与生活实际完全脱轨，这是十分可怕的，所以要重视问题情境的真实性。

真实性问题情境在很多领域，特别是教育、科研以及问题解决中，都具有极其重要的意义。以下是真实性问题情境的重要性和作用：

1) 激发学习兴趣和动力。真实性问题情境通常与人们的日常生活、工作或与社会的紧密联系相关。这种关联性能够极大地激发学生探索的兴趣和动力，使他们更加投入地参与到问题的解决过程中。

2) 培养实践能力和创新思维。在真实性问题情境中，学生需要运用已有的知识和技能，结合实际情况进行分析和决策。这种过程不仅有助于巩固和深化已有知识，还能够培养实践能力和创新思维，使其在面对新问题时能够灵活应对。

3) 提高问题解决能力。真实性问题情境通常涉及多个方面和复杂因素，需要学生进行综合分析和判断。这种过程有助于培养学生的问题解决能力，包括信息收集、分析、判断、决策和行动等关键能力。

4) 促进知识的迁移和应用。在真实性问题情境中，学生需要将所学的知识和技能应用到实际问题中。这种过程有助于促进知识的迁移和应用，使个体能够更好地将所学知识应用于实践，发挥数学知识的实用性和价值。

5) 增进对社会的了解和认知。真实性问题情境往往涉及社会现象和问题，通过参与这些问题的解决过程，学生可以更加深入地了解社会现象和问题的本质和原因，从而增进对社会的了解和认知。

6) 培养责任感和使命感。真实性问题情境往往与国家的切身利益、社会福祉相关，通过参与这些问题的解决，学生可以更加深刻地认识到自己的责任和使命，从而激发他们为社会做出贡献的热情和动力。

7) 有利于跨学科整合学习。真实性问题通常涉及多个学科领域的知识和技能，通过解决这些问题，学生需要跨越学科界限，整合不同学科的知识和技能。这个过程有助于培养学生的跨学科整合能力，使他们能够更好地应对复杂多变的问题。

4. 创设真实性问题情境的教学策略

真实情境是学生核心素养形成与发展的重要载体[5]，因此体现数学问题的真实性情境是数学教学中的一个重要立足点，它能够帮助学生更好地理解数学概念，并将所学应用到实际生活中。以下是如何体现真实性问题情境的教学策略：

1) 引入现实生活问题

生活实例往往最贴近实际，学生最能够感同身受。例如教师在教授“百分比”的内容时，可以创设一个购物情境。假设学生去商场购物，商场正在进行打折活动，某商品原价 100 元，现在打八折，问学生这个商品现在多少钱。这个问题将百分比与实际购物活动结合起来，让学生能够更直观地理解百分比的概念。

2) 适当考虑游戏导入

游戏法的最大优势在于可以吸引学生的学习兴趣，使得其在思考时更加投入。例如在教授“概率”时，可以设计一个抽奖游戏。准备一些写有不同奖项的纸条放入抽奖箱中，让学生轮流抽奖，并统计每个奖项被抽中的次数。通过这个游戏，学生可以亲身体验概率的随机性和规律性，从而更深入地理解概率的概念。

3) 注重问题情境的开放性

开放式问题可以充分发挥学生的主动性，并且会让学生动手实际操作，体会到数学的实用性。例如在教授“图形面积”时，可以提出一个开放性问题：“如何设计一个面积为 XX 平方米的花园，并使其美观实用？”学生需要根据自己的想象力和数学知识来设计花园，甚至可以到空地上进行模拟推演和运算其面积。这个问题能够激发学生的创造力和想象力，同时帮助他们巩固图形面积的计算方法。

4) 加强前后知识的对比

在教学中，通过对比的方式是最能让学生进行联想，也是最容易接受的方式。例如在教授“比例”时，可以通过对比不同大小的相似图形来引入概念。准备几组相似但大小不同的图形(如三角形、矩形等)，让学生观察并比较它们的边长和面积的比例关系。通过对比演示，学生可以更直观地理解比例的概念和性质。

5) 注重多学科知识的整合

当前很多知识都存在学科内容上的整合，学生需要充分利用多学科知识来解决问题。例如在教授“统计”时，可以与其他学科如科学、历史等相结合。假设学生正在研究某个历史时期的人口变化，他们可以使用统计方法来收集和分析数据，并绘制图表来展示人口变化的趋势。这个情境不仅帮助学生巩固统计知识，还让他们了解历史背景和社会现象。

6) 落实实际问题的解决

真实性问题情境说到底还是要解决实际问题，才能与社会生活接轨，因此要重视实际问题的解决。例如在教授“代数方程”时，可以设计一个关于节水问题的实际情境。假设一个家庭每月的用水量与其家庭成员数量、用水习惯等因素有关，让学生根据家庭实际情况建立代数方程来求解节水方案。这个问题能够让学生意识到数学在解决实际问题中的重要作用。

通过以上教学策略可以看出，创设数学问题的真实性情境需要结合学生的生活经验、兴趣爱好和实际问题，将数学知识与实际情境相结合，让学生在解决实际问题的过程中学习和巩固数学知识。同时，

这种教学方式还能够激发学生的学习兴趣和创造力，提高他们的数学素养和解决问题的能力。

5. 结语

本文通过对“一道最佳投资应用题的风波”的课例分析，发现当前数学问题情境的“真实性”有所欠缺，因此通过文献梳理和反思后，得到创设真实性问题情境的教学策略，以期发展学生数学核心素养，提高其问题解决能力。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 刘徽. 真实性问题情境的设计研究[J]. 全球教育展望, 2021, 50(11): 26-44.

[3] 陈瑶, 于琪, 苏亚坤. 基于 SOLO 分类理论的高考“几何与代数”模块研究——以 2021-2023 年新高考I卷和II卷为例[J]. 理科考试研究, 2024, 31(9): 22-27.

[4] 吴煜乐, 丁翼飞, 陆静. 思维结构视域下的高中地理问题情境设计[J]. 地理教育, 2024(5): 50-53+58.

[5] 成宏乔. 真实情境: 数学核心素养发展的重要载体[J]. 中学数学教学参考, 2023(17): 62-64.