

浅谈GeoGebra软件在高中函数教学中的应用

——以2022年全国I卷第22题为例

刘 明

浏阳市田家炳实验中学，湖南 浏阳

收稿日期：2024年7月20日；录用日期：2024年8月21日；发布日期：2024年8月28日

摘 要

高中函数内容具有高度的抽象性，而GeoGebra软件兼备几何、代数等功能，能将抽象的内容直观、动态地展示出来。本文将借助2022年全国I卷第22题，探究如何利用GeoGebra软件帮助教师突破高中函数教学中的难点，为激发学生学习兴趣，促进学生的数学核心素养的养成提出建设性建议。

关键词

GeoGebra, 高中数学, 高中函数教学

A Brief Discussion on the Application of GeoGebra Software in Senior High School Function Teaching

—Taking the 22nd Question of the 2022 National I Paper as an Example

Ming Liu

Tian Jiabing Experimental Senior High School of Liuyang, Liuyang Hunan

Received: Jul. 20th, 2024; accepted: Aug. 21st, 2024; published: Aug. 28th, 2024

Abstract

The content of high school functions is highly abstract, while the GeoGebra software has both geometric and algebraic functions, which can intuitively and dynamically display abstract content. This paper will use the 22nd question of the 2022 National I paper as an example to explore how

to use the GeoGebra software to help teachers break through the difficulties in high school function teaching, and propose constructive suggestions for stimulating students' interest in learning and promoting the development of students' mathematical core literacy.

Keywords

GeoGebra, High School Mathematics, High School Function Teaching

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 高中函数教学的困境与思考

函数是高中数学中非常重要的模块,作为高中数学教材中必修一第一章的学习内容,函数模块是培养高中生数学核心素养的第一个主阵地,在高中生数学核心素养培养中起着十分重要的作用。但函数内容具有高度的抽象性,给教师的教和学生的学都造成了极大的困扰,打击学生学习信心。

GeoGebra 软件兼备几何、代数、概率与统计、微积分和逻辑运算等功能,长于数与形的融合,擅长将抽象的内容直观、动态地展示出来,其操作界面十分友好,便于教师学生上手,是一款非常适合高中数学教学展示、学生自主探究、师生互动交流的优秀数学软件。

近年来学者们热衷 GeoGebra 技术在高中数学、物理、地理、生物等学科中的教学实践研究。在高中数学教学中的研究主要集中在函数、立体几何、概率统计和平面几何等知识模块,着重探究学生数学直观、数学建模和数学抽象等核心素养的培养策略,学生数学思维和综合应用能力的提升路径,以及 GeoGebra 应用实践过程中应遵循的原则,和 GeoGebra 应用于高中数学教学的模式构建。如凌翔提出 GeoGebra 融合教学应遵循“主体性”、“目的性”、“可接受性”以及“几何与代数相结合”等教学原则,并提出“综合运用多种教学媒体”、“创设动态化的教学情境”和“合理有效地运用信息技术”等三个教学策略[1];周秀农认为 GeoGebra 在高中生数学抽象思维能力培养方面具有便捷、易于学习、教学资源丰富、功能强大等优势[2];陈丽萍认为 GeoGebra 应用可以提升学生逻辑推理素养,深化审美价值[3];张玉婷提出“找准教学内容的结合点”,“展开培训与交流转变教师与学生的观念”和“强化教学设备建设”等三个提升路径[4];耿宁、吴华则在具身认知视域下构建了 GeoGebra 融合数学教学的模式,提出将环境、技术、身心、师生等教学要素统一于整体,调动学生学习的参与度和自主建构[5]。

本文将借助 2022 年全国 I 卷第 22 题,探究如何利用 GeoGebra 软件帮助教师突破高中函数教学中的难点,激发学生学习兴趣,促进数学核心素养的养成。

2. 例解 GeoGebra 软件在高中函数教学中的应用

2.1. 真题回顾

2022 年全国新高考 I 稳步推进改革,再一次突出了数学学科特点,强化素养导向,注重数学思想方法的渗透,强调基础考查,深入考察关键能力,试题多次考察函数图象的对称性,如第 6, 10, 12 题,曲线的切线,如第 10, 11, 14, 15 题,注重数形结合、化归与转化等思想方法的渗透。

第 22 题本题考查导数与函数的单调性、最值、函数的零点,真题如下:

已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有不同的最小值。

1) 求 a ;

2) 证明: 存在直线 $y=b$, 其 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 两条曲线和共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列。

本题通过设置综合性的问题, 加强基于数学素养的关键能力的考查, 在数学知识、数学能力和创新思维层面都有所体现。笔者希望通过展示 GeoGebra 软件对解答本题的辅助, 使学生对零点问题有一个更直观的认识, 能将参数变化时, 函数图象的变化“可视化”, 帮助学生更深入地了解抽象的超越函数, 增强学生学习兴趣, 提升思维能力。

2.2. 利用 GeoGebra 探究解题过程

解: $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 。 $f'(x) = e^x - a$, $g'(x) = a - \frac{1}{x}$ 。

到这里, 我们可以清晰地感知到两个函数及其导函数的图象与性质都与参数 a 有关, 我们可以利用 GeoGebra 软件把这个过程直观化、可视化, 我们先用 GeoGebra 的求导功能, 先求出导函数, 再画出导函数的图象, 动态展示参数 a 从负值到正值变化过程中, 对函数与图象单调性、最值等的影响, 不难发现, 如图 1 所示, 当 $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在定义域内均为单调函数, 两者均无最值, 不符合题意。如图 2 所示, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 在定义域内均先减后增, 都有最小值, 而且随着 a 的变化, 驻点与单调区间也随之变动。

1) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 没有最小值, 不符合题意。

2) 当 $a > 0$ 时, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上 $f'(x) < 0$, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 且 $x = \ln a$ 处, $f'(x) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处取得极小值, 即为最小值, 最小值为 $f(\ln a) = a - \ln a$ 。

在 $(0, \frac{1}{a})$ 上 $g'(x) < 0$, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$, 且 $x = \frac{1}{a}$ 处, $g'(x) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 处取得极小值, 即为最小值, 最小值为 $g(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a$ 。

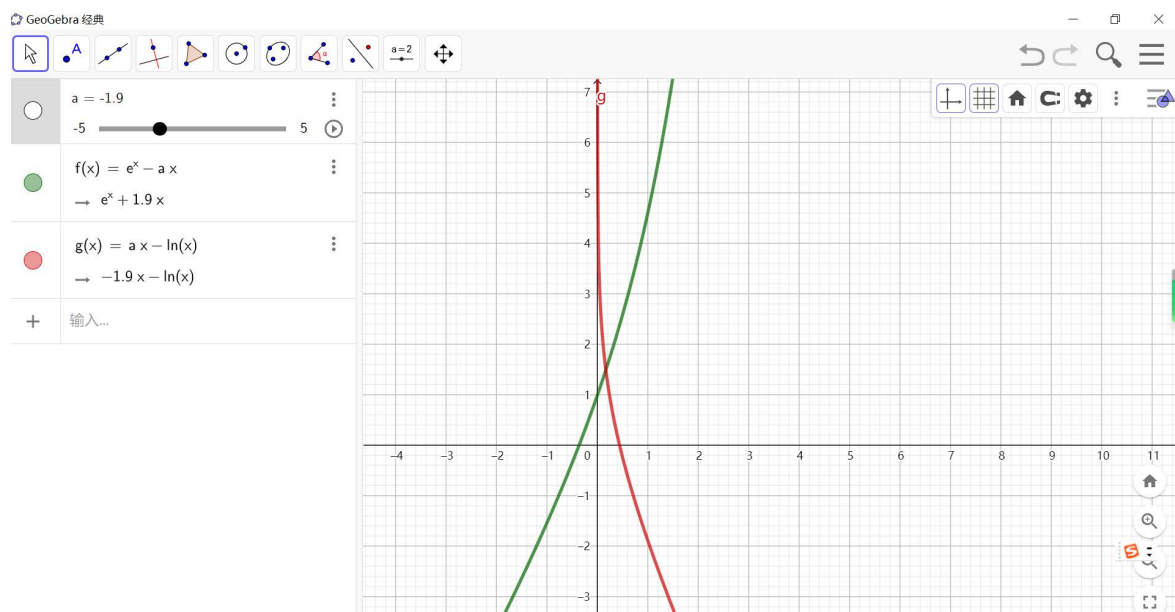


Figure 1. The example of function graph when $a \leq 0$

图 1. 当 $a \leq 0$ 时函数图象示例

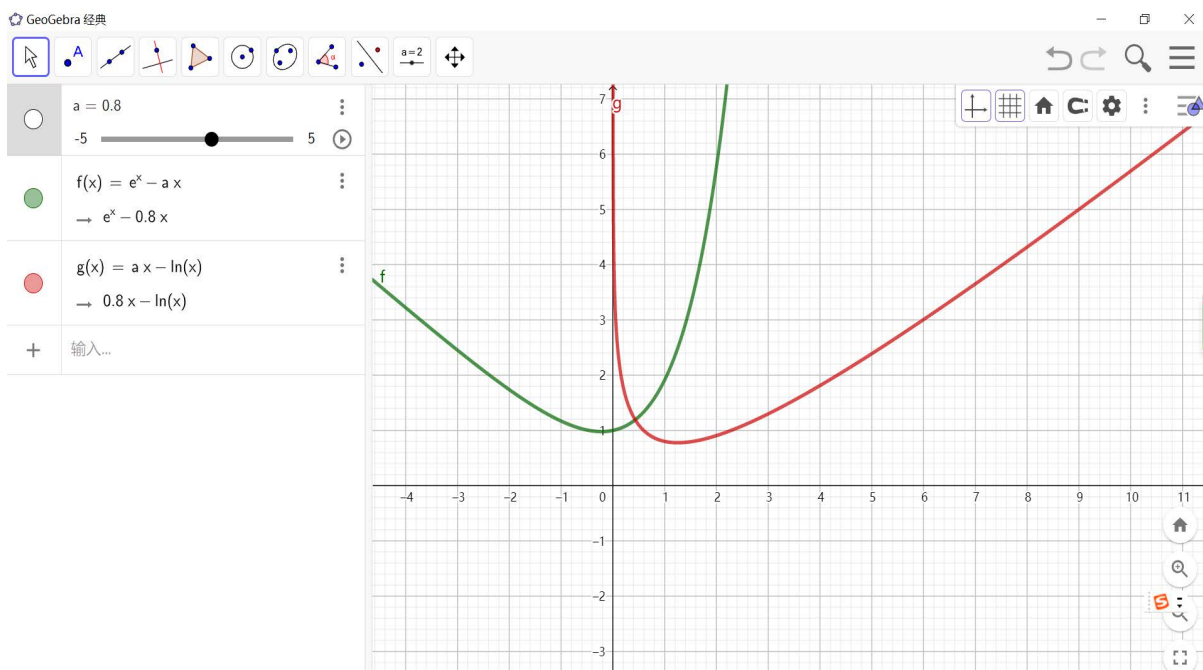


Figure 2. The example of function graph when $a > 0$

图 2. 当 $a > 0$ 时函数图象示例

如图 2 所示, 当 $a > 0$ 时, 虽然随着 a 的变化, $f(x)$ 与 $g(x)$ 在定义域内的单调区间和最值都随之变化, 但始终先减后增, 都有最小值 $f(\ln a)$ 、 $g\left(\frac{1}{a}\right)$ 。

而接下来在 $a > 0$ 的范围内寻求让等式 $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$ 成立的参数 a 的大小的过程中, GeoGebra 可以发挥其强大的功能和优势, 利用 GeoGebra 接下来有三个解题策略。

2.2.1. 策略一: 利用 GeoGebra 求导函数和零点功能探究 $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = 1 + \ln x$ 有相同的最小值, 所以 $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$, 即 $a - a \ln a = 1 + \ln a$, 因为 $a > 0$, 所以上式等价于 $\ln a - \frac{a-1}{a+1} = 0$ 。

令 $h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$ ($x > 0$), 则如图 3 所示, 由 GeoGebra 求导函数功能()易知 $h'(x) = \frac{x^2 + 1}{x(x+1)^2} > 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。利用 GeoGebra 的求函数零点功()得 $h(1) = 0$, 所以 $a = 1$ 。

2.2.2. 策略二: 利用 GeoGebra 求极值点功能探究 $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$

此时, 可以运用 GeoGebra 中的求极值点的功能(), 描绘并计算出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的极值点及其坐标, 变化参数的值, 观察两个极值的大小, 即两个最值 $f(\ln a)$ 、 $g\left(\frac{1}{a}\right)$ 的大小。

如图 4 所示, 当 $0 < a < 1$ 时, 点 A 始终在点 B 上方, 也就是说, 此时 $f(\ln a) > g\left(\frac{1}{a}\right)$ 。

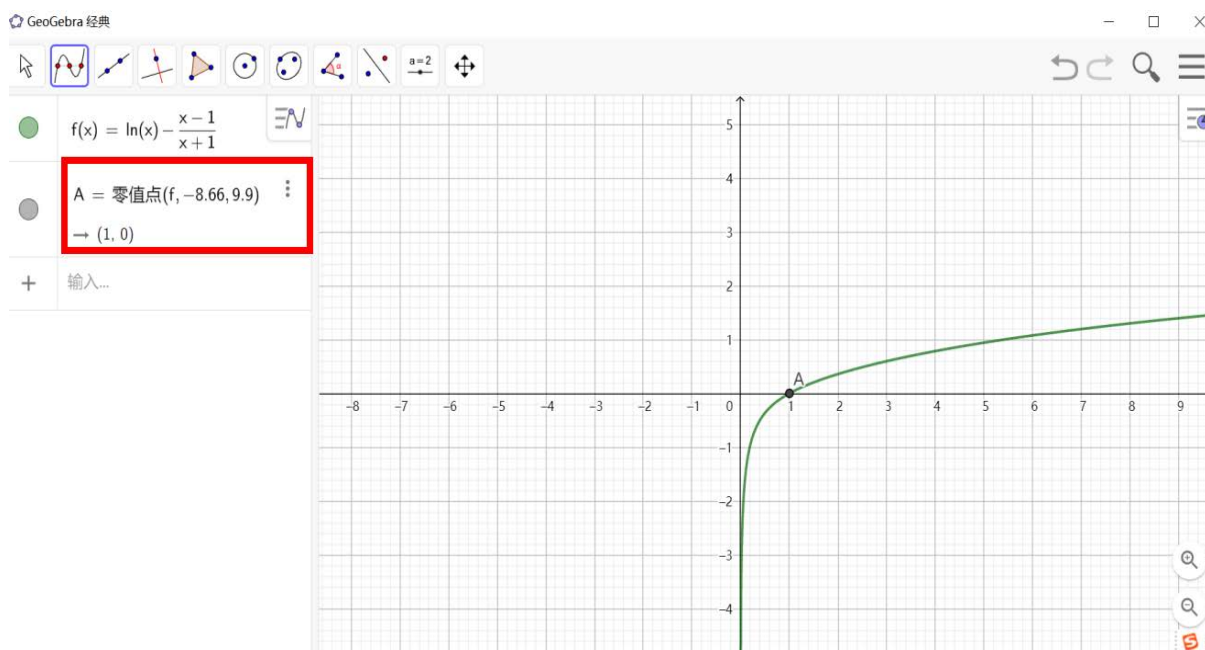


Figure 3. The graph of the function $h(x)$

图 3. 函数 $h(x)$ 的图象

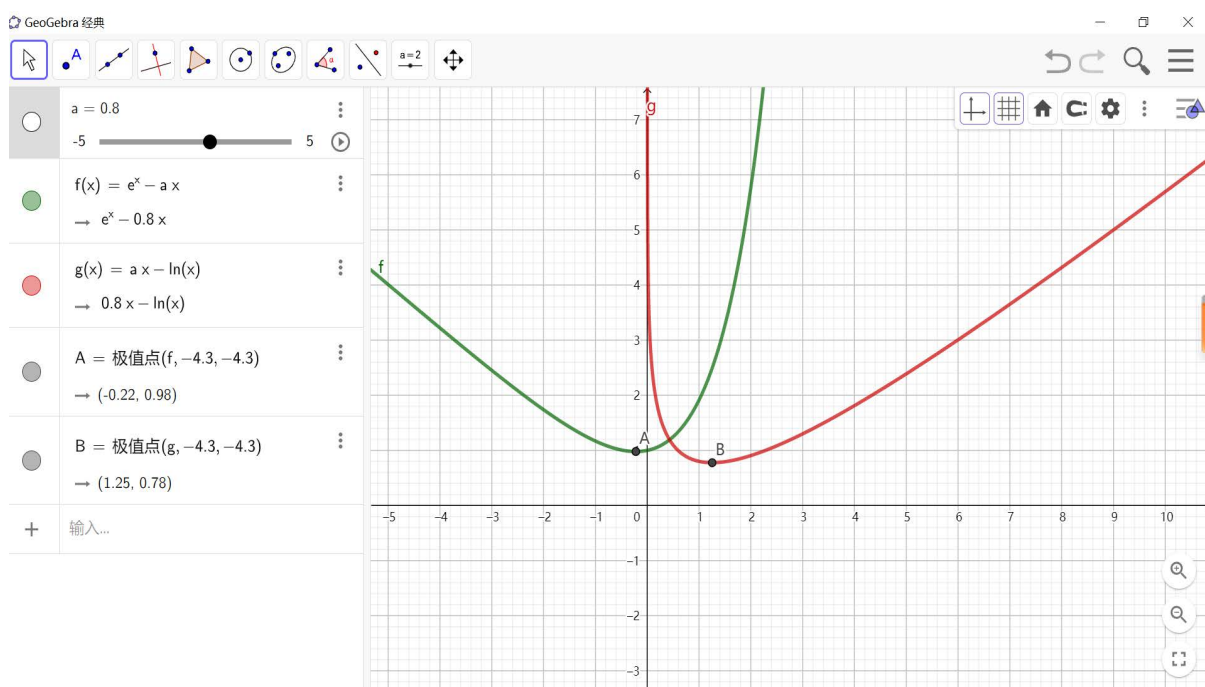


Figure 4. The example of function graph when $0 < a < 1$

图 4. 当 $0 < a < 1$ 时函数图象示例

如图 5 所示, 当 $a > 1$ 时, 点 B 始终在点 A 上方, 也就是说, 此时 $f(\ln a) < g\left(\frac{1}{a}\right)$ 。

如图 6 所示, 当 $a = 1$ 时, 点 A 与点 B 的纵坐标相等, 即此时 $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$ 。

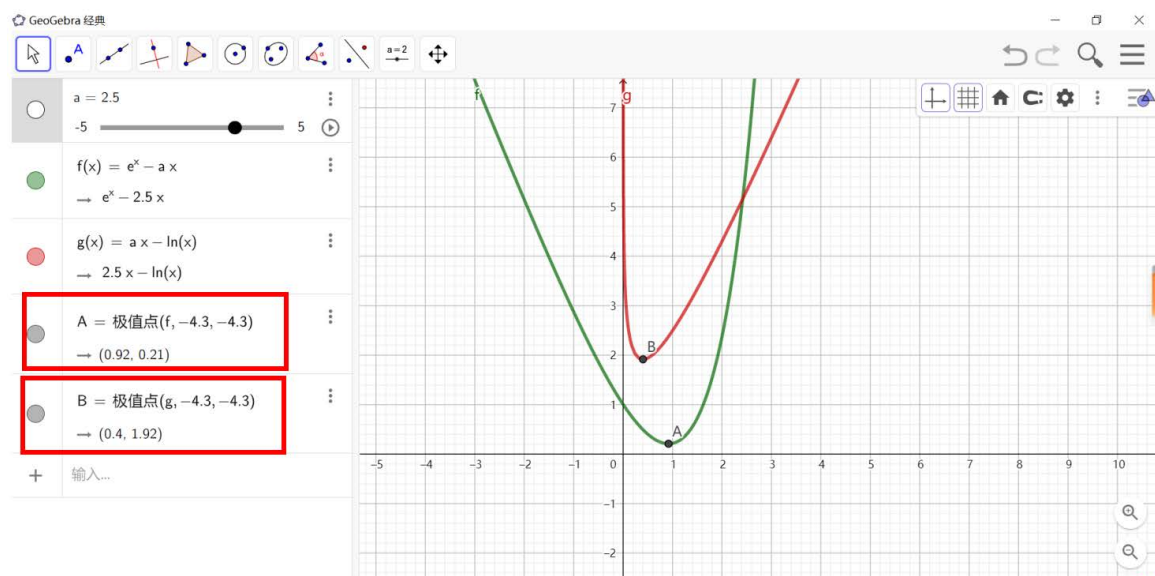


Figure 5. The example of function graph when $a > 1$

图 5. 当 $a > 1$ 时函数图象示例

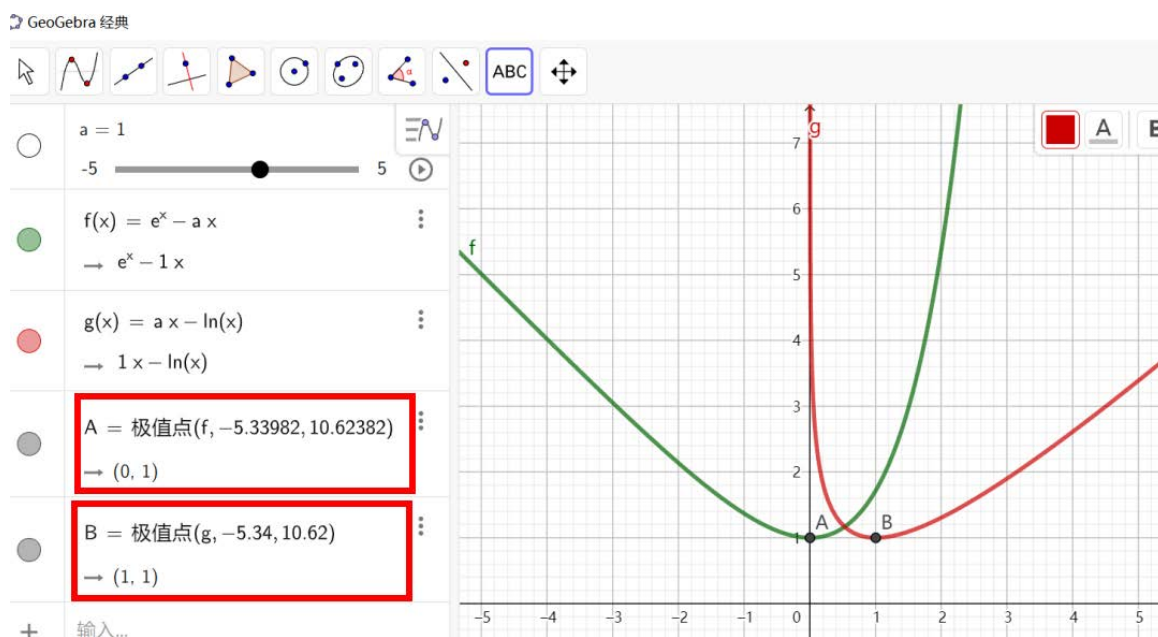


Figure 6. The function graph when $a = 1$

图 6. 当 $a = 1$ 时函数图象

2.2.3. 策略三：利用 GeoGebra 求图象交点功能探究 $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$

由上可知 $f(\ln a) = a - \ln a$, $g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a$, 可以运用 GeoGebra 中的求交点的功能(), 描绘并计算出 $f(x) = x - x \ln x$ 与 $g(x) = 1 + \ln x$ 的交点及其坐标, 如图 7 所示, 即可立即得知当 $x=1$ 时 $x - x \ln x = 1 + \ln x$, 即当 $a=1$ 时, $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$ 。

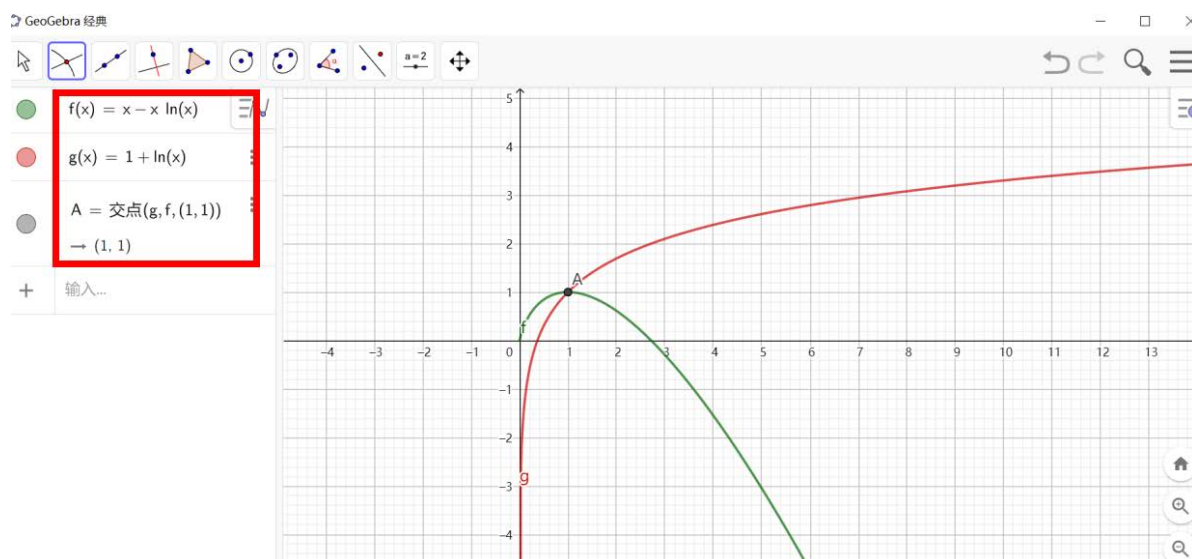


Figure 7. The graph of the function $f(x)$ and $g(x)$

图 7. 函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的图象

第(2)问解析: 由(1)可知 $f(x) = e^x - x$ 、 $g(x) = x - \ln x$ 。 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 1 > 0$; $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 且 $g(1) = 1 > 0$; $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象如图 8 所示, 可知两图象相交于点, 由题意过 A 作平行于 x 轴的直线即为所求直线 $y = b$, 如图所示的点 B、A、C 即为题目所要考虑的点, 用 GeoGebra 可以自动计算这三个点的横坐标, 验证结论的正确性。

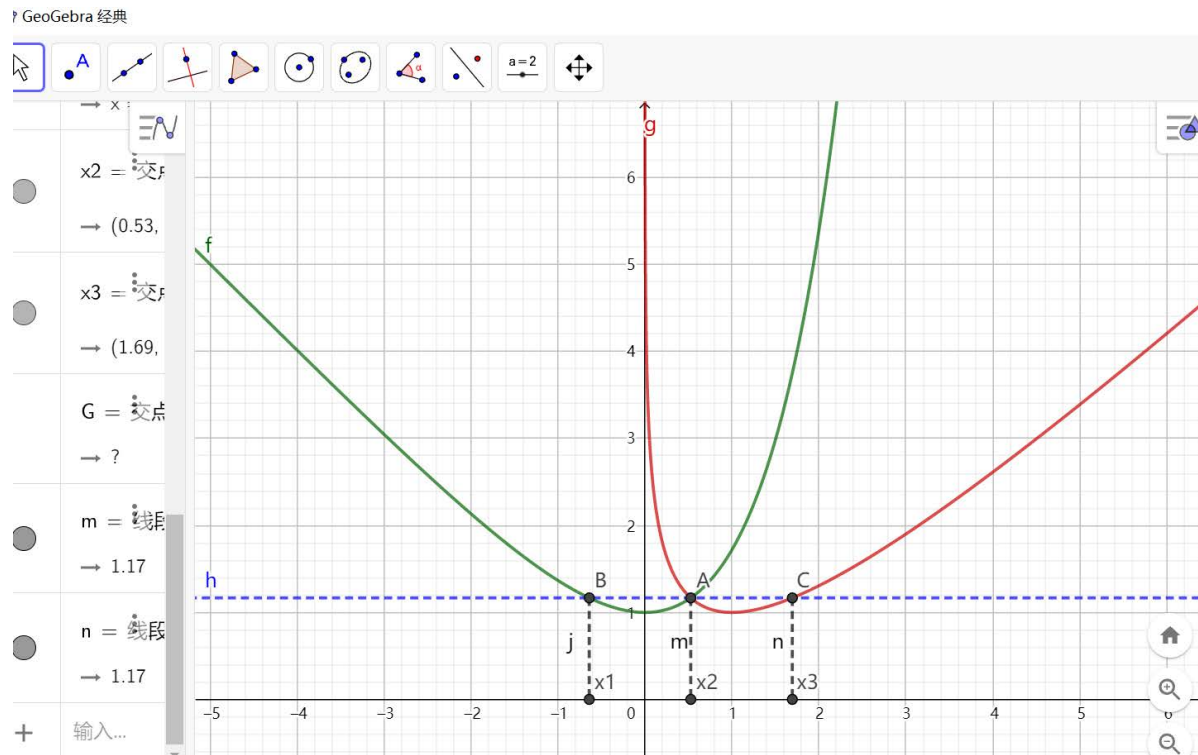


Figure 8. The intersection points of the graphs of the functions $f(x)$ and $h(x)$ with the line $y = b$

图 8. 函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 图象与直线 $y = b$ 的交点

当然,对于本题中的第(2)问,GeoGebra 软件只能直观地提供一种方向,并肯定这种可能性,对于题目中结论还需要严谨的证明,解析如下:

设直线 $y=b$ 与 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 三个交点的横坐标分别为 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 所以 $x_1 < 0$, $0 < x_2 < 1$, $x_3 > 1$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = e^{x_1} - x_1 = e^{x_2} - x_2 = b$, $g(x_2) = g(x_3) = x_2 - \ln x_2 = x_3 - \ln x_3 = b$, 所以 $e^{\ln x_2} - \ln x_2 = e^{\ln x_3} - \ln x_3 = b$, 即 $f(\ln x_2) = f(\ln x_3) = b$ 。

又 $\ln x_2 < 0$, $\ln x_3 > 0$, 所以 $x_1 = \ln x_2$, $x_2 = \ln x_3$, 且 $e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2$, 即 $e^{x_2} + \ln x_2 = 2x_2$, 所以 $x_1 + x_3 = 2x_2$ 。

所以存在直线 $y=b$, 其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列。

3. 思考与感悟

3.1. 注重信息技术与学科融合, 深入理解问题本质

信息技术与教学深度融合是改变传统教学方式, 培养学生核心素养的有效途径和方法, 是目前基础教育改革的潮流和趋势。《普通高中数学课程标准(2017 年版)》明确指出, “提升信息技术的使用能力, 通过信息技术与课程的深度融合以及课程资源开发的多样化实现” [6]。这就需要信息技术的辅助, 比如从 2022 年全国 I 卷第 22 题的探究过程, 尤其第一问在 $a > 0$ 的范围内寻求让等式 $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$ 成立的参数的大小的过程中, GeoGebra 轻松直观地展示了从方程的根等、函数的零点、函数图象的交点这三个策略解决问题过程, 让学生清楚体验、感知三者之间的联系与差异, 以及三者之间等价转化, 让学生看到背后的数学逻辑与思想, 触摸到数学知识的本质。

3.2. 重视知识生成与体验, 落实数学核心素养

皮亚杰说过, 只有学生自己发现的知识和技能, 才能积极地被自己同化, 从而产生深刻的理解, 新课标更是多次提到要让学生“感知”“体验”“亲身经历”知识的生成过程。教学中, 我们借助 GeoGebra 等数学软件, 可以轻松直观地展示动态的思维过程, 化抽象为具体, 让不可捉摸的数学思想“可视化”, 这正是为学生的“亲身经历”提供了强有力的支撑。简言之, GeoGebra 等信息技术在培养学生数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学建模等数学核心素养中有着强大的功能和优势, 能帮助师生更好地适应“双基”到“四基”、“四能”的转变, 应对高考中能力立意到素养导向的变化[7] [8]。

参考文献

- [1] 凌翔. GeoGebra 软件辅助高中数学教学的实践研究[D]: [硕士学位论文]. 阜阳: 阜阳师范大学, 2023.
- [2] 周秀农. 运用 GeoGebra 软件培养高中生数学抽象思维能力的研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东师范大学, 2022.
- [3] 陈丽萍. GeoGebra 与高中数学教学深度融合的思考与探索——以探究与发现“为什么截口曲线是椭圆”为例[J]. 基础教育参考, 2021, 12(10): 47-50.
- [4] 张玉婷. 基于 GeoGebra 软件培养数学核心素养的高中函数教学研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2021.
- [5] 耿宁, 吴华. 具身认知视域下 GeoGebra 融合高中数学教学的模式构建——以“椭圆的标准方程”为例[J]. 中国教育技术装备, 2022(17): 124-128.
- [6] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [7] 闫伟. 运用 GeoGebra 软件助力可视化探究教学——以圆锥曲线中的一类动点轨迹问题为例[J]. 中学数学教学,

2021(3): 13-16.

- [8] 吴纯良. 基于 GeoGebra 的统计教学课例赏析——“两个变量的线性相关(第 2 课时)” [J]. 数学通报, 2016, 55(12): 20-23.