

问题驱动式教学法，培养数学核心素养

——以“三角函数的诱导公式”为例

杨祉妍

吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首

收稿日期：2024年8月5日；录用日期：2024年9月7日；发布日期：2024年9月18日

摘 要

学科核心素养既是课程标准的集中体现，也是实现课程目标的基础。在高中阶段的数学教学课堂上，学生自主探究的能力被忽视，影响着学生对数学知识的掌握、思维的发展和数学核心素养的培养。文章以“三角函数的诱导公式”为例，采用问题驱动式教学法，通过问题链引领学生经历三角函数诱导公式的推导过程，培养学生逻辑推理、数学抽象、直观想象的数学核心素养。

关键词

问题驱动，数学教学，数学核心素养

Problem-Driven Teaching Method to Cultivate Core Literacy in Mathematics

—Taking “Induction Formulas for Trigonometric Functions” as an Example

Zhiyan Yang

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Aug. 5th, 2024; accepted: Sep. 7th, 2024; published: Sep. 18th, 2024

Abstract

The core literacy of the discipline is not only the concentrated embodiment of the curriculum standards, but also the basis for achieving the curriculum goals. In the high school mathematics classroom, students' ability to explore independently is neglected, which affects students' mastery of mathematical knowledge, the development of thinking and the cultivation of mathematical core

literacy. Taking the “induction formula of trigonometric functions” as an example, this paper adopts the problem-driven teaching method to lead students through the derivation process of trigonometric function induction formula through the problem chain, and cultivates students’ mathematical core literacy of logical reasoning, mathematical abstraction, and intuitive imagination.

Keywords

Problem-Driven, Math Teaching, Math Core Literacy

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学课程是培养数学核心素养的重要途径，通过数学教学活动，帮助学生逐步发展和完善数学核心素养，核心素养不仅涵盖了数学的基本知识和技能，还包括数学思维、问题解决能力以及数学在现实生活中的应用能力。

问题驱动式教学法又称 PBL 教学模式。它是一种以问题为主线来规划课程内容，以领域内的初步问题为探究起点，以学生为主体，以教师为主导，让学生围绕问题获取真知的一种学习方法[1]。问题驱动式教学法不仅激发学生的好奇心和求知欲，而且还能促进学生主动思考、解决问题。

2. 高中数学教学应用“问题驱动式”教学法的基本原则

问题驱动式教学法的教学原则有：问题驱动原则、密切联系现实原则、知识生成原则[2]。

2.1. 问题驱动原则

问题驱动式教学法强调以问题为核心，通过提出具体、有针对性的问题，激发学生的学习兴趣 and 积极性。问题链的设计要紧密联系实际，根据教学内容，将现实问题进行简化或者拆分，使学生的学习具有针对性和目的性。

2.2. 密切联系现实原则

密切联系现实原则是问题驱动式教学中非常重要的一环，它确保教学活动不仅仅停留在理论层面，而且能够通过实际情境和问题情境来增强学生的学习体验和应用能力。这里的“现实”包括数学现实和学生现实，数学现实是指用数学概念、数学方法认识客观事物。学生现实是指学生的基础和实际生活经验。因此，密切联系现实原则使学习具有意义，更符合学生未来在现实生活中所需的能力和技能。

2.3. 知识生成原则

知识生成原则是指学生在已有经验的基础上，通过新旧知识的交互作用，不断完善知识结构的过程。简单来说，学生通过自己的思考、探索和实践，将新知识与原有知识经验相结合，从而生成新的理解和认知。

因此，问题驱动式教学法的基本步骤：教师构建数学问题情境或生活实际情境，提出数学问题；学生在教师的引导下，构建数学模型，分析问题；最后，解决问题。

3. 以核心素养为导向，“问题驱动式”教学法的运用策略

2022 年《普通高中数学课程标准》注重学生数学学科核心素养的形成和发展[3]。而问题引领着数学思考，指引着思维方向，好的问题是诱发思维的载体。因此，问题驱动式教学法在促进学生发展、适应新高考、实施核心素养、实现立德树人和培养人才的总体目标方面发挥着积极作用。

基于此，以“三角函数的诱导公式”为例，在引入新知，提出问题、启发诱导，分析问题等教学环节中。设置环环相扣的“问题链”，让学生自主探究“圆的对称性 - 角与角的关系 - 坐标间的关系 - 三角函数值关系”的过程，经历“三角函数诱导公式”的推导过程，深入理解诱导公式。

因此，本堂课采用问题驱动式教学法，从形的角度出发进行探究，将形的关系转化成数的关系，注重培养学生直观想象、数学运算、逻辑推理的数学核心素养。

3.1. 明确的教学目标

本节课是以“问题”为导航，依据单位圆的对称性，引导学生仔细观察单位圆上各点在原点、坐标轴、直线 $y = x$ 对称时，揭示这些对称点所代表终边与角 α 终边之间的关系。借助三角函数的定义，将这种直观的对称关系转化为严谨的数学表达式——诱导公式，实现“数”与“形”的和谐统一，构建紧凑而完整的认知体系。不仅简化诱导公式的推导过程，缩短学生对诱导公式的认知与理解周期，还极大地促进了学生对公式的记忆，有效减轻记忆负担。本堂课注重让学生自主发现“圆的对称性 - 角与角的关系 - 坐标间的关系 - 三角函数值的关系”，从而推导出诱导公式。而采用问题驱动式教学法让学生积极参与到课堂中，通过有效的“问题链”，学生深入探索数学的内在本质，不断拓展思维的广度与深度，致力于培养数学抽象、直观想象、逻辑推理等核心素养。使学生在学的过程中，逐步从被动接受转化为主动探索，真正成为课堂的引领者与主宰者，从而实现教学目标。“三角函数的诱导公式”教学目标设计见图 1。

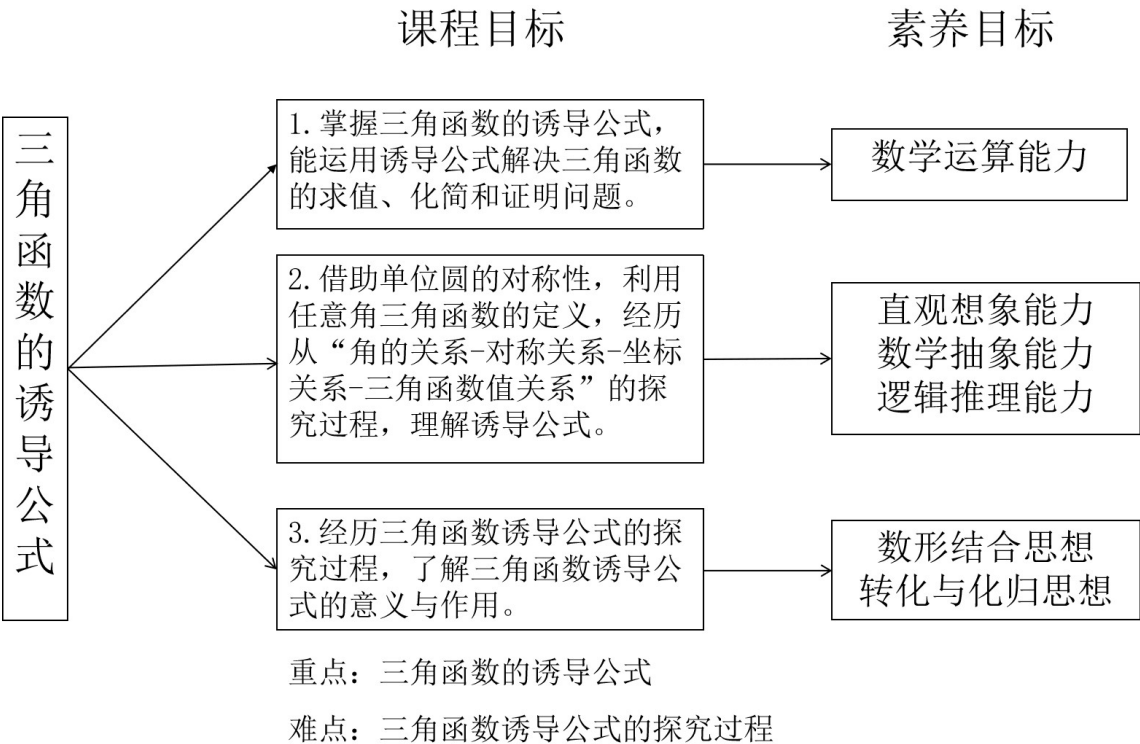


Figure 1. Based on the design of the teaching objectives of the core literacy “induction formula”
图 1. 基于核心素养“诱导公式”教学目标设计

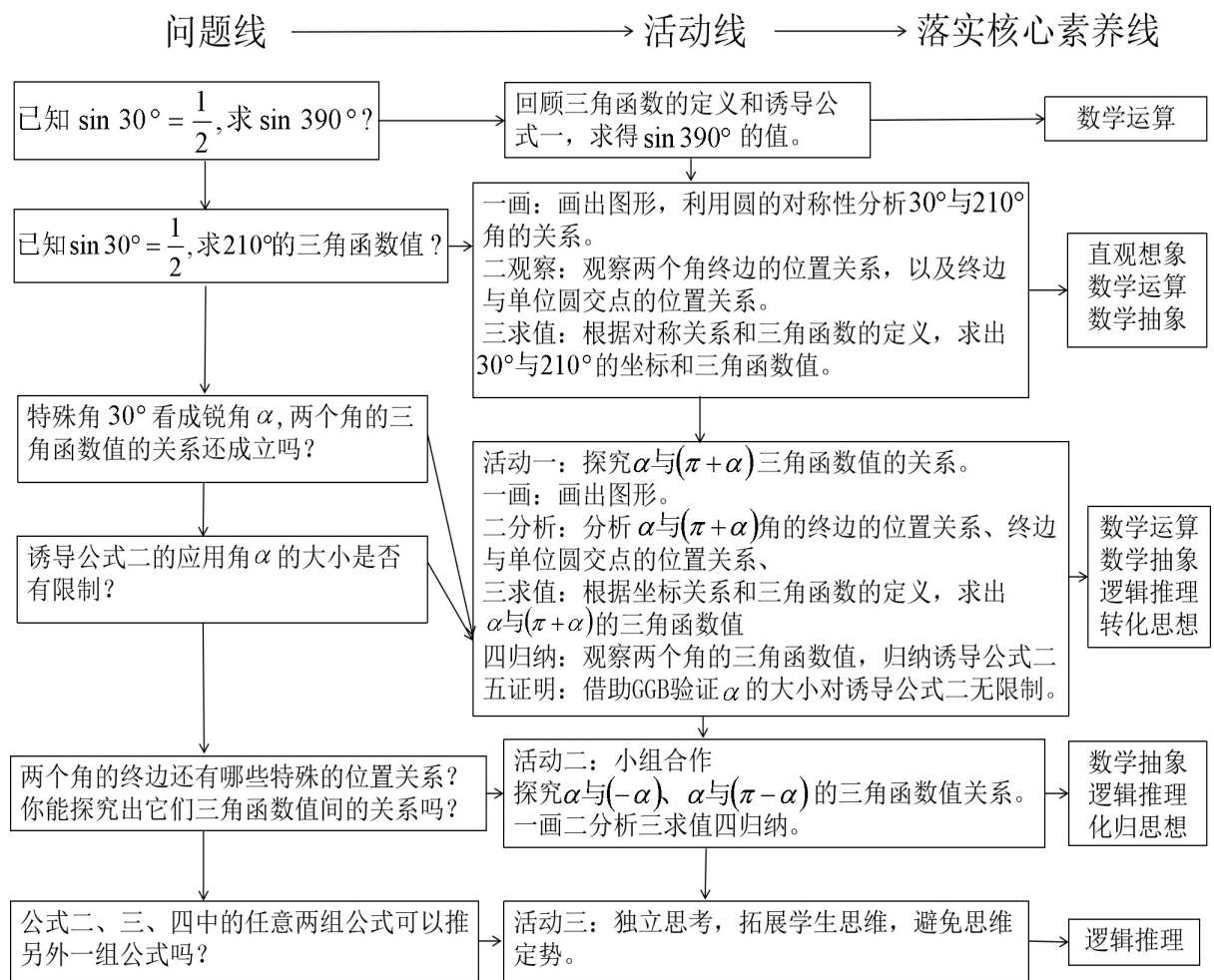


Figure 2. Based on the core literacy “induction formula of trigonometric functions” problem line and activity line
图 2. 基于核心素养 “三角函数的诱导公式” 问题线、活动线

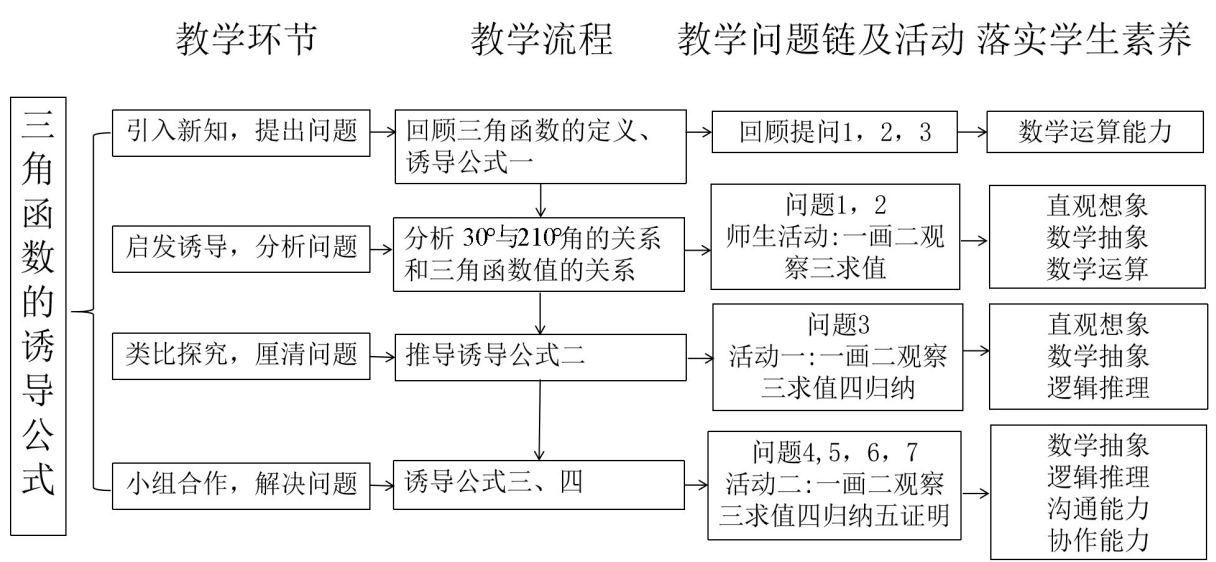


Figure 3. Schematic diagram of the teaching process based on the core literacy “induction formula of trigonometric functions”
图 3. 基于核心素养 “三角函数的诱导公式” 教学流程示意图

3.2. 完整的问题链

问题链的设计是教学设计中至关重要的一个环节，它有助于引导学生从已知到未知，从复杂到简单，逐步深入探索和理解知识。

因此，问题链的设计应该具有阶梯性：即问题之间应有一定的难度阶梯，便于学生逐步深入思考和解答；问题链的设计具有策略性：问题链的设计能激活学生的已有经验，展示知识技能，并引导学生将知识迁移到新的探究活动中；最后，问题链的设计要具有开放性：开放性问题的设置和讨论，鼓励学生从不同角度思考问题，激发学生的创新思维和批判性思维。“三角函数的诱导公式”问题链设计，见图2。

3.3. 可操作的“问题驱动式”教学法

教学法是实现教学目标和完成教学任务的综合策略体系，不仅包括了多样化的教学途径与高效能的方法手段，还蕴含一套稳定而有序的教学活动框架和程序流程。在“问题驱动式”教学法的理论指导下，“三角函数的诱导公式”教学流程设计见图3。

4. 基于核心素养“问题驱动式”教学法的实践过程

4.1. 引入新知，提出问题

回顾1：回顾三角函数的定义，高中学习的三角函数与初中学习的三角函数相比较，有何区别？

回顾2：回顾诱导公式一，成立的原因和作用？

追问1：已知 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，如何求 $\sin 390^\circ$ 的值？

回顾三角函数的定义和诱导公式一的实质和作用，将之前学习过的知识和本堂课的知识建立联系，促进学生思维的连贯性发展，便于学生将知识点汇聚成知识面，帮助学生逐步建构起完整而坚固的知识结构体系。适时回顾既有知识，加深学生对新授内容的理解，提升课堂教学的整体效率与效果。

4.2. 启发诱导，分析问题

问题1：已知 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，求 $\sin 210^\circ$ ， $\cos 210^\circ$ ， $\tan 210^\circ$ 的值？

师生活动：一画二观察三求值。

1) 画

借助直角坐标系和单位圆，画出 30° 与 210° 。

追问1：能否用 $180^\circ + \alpha$ 的形式表示 30° 与 210° 的数量关系？

2) 观察

追问2： 30° 与 210° 角的终边的位置关系？

追问3： 30° 与 210° 角的终边与单位圆交点的位置关系？

3) 求值

假设 30° 与 210° 角与单位圆的交点记为 P 、 P_0 。

追问4：由已知条件 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ， P_0 的坐标可以表示？

追问5：根据三角函数的定义，求 210° 的三角函数值？

问题2：猜测 30° 与 210° 之间的三角函数值的关系？

学生只学习了 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围的三角函数值， 210° 的三角函数值无法直接得出答案。本节课的主要任务

是如何将任意角转化到 $0^\circ \sim 90^\circ$ 的角。因此，以“一画二观察三求值”为活动载体，通过“问题链”的层层引导，求得 210° 的三角函数值，并猜测 30° 与 210° 三角函数值的关系。此教学环节融合了直观想象的启迪、数学抽象的提炼以及数学运算的实践，为学生核心素养的全面发展铺设了坚实的基础。

4.3. 类比探究，厘清问题

问题3：把特殊角 30° 与 210° 转化成 α 与 $\pi+\alpha$ ，两个角的三角函数值的关系是否成立？

活动一：探究 α 与 $\pi+\alpha$ 的三角函数值关系。

1) 画

根据演示画出图形。见图4。

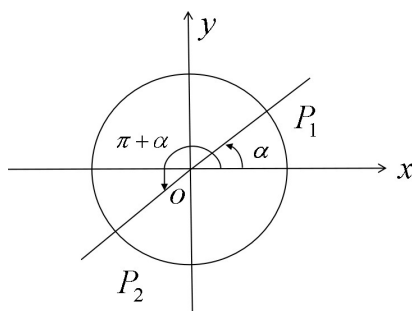


Figure 4. Intuitive diagram of α , $(\pi+\alpha)$

图4. α 、 $(\pi+\alpha)$ 直观图

2) 分析

追问1： α 与 $(\pi+\alpha)$ 角的终边的位置关系？

追问2： P_1 、 P_2 是 α 与 $(\pi+\alpha)$ 角的终边与单位圆的交点，则 P_1 、 P_2 的位置关系？

追问3：假设 $P_1(x, y)$ ， P_2 的坐标如何表示？

3) 求值

追问4：求 $\sin \alpha$ 与 $\sin(\pi+\alpha)$ 、 $\cos \alpha$ 与 $\cos(\pi+\alpha)$ 以及 $\tan \alpha$ 与 $\tan(\pi+\alpha)$ 的值？

4) 归纳

追问5：整理 α 与 $\pi+\alpha$ 的三角函数值，能否用三个数学等式表示两个角的三角函数值的关系？

教师通过提问，引出学生思考和研究的方向，引领学生探索特殊角三角函数值关系向一般性求值规律的转化之旅。此探索过程不仅是知识的迁移，更是转化思想的深刻培育。精心构建的“问题链”，如同指引方向的灯塔，引导学生将“角的关系”巧妙转化为“三角函数值的关系”，促使他们在图形的绘制与观察中，直观感受角的终边对称性，领悟点的坐标与三角函数值之间的联系。学生经历了诱导公式推导的每个环节，在潜移默化中滋养了他们的直观想象能力，逻辑推理能力以及数学抽象能力。这些宝贵的数学核心素养，为未来的学习之路铺设了坚实的基石。

4.4. 小组合作，解决问题

问题4：角的终边还有哪些特殊的位置关系？

问题5：你能探究出它们三角函数值间的关系吗？

活动二：探究 α 与 $(-\alpha)$ 、 α 与 $(\pi-\alpha)$ 的三角函数值关系。

1) 画

根据演示画出图形，见图5。

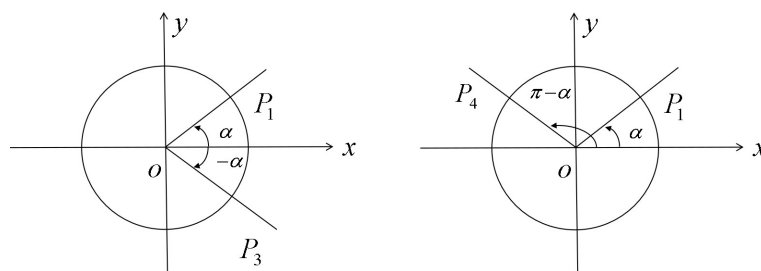


Figure 5. Intuitive diagram of α , $(-\alpha)$, $(\pi-\alpha)$

图 5. α 、 $(-\alpha)$ 、 $(\pi-\alpha)$ 直观图

2) 分析

追问 1: α 与 $(-\alpha)$ 、 α 与 $(\pi-\alpha)$ 角的终边的位置关系?

追问 2: P_1 、 P_3 、 P_4 分别是 α 、 $(-\alpha)$ 、 $(\pi-\alpha)$ 角的终边与单位圆的交点, 则 P_1 与 P_3 , P_1 与 P_4 的位置关系?

追问 3: 假设 $P_1(x, y)$, 根据对称关系, P_3 与 P_4 的坐标如何表示?

3) 求值

追问 4: 求 $\sin \alpha$ 与 $\sin(-\alpha)$ 、 $\cos \alpha$ 与 $\cos(-\alpha)$ 以及 $\tan \alpha$ 与 $\tan(-\alpha)$ 的值?

追问 5: 求 $\sin \alpha$ 与 $\sin(\pi-\alpha)$ 、 $\cos \alpha$ 与 $\cos(\pi-\alpha)$ 以及 $\tan \alpha$ 与 $\tan(\pi-\alpha)$ 的值?

4) 归纳

追问 6: 分别观察 α 与 $(-\alpha)$ 、 α 与 $(\pi-\alpha)$ 的三角函数值, 能否用三个数学等式表示两对角的三角函数值关系?

5) 证明

追问 7: 应用角 α 的大小对诱导公式是否有限制?

师生活动: 借助 GGB 验证, 不论 α 在第几象限, 诱导公式都成立。

学生类比诱导公式二的推导过程, 以及教师精心构建的“问题链”, 深入探究并推导出诱导公式三与四。基于先前学习的扎实基础, 学生对诱导公式的探究路径有了初步而清晰的认识。因此, 组织学生以小组合作的学习模式, 目的是让学生在合作学习的过程中, 不仅掌握解决问题的方法, 更能在实践中锤炼思维能力, 培养逻辑推理的严谨性、直观想象的敏锐度以及数学抽象的深刻理解度。

问题 6: 回顾三组诱导公式的推导过程, 能否总结三角函数诱导公式的探究路径或方法?

通过提问, 引导学生梳理并总结诱导公式的探究方法, 更深刻体验“角的关系(形) - 对称关系 - 坐标关系 - 三角函数值的关系(数)”这一知识点的完整逻辑链条。此探究过程不仅有利于强化核心素养——直观想象、数学抽象、逻辑推理的根基。而且还能滋养学生的思维能力, 养成及时反思的习惯。同时, 小组合作学习简化教学, 深化理解, 同时增强沟通协作能力, 实现知识与技能的双重提升。

问题 7: 公式二、三、四中的任意两组公式能否推出另外一组公式吗?

活动三: 独立思考, 其他方法推导诱导公式。

借助巧妙的提问策略, 拓展学生思维, 避免思维定势, 引导学生从多元视角审视问题。此问题不仅促进学生对诱导公式的深刻洞察, 更有助于他们在实际应用中灵活变通, 精准把握。有效地推动核心素养——逻辑推理的扎实落地, 为学生的全面发展奠定坚实的基础。

5. 总结

问题驱动式教学法将学生置于解决问题的环境中, 强调学生在解决问题的过程中掌握基础知识和基

本技能，并非简单地接受信息。问题驱动式教学法有利于培养学生的批判性思维，帮助学生更好地应对生活的挑战。而问题是思维活动的源泉，问题的质量直接影响到思维的深度和广度，关系到学生的学习的效果[4]。因此，教师在使用问题驱动教学法的过程中，要明确教学目标，设计完整的问题链和流畅的教学程序，组织系统而有序的教学活动。从而，培养学生核心素养，提高学生的思维能力。

参考文献

- [1] 由骞. 基于数学学科核心素养导向的问题驱动式教学设计研究[J]. 理科考试研究(数学版), 2023(2): 10-14.
- [2] 王海青, 曹广福. 问题驱动数学教学的基本原则与思想及其实施步骤[J]. 数学教育学报, 2022, 31(1): 24-27.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 北京: 人民教育出版社, 2022.
- [4] 李晓晶. 以问题为驱动, 促进深度学习, 培养核心素养——以“指数函数”的教学为例[J]. 数学教学通讯, 2021(36): 28-29.