

除数是两位数的口算除法学习路径研究：口算估商

杨雨佳

杭州师范大学经亨颐教育学院，浙江 杭州

收稿日期：2024年7月12日；录用日期：2024年8月13日；发布日期：2024年8月20日

摘 要

整数除法是小学阶段运算的重要部分，其中“除数是两位数的除法”是整数除法的最后内容。其中，口算除法作为起始课，学生通过掌握口诀找商的口算技能，迁移至整十数除几百几十数的除法，总结运算经验、完善算法，可以为笔算除法奠定坚实基础。本文采用行动研究法探索了“除数是两位数的口算除法”学习路径，在“如何多元表征 $80 \div 20$ ”这一关键问题的驱动下，经过研讨、修改得到了优化的学习路径，该学习路径凸显了“口算估商”的必要性，并提出以下建议：直观表征，抽象概括算法；强化口算技能，唤醒估商经验。

关键词

除数是两位数的除法，学习路径，口算除法，单元整体教学

The Divisor Is a Two-Digit Oral Arithmetic Division Learning Path Study: Oral Arithmetic Estimator

Yujia Yang

Jing Hengyi School of Education, Hangzhou Normal University, Hangzhou Zhejiang

Received: Jul. 12th, 2024; accepted: Aug. 13th, 2024; published: Aug. 20th, 2024

Abstract

Integer division is an important part of the operation in primary school, in which “the divisor is

the division of two digits” is the final content of integer division. Among them, oral arithmetic division is the starting course, and students can lay a solid foundation for pen arithmetic division by mastering the oral arithmetic skills of finding quotients by formulas, transferring to the division of integer tens by hundreds and dozens of numbers, summarizing the operation experience and improving the algorithm. Driven by the key problem of “how to multivariately represent $80 \div 20$ ”, this paper explores the learning path of “oral arithmetic and division” by using action research method, which highlights the necessity of “oral arithmetic quotient”, and puts forward the following suggestions: intuitive representation, abstract generalization algorithm; strengthen oral arithmetic skills and awaken the experience of business valuers.

Keywords

The Divisor Is a Two-Digit Division, Learning Paths, Oral Arithmetic Division, Teaching of the Unit as a Whole

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》明确指出:“数的运算重点在于理解算理、掌握算法,学生经历算理和算法的探索过程,感悟数的运算以及运算之间的关系,体会数的运算本质上的一致性,有助于形成运算能力和推理意识。”[1]“除数是两位数的除法”被称为整数四则运算的“收官之作”,其算理、算法与除数是一位数的除法相同,究其本质都是对计数单位的细分[2]。口算是估算、笔算的基础,在学生的计算学习中起着重要的作用。中低段学生思维正处于直观形象思维阶段,需要借助具体的事物来进行思考和表达。教学采用图片、小棒或者计数器等工具让口算的思维过程可视化地展现出来,数形结合,寓理于形。

在《除数是两位数的除法》单元中,基于平均分的口算除法教学是渗透笔算除法算理即“对计数单位细分”的关键铺垫,而教师在教学时往往更侧重于强调除法包含除的意义而非凸显平均分的重要性,缺乏对图片、小棒或者计数器等工具的有效使用,无法引导学生用可视化的学习素材自主探究理解口算的计算原理,尚未注重学生已有经验的正向迁移。由此可知,厘清口算除法的算理并运用口算技能迁移运算除数是两位数的笔算除法是本研究亟待解决的问题。

学习路径的概念则最早由 Clements 和 Sarama 在 2004 年提出,他们将学习路径定义为学生学习某一具体数学知识时,思维与学习过程的描述,以及一个相关的、设想的路径,这个路径就是一系列指向学习目标的学习任务,帮助学生实现“思维进阶”[3]。因此,本研究以学习路径为工具,旨在探索出一条基于技能迁移的学习路径,以此将除数是一位数的除法的口算技能迁移至除数是整十数且商为一位数的除法乃至除数是非整十数且商为一位数的除法。本文聚焦于“掌握口算技能”,主要围绕以下两个子问题展开:

1) 如何借助平均分的意义用乘法口诀口算除数是整十数的除法?

2) 如何设计学习路径,将除数是一位数“口算试商”的技能迁移估算除数是两位数(商是一位数)的除法?

2. 研究设计

2.1. 研究对象

选取杭州市 YHSY 小学四年级的两个平行班(分别记为甲班和乙班)作为研究对象,按照本研究设计的学习路径进行学习。

在实验前,对甲班和乙班进行前测。统计得分,进行独立样本 t 检验,结果表明,两班关于除数是两位数口算除法的预备知识不存在显著性差异($t = 0.452$, $P = 0.640$)。

2.2. 研究流程

通过查阅文献、教材比较,初步拟定初构的“口算估商”的学习路径 A1 并在甲班开展实施,基于此,专家和一线教师指出了教学中可能存在的问题并给出了相应的修改建议。为探究得到完善的学习路径,本研究经历了多次教学设计、两次教学实践以及多次教学研讨,得到优化的学习路径 A2,已在乙班开展教学,学习路径优化的具体流程如图 1 所示:

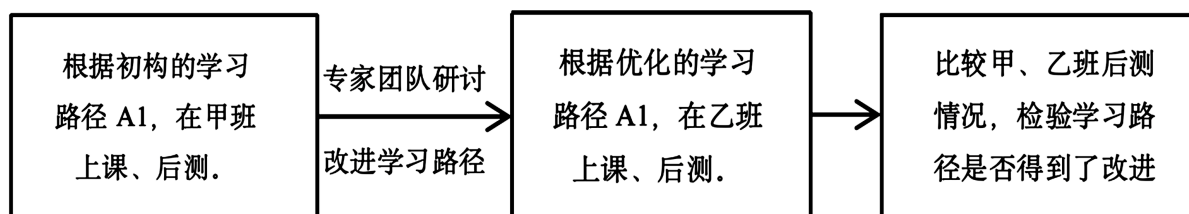


Figure 1. Research process

图 1. 研究流程

2.3. 问卷及数据处理

授课后,及时对学生后进行后测。后测问卷共 2 题:

第 1 题: 计算 $540 \div 60$ 时,可以把 540 看作()个()除以 60,得到()个(),也就是(),想到的口诀是()。

本题考查学生对几百几十数除以整十数的除法的口算算法的掌握程度。

第 2 题: $205 \div 40 \approx$

本题考察学生对除数是两位数、商是一位数的除法的估算算法的经验水平。

第一题考查几百几十数除以整十数的口算除法,计分标准为答对得 1 分,答错得 0 分。例题如下: 计算 $540 \div 60$ 时,可以把 540 看作()个()除以 60,得到()个(),也就是(),想到的口诀是()。第二题考察除数是两位数、商是一位数的除法估算(如: $205 \div 40$),计分标准为答对得 1 分,答错得 0 分。针对问卷的信度,采用 Alpha 信度系数法,得出后测问卷的 Alpha 系数为 0.729,说明问卷的信度较好。

3. 研究结果

3.1. 路径呈现

通过查阅文献、教材比较,初步拟定初构的“做除想乘、口算估商”的学习路径 A1 并在甲班开展实施,基于此,专家和一线教师指出了教学中可能存在的问题并给出了相应的修改建议。为探究得到完善的学习路径,本研究经历了多次教学设计、两次教学实践以及多次教学研讨,得到优化的学习路径 A2,已在乙班开展教学,如图 2 所示。

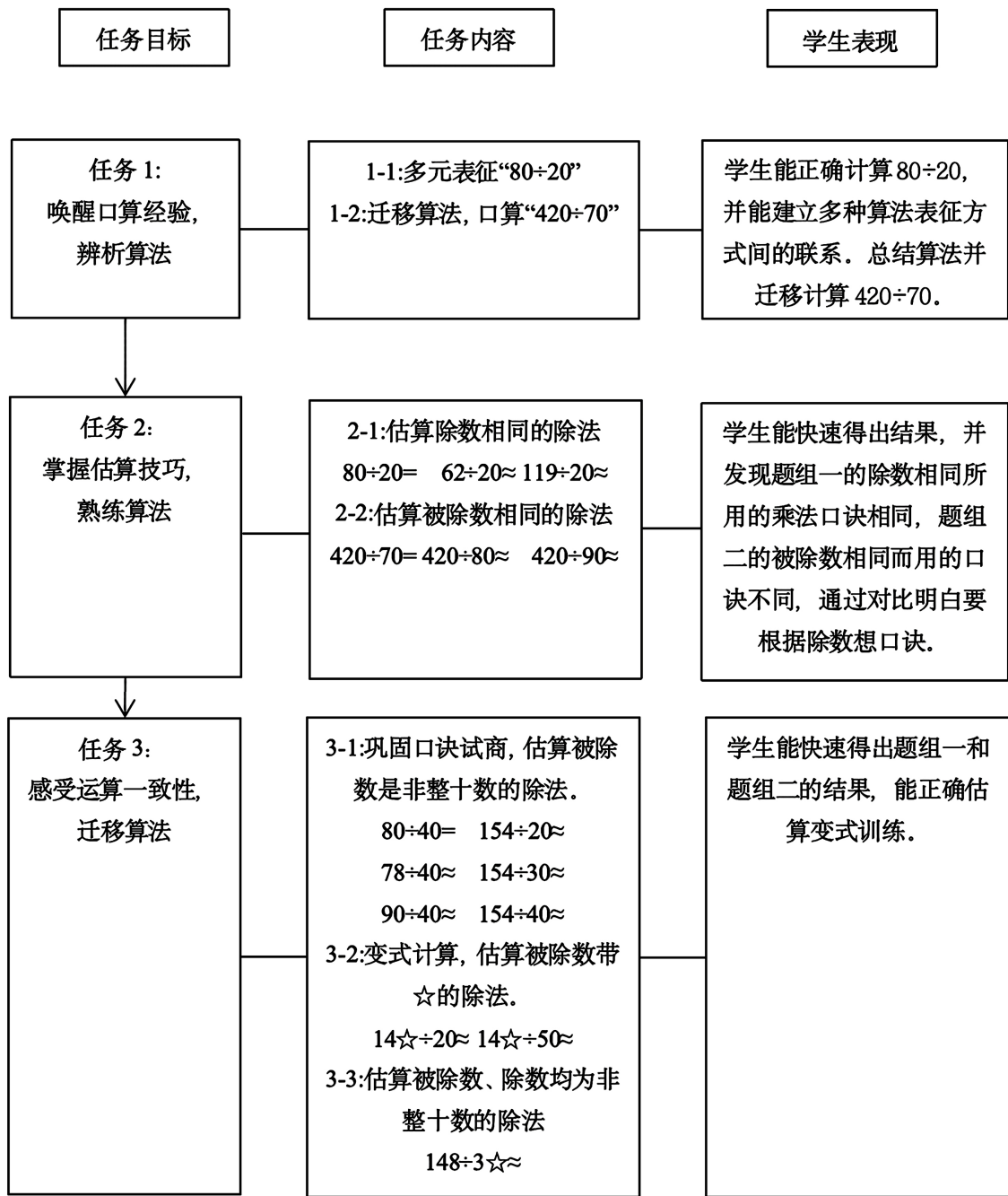


Figure 2. Optimized learning path A2
图 2. 优化的学习路径 A2

任务 1 是核心任务, 包含 3 个子任务:

任务 1-1: 出示前测, 多元表征 $80 \div 20$, 唤醒口算经验

教师通过布置前置作业 $80 \div 20$, 为学生自主探究、深度思考留足时间。学生迁移之前积累的经验, 采用多种表征方式(如包含除、平均分等)计算 $80 \div 20$, 教师收集更多具有代表性的作品如图 3 所示, 集中展示, 要求学生结合作品展开讨论, 并能辨析作品的正误, 结合除法的意义, 更侧重于讲解小棒图所带来的直观理解算法的过程, 学生通过理解多种算法, 掌握口算技能。

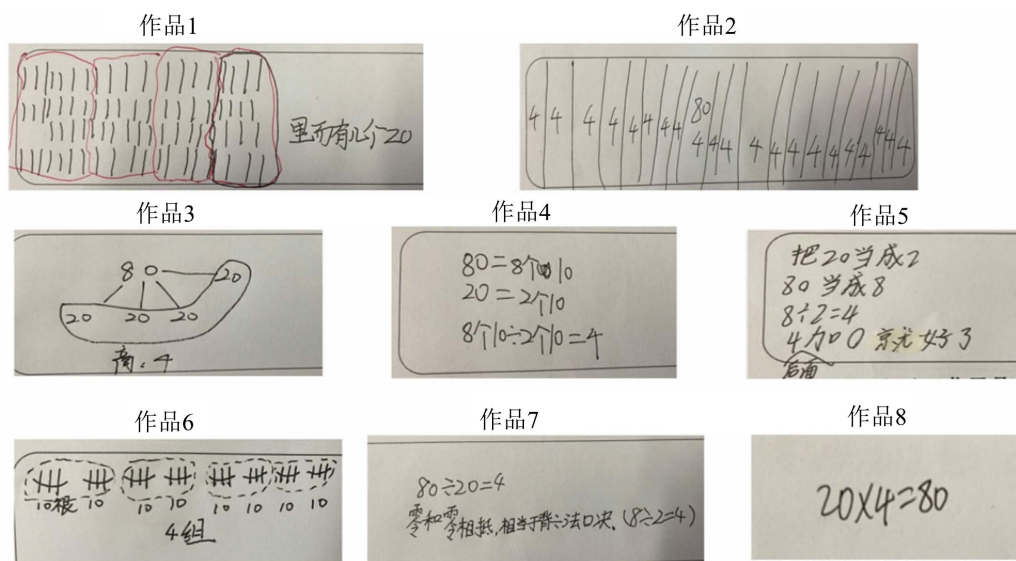


Figure 3. Presentation of students' work

图3. 学生作品展示

以下是教学实录(T是授课教师, S是学生)。其中, 课堂呈现多种表征的目的是帮助学生从包含除的直观表征过渡到抽象、形式表征, 最终掌握平均分的抽象表征。

T: 同学们的办法很丰富, 有画一画的, 也有写一写的。你懂了吗? 请你选一幅来解释一下!

S: 我懂了作品1, 用圈一圈的方法, 把80根小棒按每20根圈为一份, 发现可以分成4份, 所以 $80 \div 20 = 4$ 。

T: 像这样的计算方法在作品集里还有吗?

S: 作品3和作品6, 都是求80里面有几个20。

T: 也就是说都用除法的意义进行包含除。

S: 作品4和作品7都是根据表内除法, 通过口诀口算除法的。因为二四得八, $8 \div 2 = 4$, 所以 $80 \div 20 = 4$ 。

T: 为什么, 你可放心大胆地把 $80 \div 20$ 两个数后面的0去掉? 不怕改变大小吗? 我们看作品5为什么这位同学前面的计算方式跟作品4一样, 但最终结果加了0呢? (板书 $80 \div 20 = 4$ 和 $80 \div 20 = 40$)

T: 你在图中找到 $80 \div 20$ 了吗?

S: 上来指80表示总共有80根小棒, 20表示每20根小棒为1份。

T: 那你们在图中找到 $8 \div 2$ 了吗?

S: 把这80根小棒10根10根一捆捆起来, 就变成了 $8 \div 2$, 8只指8个十, 2是指2个十, 8捆小棒, 每2捆一份, 可以分成4捆。

S: 作品5不正确, 算式中的8代表8个十, 2代表2个十, 相除之后0应该抵消。

T: 大家明白吗? 我们不妨仔细观察作品6, 这位同学就是把小棒按照一捆一捆来分的, 谁能借助更加直观的小棒图来解释为什么 $80 \div 20 = 4$ 而不是 $80 \div 20 = 40$ 呢?

S: 小棒一捆就是十根, $80 \div 20$ 可看成 $8(\text{十}) \div 2(\text{十})$, 当计数单位一样时, 可暂时省略计数单位, 也就变成 $8 \div 2$ 。

T: 把10根小棒捆成一捆, 一捆就是1个十, 80根是8捆, 20根是2捆, $80 \div 20$ 是不是可以看成8捆里面有几个2捆, 也就是 $8 \div 2$ 所以得4, 在这里1捆就相当于计数单位“十”。

S: 作品 8 通过先算乘法, 再算除法, 因为 $20 \times 4 = 80$, 所以 $80 \div 20 = 4$ 。

学生通过观察比较作品计算方法的异同, 经历“包含除”和“等分除”两种平均分的过程, 借助除法的意义, 强化了商是一位数除法的运算技能。教师总结: 不管什么算法都得出了 80 可以分成 4 个 20, 学生基于除数是一位数的除法的计算经验, 倾向于选择“做除想乘, 口诀试商”的算法。

T: 大家刚才展示了好多方法, 这些方法之间有没有相同点呢?

S: 都算出了 80 里包含了 4 个 20。

T: 是啊, 不管是想乘法算除法, 还是根据表内除法, 这两种不同的算法都算出了 80 里包含了 4 个 20。

任务 1-2: 迁移算法, 沟通几百几十除以整十数($420 \div 70$)与整十数除以整十数的除法

布置 $420 \div 70$, 迁移算法, 沟通几百几十除以整十数($420 \div 70$)与整十数除以整十数($80 \div 20$)的除法。

T: 经过大家踊跃的发言和激烈的讨论, 我们已经学会两位数除以两位数的口算除法, 如果将被除数变成三位数, 你们还会口算吗? 请口算 $420 \div 70$ 。

S1: 想乘法, 算除法。

S2: 可以借助表内除法口算。

S3: 把 $420 \div 70$ 看成 42 个十除以 7 个十, 借助表内除法 $42 \div 7$ 来口算。

T: 与 $80 \div 20$ 有什么不同点和相同点?

S1: 从数的特点来看, $80 \div 20$ 是整十数除以整十数, $420 \div 70$ 是几百几十除以整十数。

S2: 方法都是一样的。

T: 我们都是看成几(十)除以几(十), 转化成表内除法, 也就是想乘法口诀。

综上, 通过任务 1 更加细化的 3 个子任务, 学生能够充分感受除数是整十数、商是一位数的口算除法算理, 从除法意义“被除数里包含几个除数”上想得数, 用乘法去想“哪个数乘以除数得到被除数”, 将几十除以几十看成几(十)除以几(十), 转化成表内除法, 也就是想乘法口诀)最终统整算法为“做除想乘, 口诀试商”。借助小棒图这一直观工具以实现从算理直观化过渡到算法抽象化, 引导学生将一个数除整十数的除法或一个数除几百几十的数的除法转化为表内除法, 在交流中掌握口算方法, 并且培养迁移类推能力, 同时引导学生通过计算与观察找规律, 掌握简便的口算方法。

任务 2: 除数是整十数的除法估算

通过任务 1 的学习, 学生对几十几百数除以整十数除法的算理和算法有了更深的理解。在此基础上, 学生借助已掌握的除法算理和算法, 估算商是一位数的除法, 计算时将算式中不是整十数的数估算成整十数, 并根据除数而不是被除数进行口诀试商, 寻找估算技巧。

任务 2-1: 被除数不同、除数相同, 且是除数整十数的除法估算

$62 \div 20 \approx 119 \div 20 \approx$

T: 第一列有什么共同点?

S: 除数都是 20。

T: 我们在做的时候都想几的口诀? 有共同点吗?

任务 2-2: 除数不同、被除数相同, 且除数是整十数除法估算

$420 \div 80 \approx 420 \div 90 \approx$

T: 第二列又有什么共同点?

S: 被除数都是 420。

T: 为什么被除数都是一样的, 你们一会要估成 400, 一会要估成 450?

S: 因为除数不一样, 80 要用 8 的口诀, 90 要用 9 的乘法口诀。

T: 我们都是根据除数想口诀!

教师设计除数不同、被除数相同,且除数是整十数的除法,要求学生独立估算,再次引导学生比较估算过程用到的口诀,总结出做除法要根据除数想口诀,并且想的是关于除数的乘法口诀。学生通过任务 2-1 和 2-2 加深了做出想乘是要“根据除数想乘法口诀”的印象,能够快速进行口诀试商,形成口算技能。

任务 3 包含 3 个子任务:

任务 3-1: 被除数是非整十数的除法估算

教师借助摘星闯关游戏,首先是一星关卡,学生做完后核对答案,并说明用了哪一句口诀。在二星关卡时要求学生说出把被除数估成了什么数,用了哪一句口诀。通过二星习题的设计让学生明白:当被除数一样时,仍需要根据除数来想口诀。

$$80 \div 40 = 154 \div 70 \approx$$

$$78 \div 40 \approx 154 \div 30 \approx$$

$$90 \div 40 \approx 154 \div 40 \approx$$

任务 3-2: 被除数或除数带星的除法估算

$$14\star \div 20 \approx$$

$$14\star \div 50 \approx$$

T: 像我们刚才快速列的算式都用到了哪句口诀?

S: 二七十四。

T: 跟被除数没有多大关系,我们还是要根据除数来想口诀!

任务 3-3: 被除数是非整十数且除数带星的除法估算

$$148 \div 3\star \approx$$

T: $\star$ 可能是多少呢?

S: 0~9 的数。

T: $\star$ 填 0, 结果是多少?

S: 只用把 148 估成 150, 想三五十五的口诀, 结果是 5。

T: $\star$ 填 1, 结果又是多少?

S: 把除数 31 估成 30, 被除数 148 估成 150, 还是想三五十五的口诀, 结果是 5。

T: 那 $\star$ 填 9, 结果还是 5 吗?

S: 把除数 39 估成 40, 被除数 148 估成 160, 想四四十六的口诀, 结果应该是 4。

T: $\star$ 填 8, 怎么算?

S: 也把除数 38 估成 40, 被除数 148 估成 160, 想四四十六的口诀, 结果也是 4。

综上, 任务 3 通过题组练习, 学生能熟练掌握通过除数想乘法口诀进行除法计算, 并在“ $14\star \div 20 \approx$ ”教学中采取穷举法, 让学生再次感受除数和被除数的作用, 并新增“ $148 \div 3\star \approx$ ”, 除数是非整十数, 也为下一环节即“除数是非整十数的笔算除法”过渡。

3.2. 存在的问题与建议

3.2.1. 算法关联弱, 直观表征重视程度低

从学生课前作业单的作答情况来看, 很少有学生能够对算理进行直观表征, 教师在课堂讲解时也并未充分重视直观表征算理的方式(如小棒图)。在辨析 $80 \div 20 = 4$ 与 $80 \div 20 = 40$ 时, 学生虽然能判断结果正误, 却无法用数学的语言说清楚错误的原因。

建议：在辨析学生的作品 4 ($80 \div 20 = 8 \div 2 = 4$)和作品 5 (补零： $8 \div 2 = 4$ ， $80 \div 20 = 40$)时，介入小棒图的表征方式。把两个算式($80 \div 20 = 4$ ， $80 \div 20 = 40$)写在黑板上，并将小棒图放大。提问学生：在这幅图中你找到了 $80 \div 20$ 吗？找到了 $8 \div 2 = 4$ 吗？让学生来指一指。让学生感受 $80 \div 20 = 4$ 是以根(一)为单位， $8 \div 2 = 4$ 是以捆(十)为单位，不是单纯地盖 0，8 是指 8 个十，2 是指 2 个十，4 是指 4 组，进而得到补零是错误的，理解算理。

3.2.2. 穷举法使用不当，弱化口算技巧

教学过程中频繁使用穷举法会限制学生的计算思维发散，任务序列的设计是循序渐进的，学生经历穷举计算题的答案的过程便可逐步掌握口算技巧，实活运用所学的知识实现举一反三。教师罗列从 $140 \div 20$ 到 $149 \div 20$ 的算式的教学过程中，学生一直处于机械性附和答案的状态，事实上学生已经掌握了口算技巧，此举乃无用功。

建议：学生掌握了要根据除数想口诀的方法后就不需要穷举 $14\star \div 20$ 。同时，路径设计应将穷举法用于其他算式，例如在教学时发现学生认为除数带星号的算式较有挑战性，计算过程较为繁琐，在计算 $148 \div 3\star$ 时使用穷举法是锦上添花。

3.3. 教学效果

如前文所述，本研究首先在甲班开展了初构的学习路径 A1 的教学，结合专家建议与甲班后测情况后，继而在乙班开展了优化的学习路径 A2 的教学。以下将通过对甲、乙班的后测进行定量分析，验证学习路径得到了优化。甲、乙班得分情况见表 1。

Table 1. Comparison of post-test scores between Class A and Class B

表 1. 甲、乙班后测得分率比较

得分率	第 1 题	第 2 题	第 3 题	总得分率
甲班	93.50%	87.86%	45.42%	70.55%
乙班	96.02%	93.42%	55.23%	85.33%

从两个班的得分率上看，乙班相对于甲班，在各后测题上的表现都有进步，其中后测题 4 的进步较大，后测题 2 和后测题 3 的进步较小。对甲、乙班学生的后测各题得分进行独立样本 t 检验，结果表明：第 1 题得分($t = -0.460$ ， $P = 0.652$)、第 2 题得分($t = -0.780$ ， $P = 0.352$)不存在显著性差异；第 3 题得分($t = -3.428$ ， $P < 0.05$)存在显著性差异；以下结合后测题目对学生除数是两位数的口算除法算法掌握情况做具体分析。

3.3.1. 口算算法掌握情况

后测题 1 通过对 $300 \div 50$ 、 $540 \div 60$ 等整十数除几百几十数除法算理的填空考察，唤醒学生除数是一位数除法的经验，以验证乙班是否更好地理解除数是整十数的口算算法，将学生划分为 2 个水平层次，其中，水平 0：结果错误；水平 1：口诀试商结果正确。分析习题作答得分情况，甲、乙班水平层次对应人数如表 2。

Table 2. Number of people at level 1 after Class A and B are completed

表 2. 甲、乙班完成后测题 1 的水平层次人数

表现	甲班	乙班
水平 0	3	1
水平 1	26	28

3.3.2. 估算技巧掌握情况

后测题 2 通过设计估一估 $205 \div 40 \approx$ 、 $209 \div 30 \approx$ 、 $450 \div 53 \approx$ 、 $173 \div 19 \approx$ 等习题，并要求学生能将被除数和除数都估成最合适的整十整百数，以验证乙班是否更好地掌握了当被除数、除数不是整十数的估算技巧，每题回答正确得 1 分，合计共 4 分。分析习题作答得分情况如表 3：

Table 3. The number of different scorers in question 2 after the completion of classes A and B
表 3. 甲、乙班完成后测题 2 的不同得分人数

得分数	甲班	乙班
1	2	0
2	0	0
3	9	7
4	18	22

两班绝大部分学生都能正确估一估 $205 \div 40 \approx$ 、 $450 \div 53 \approx$ 、 $209 \div 30 \approx$ ，错误集中在估算 $173 \div 19$ 的任务中。甲班仍有不少学生对 173 应估成什么数最合适无法把控，如表 3，少部分的学生能将被除数看作是几个计数单位的构成；而乙班大多数学生能正确地将 173 估成最接近的数并能计算正确，如表 3。可见甲班仍有不少学生对于估算的步骤不明晰，即首先应将除数估成整十数，进而能够根据除数想乘法口诀(二八十六、二九十八)，由此甄别正确的估算是将 173 估成 180，结果更接近正确答案。

4. 结论与建议

4.1. 结论

总体而言，本文通过教学实验探寻得到了“除数是两位数口算除法”的学习路径(如图 2)。具体而言，得到以下结论：

将“做除想乘，口诀找商”的算法贯穿口算除法教学始终。学生在凭借经验就能求得正确结果的基础上，通过建立不同算法间的关联以简化计算的道理，从根本上避免了“用直觉代替思考”和“只会想乘算除”的片面做法。通过小棒图的直观演示，有效帮助学生摆脱了对“视觉表象”的依赖，深入理解了“同一级别计数单位的两个数相除(0 除外)，可以忽略计数单位直接用单位的‘个数’相除”这一本质。同时，在估算教学中，在探究尝试中对估算方法进行归纳，注重对估算结果的评估与反思，为后续笔算除法试商过程中的“调商”奠定基础，为学生在后续学习中的“试商”和“估算策略选择”奠定了坚实的基础。

4.2. 建议：强化口算技能，唤醒估算经验

教师在教学时，要精心设计活动任务，层层递进、步步深入地引导学生经历除数是两位数的除法的不同表征方式间的联系，建立不同算法间的关联，引导学生将一个数除整十数的除法或一个数除几百几十的数的除法转化为表内除法，根据除数想乘法口诀。尤其是要重视引导学生不断熟练口算技巧，从而掌握根据除数进行口诀估商的技巧。其中，除数是两位数的除法的运算本质是单位细分，口算除法这节课凭借小棒平均分的方法简单渗透了单位细分的思想，那么在后续学习笔算除法时，能对运算的一致性有更深入的认识。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 18.

- [2] 巩子坤, 史宁中, 张丹. 义务教育数学课程标准修订的新视角: 数的概念与运算的一致性[J]. 课程·教材·教法, 2022, 42(6): 45-51+56.
- [3] Simon, M.A., Kara, M., Placa, N. and Avitzur, A. (2018) Towards an Integrated Theory of Mathematics Conceptual Learning and Instructional Design: The Learning through Activity Theoretical Framework. *Journal of Mathematical Behavior*, 52, 95-112. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.04.002>