

# “比较大小”高考试题基础性考查分析与教学

尹堂慧, 董玉成

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2024年11月28日; 录用日期: 2024年12月26日; 发布日期: 2025年1月2日

## 摘要

“量的大小比较”广泛见于科学研究及现实需要,也是高考中常见的的基本考查内容,在一些试题分析中常见利用泰勒公式或者麦克劳林公式等高等数学知识解决比较大小的问题,这一导向一方面不符合双减政策要求,更重要的是没有把握新高考中重视“基础性考查”的要求。本文首先通过三个“比较大小”的高考试题分析了其中蕴含的基础性考查,在此基础上就相应的教学模式进行了简单讨论。比较大小试题考查的本质是函数的单调性,高中教学中首先要抓住“函数”这一基础性视角,把基础知识、基本技能、基本的思想方法,以及基本态度价值观融为一体,整体性培养学生,而不是单纯考虑“一题多解”,更不能让一些新、奇、特,或者是所谓的高端方法喧宾夺主。

## 关键词

基础性考查, 比较大小, 高考题, 融通教育

# Analysis and Teaching of Basic Examination of “Comparison of Size” College Entrance Examination Questions

Tanghai Yin, Yucheng Dong

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Nov. 28<sup>th</sup>, 2024; accepted: Dec. 26<sup>th</sup>, 2024; published: Jan. 2<sup>nd</sup>, 2025

## Abstract

“Comparison of size” is widely seen in scientific research and practical needs, and is also a common basic examination content in the college entrance examination. In some test analysis, it is common to use advanced mathematical knowledge such as Taylor’s formula or McLaughlin’s formula to solve the problem of comparison of size. This orientation does not meet the requirements of the double

reduction policy on the one hand, and more importantly, it does not grasp the requirements of the new college entrance examination to attach importance to “basic examination”. This paper first analyzes the basic examination contained in three “comparison of size” college entrance examination questions, and on this basis, a brief discussion is made on the corresponding teaching model. The essence of the comparison of size questions is the monotonicity of the function. In high school teaching, we must first grasp the basic perspective of “function”, integrate basic knowledge, basic skills, basic thinking methods, and basic attitudes and values, and cultivate students holistically, rather than simply considering “multiple solutions to one problem”, and let some new, strange, special, or so-called high-end methods take the lead.

## Keywords

Basic Examination, Comparison of Size, College Entrance Examination Questions, Integrated Education

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

高考是我国教育的“牛鼻子”，尤其对基础教育具有“指挥棒”的作用。但在很多高考试题分析与具体教学中老师们往往容易受高考试题的“表象”影响，并不理会试题考查的基础性，从而导致为解题而解题，最终导向“刷题”顽疾。

在新高考推进过程中，进行题海战术、机械刷题、超前教学等问题得到进一步暴露。例如：为强化高考的选拔功能，数学科于 2022 年开发了函数值比较大小的题型，本意是要求学生构造新的函数，研究函数的单调性，主要考查学生的创新性思维，但一些学校在教学中教授各种函数的泰勒展开式，希望达到快速解题的目的，这在一定程度上造成了超前学的不良导向[1]。

高考数学通过创新试卷结构设计和题目风格、深化基础性考查，强调对学科基础知识、基本方法的深刻理解，不考死记硬背、不出偏题怪题，力图有效遏制猜题押题、题海战术的蔓延，引导中学把教学重点从总结解题技巧转向培养学生核心素养，提高课堂效果和作业效率[2]。

本文通过对几道高考典型的比较大小的试题的分析，探讨了其中考查的重点与难点，结合新高考的考试评价要求分析每个题中所蕴含的基本知识、方法、能力、价值观。最后，就基于基础性考查下的融通教学进行了简单讨论。

## 2. 典型高考试题分析与解析

例 2.1 (2022 年全国甲卷文科第 12 题) 已知  $9^m = 10$ ,  $a = 10^m - 11$ ,  $b = 8^m - 9$ , 则( )

- A.  $a > 0 > b$       B.  $a > b > 0$       C.  $b > a > 0$       D.  $b > 0 > a$

这类“比较大小”问题的解法，从技术上常见的方法有作差法、作商法、换底公式变形、放缩法、构造函数法等等。

正如教育部教育考试院等研究者有关高考试题分析文章所指出，“比较大小”的考查重点在于借助重要不等式与函数单调性等性质判断不等关系，主要考查学生对于函数性质的理解与掌握[3]。

下面从高考评价体系四翼之首，基础性的角度进行探讨，揭示“比较大小”类题目考查的本质与核心。

### 1) 分析与解析:

按文献[4], 高考评价体系“四翼”中的基础性包括基础知识、基本方法、基本能力、基本态度与价值观。

具体而言。

**基础知识**既包括基础性的自然知识、也包括基础性的社会知识和人文知识: 既包括一些基本概念的学习, 也包括一些基本原理、公式、事实以及事件的掌握与理解[4]。

那么从基础知识的角度来看, 本题考查基本初等函数及复合、基本不等式、导数知识。

**基本方法**是学科知识在更高层次上的抽象和概括。高考数学强调对解决一类问题的基本规则、模式和途径的考查, 即通性通法[4]。

从基本方法的角度来看, 本题需要利用函数方法进行解答。即题中所给式子可以化成,  $b = 8^m - 9$ ,  $0 = 9^m - 10$ ,  $a = 10^m - 11$ , 于是可以发现规律,  $b$ 、 $0$ 、 $a$  均满足函数  $f(x) = x^m - (x+1)$ , 当  $x$  取 8、9、10 时就可以得到  $b$ 、 $0$ 、 $a$ 。

具体解析过程如下:

通过对已知条件进行整体考查, 可以发现题干中含有幂函数  $h(x) = x^m$  这一基本结构, 再看已知中三个等式, 发现它们可以转化为一致性结构, 即  $8^m - 9 = b$ ,  $9^m - 10 = 0$ ,  $10^m - 11 = a$ 。至此, 我们不难看出, 题干三个等式是函数  $f(x) = x^m - (x+1)$  其中  $m = \log_9 10$  当  $x$  取 8、9、10 时的函数值, 大小关系可利用函数的单调性来判断。求导可得  $f'(x) = mx^{m-1} - 1$ , 令  $f'(x) = 0$ , 有  $x = m^{\frac{1}{1-m}}$ , 由于  $9^m = 10$ , 即  $m = \log_9 10 > 1$ , 所以  $0 < x = m^{\frac{1}{1-m}} < 1$ , 可知函数  $f(x) = x^m - (x+1)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 即  $f(8) < f(9) < f(10)$ , 所以  $a > 0 > b$ , 本题选 A。

从数学思想方法看, 本题体现的数学思想是化归与转化的思想, 数学方法是综合法, 由已知条件综合分析出结论。

基本能力是指人们成功地完成某种活动所必须具有的个性心理特征, 它直接影响人的活动效率, 是活动得以顺利进行的稳定的心理特征, 是未来发展的重要基础, 更是教育教学成果的体现, 是高水平人才素质的重要组成部分[4]。

从基本能力的角度来看, 本题基本能力考查了逻辑推理能力、运算求解能力。

基本态度与价值观角度包括基本的、积极的人生态度与价值观, 数学学科培养学生具有一定的数学视野, 认识科学的科学价值和人文价值, 崇尚数学的理性精神, 形成审慎的思维习惯, 体会数学的美学意义。其中包括规则意识和理性精神、探究和创新精神、辩证思想等[4]。

从基本态度与价值观角度来看, 本题要求学生具有整体观和现象背后有本质的价值判断。

### 2) 基础内容各成分构成统一的整体

我们一般往往只关心问题如何解决的具体方法, 事实上, 问题得到解决是基础知识、基本技能、基本思想方法, 以及情感态度与价值观共同作用的结果。根据文献[4]的解析, 本题各基础成分具有如下关系, 见图 1。

下面就比较大问题考查的基础性内容再举 2 例。

例 2.2 (2022 年全国新高考 1 卷第 7 题)

设  $a = 0.1e^{0.1}$ ,  $b = \frac{1}{9}$ ,  $c = -\ln 0.9$ , 则()

- A.  $a < b < c$       B.  $c < b < a$       C.  $c < a < b$       D.  $a < c < b$

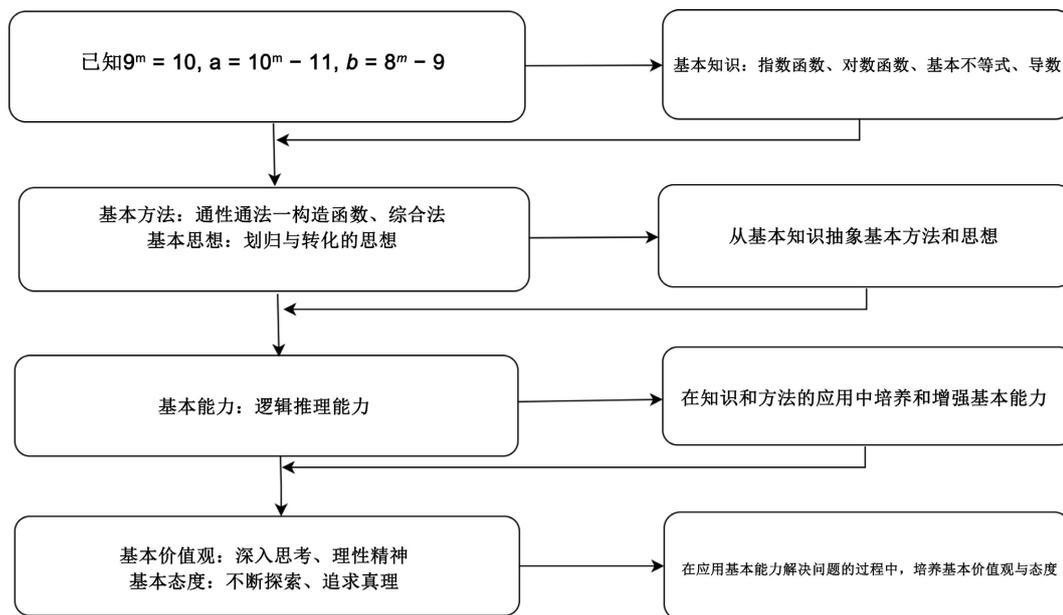


Figure 1. Basic component relationship diagram  
图 1. 基础成分关系图

分析：本题题干有分数、对数和幂指数，并且  $0.1+0.9=1$ ， $0.9=\left(\frac{10}{9}\right)^{-1}$ ，容易想到  $e^x > x+1$ ，在  $x$  取  $0.1$  时不等式右边与已知无关，取  $x=-0.1$  则得到  $0.9$ 。由前不等式有  $e^{-x} > -x+1$ ，可得  $e^x < \frac{1}{1-x}$  ( $x < 1$ )，即有  $0.1e^{0.1} < \frac{1}{9}$ ， $a < b$ 。同样由本不等式有  $e^{\frac{1}{9}} > 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$ ，从而有  $b > c$ 。

接下来考查  $a$ 、 $c$  的大小。

注意到  $0.9=1-0.1$ ，则  $a$ 、 $c$  是函数  $y=xe^x$  与  $y=-\ln(1-x)$  在  $x=0.1$  时的值，从而可把  $a$ 、 $c$  的大小比较转化为考查这两个函数的关系上来。

当然，本题也可以直接转化为考查三个函数  $y=xe^x$ 、 $y=\frac{x}{1-x}$ 、 $y=-\ln(1-x)$  的关系求解。

具体过程如下：先构造函数  $a=xe^x$ ， $b=\frac{x}{1-x}$ ， $c=-\ln(1-x)$ ，作差利用导数判断单调性继而比较  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小。

例如比较  $a$  与  $c$  的大小，可以将  $a$  与  $c$  作差， $a-c$  就是  $xe^x + \ln(1-x)$ ，可设  $f(x)=xe^x + \ln(1-x)$ ，( $0 < x < 1$ )，则  $f'(x)=\frac{(e^x-1)e^x+1}{x-1}$  ( $0 < x < 1$ )，令  $g(x)=(x^2-1)e^x+1$ ，则  $g'(x)=(x^2+2x+1)e^x$ ，当  $x \in (0, \sqrt{2}-1)$  时， $g'(x) < 0$ ，函数  $g(x)=(e^x-1)e^x+1$  单调递减，当  $x \in (\sqrt{2}-1, 1)$  时， $g'(x) > 0$ ，函数  $g(x)=(e^x-1)e^x+1$  单调递增，所以  $f(0.1) > f(0)$ ，即  $a > c$ 。同理可以将  $a$ 、 $b$  或者  $b$ 、 $c$  作差再利用导数即可比较大小。

所以，从基础知识的角度来看，本题涉及到指数函数、对数函数、导数及基本不等式等知识。

从基本方法的角度来看，本题仍然是函数视角。

从基本能力的角度来看，本题考查了逻辑推理能力、运算求解能力和构造能力。

从基本态度与价值观角度来看，本题可以让学生形成再往前想一步的以变化的思维思考问题的习惯，

培养攻坚克难的意志品质, 强调联系、综合、全面思考。

例 2.3 (2022 年全国甲卷理科第 12 题) 已知  $a = \frac{31}{32}$ ,  $b = \cos \frac{1}{4}$ ,  $c = 4 \sin \frac{1}{4}$ , 则()

A.  $c > b > a$       B.  $b > a > c$       C.  $a > b > c$       D.  $a > c > b$

分析: 本题题干有分数和三角函数, 但是我们发现分数与三角函数的数值分别是  $\frac{1}{4}$  与  $\frac{31}{32}$ , 虽然在给出的正弦函数和余弦函数中的自变量都是  $\frac{1}{4}$ , 但是我们仍然需要进一步地整体地思考  $\frac{1}{4}$  与  $\frac{31}{32}$  又有什么关系呢? 我们可以发现  $\frac{31}{32} = 1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$ , 解题的关键仍然是寻找到一个一致性结构, 我们发现利用  $b - a = \cos \frac{1}{4} - \frac{31}{32} = \cos \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1$ , 所以我们发现可以构造函数  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , 再利用导数知识求导即可求得  $b > a$ 。

从基础知识的角度来看, 本题考查三角函数与导数知识。

从基本方法的角度来看, 本题仍然利用函数的视角进行化归处理。

具体解析过程如下: 先对  $a$  与  $b$  基于我们发现的关系构造函数  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$ , 对  $f(x)$  求导可以得到  $f'(x) = -\sin x + x$ , 原函数在  $x \in (0, +\infty)$  上单调递增就有  $f\left(\frac{1}{4}\right) > f(0)$ , 那么  $\cos \frac{1}{4} - \frac{31}{32} > 0$ , 这样我们就成功地比较了  $b > a$ 。

而对于  $b$  与  $c$  的大小比较, 通过观察首先我们可以看出它们都是三角函数并且自变量相同, 也就是说本来就具备了一致性。但是正弦函数与余弦函数不能直接进行大小比较, 联想到关系式

$\sin x < x < \tan x$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 通过观察容易发现  $\frac{c}{b} = \frac{\cos \frac{1}{4}}{4 \sin \frac{1}{4}} = 4 \tan \frac{1}{4}$ , 这样我们就可以得出

$\frac{c}{b} = \frac{\cos \frac{1}{4}}{4 \sin \frac{1}{4}} = 4 \tan \frac{1}{4} > 4 \times \frac{1}{4} = 1$ , 即  $\frac{c}{b} > 1$ , 也就得出  $c > b$ , 这样结合上文  $b > a$ , 最终的大小关系就是

$c > b > a$ , 本题选 A。

从基本能力的角度来看, 本题考查的基本能力依然是逻辑推理能力、运算求解能力、构造新函数表达式的能力。

从基本态度与价值观角度来看, 本题考查学生能否透过现象看本质, 以及勇于创新的意志品质。

对于例 2.3, 有一部分教师认为该试题来源于 2019 年人教 A 版《数学》(必修第一册)第 256 页习题 26 题。因为教材中该题恰好给出了英国数学家泰勒发现泰勒公式的过程, 于是老师们认为这道题可以直接用泰勒公式来进行解题。同时也有教师会直接将泰勒展开式中的  $x_0 = 0$ , 得到麦克劳林公式, 告诉学生直接使用麦克劳林公式进行求解。当然在这道题目中使用这些公式确实可以得出正确的计算结果, 而且这是一道选择题, 也看不到答题的过程只要能选出正确的答案, 一些教师认为就是可以的。

但是这里我们需要注意到, 泰勒公式和麦克劳林公式并不是高中课程内容, 作为拓展是可以的, 特别是引导一些学有余力的学生进行补充研读是极为必要的, 但如果对学生进行整体性补充则是非常不可取, 是对教材及考试的误读。

当题目出的比较简单时, 试题命制的思路仍是考查以函数为载体的比较大小问题, 只是不再需要额

外地构造函数。

例如 (2023 年天津卷高考第 3 题) 若  $a=1.01^{0.5}$ ,  $b=1.01^{0.6}$ ,  $c=0.6^{0.5}$ , 则  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小关系为()

A.  $c > a > b$       B.  $c > b > a$       C.  $a > b > c$       D.  $b > a > c$

而是能通过观察一眼看出这是已经学过的基本初等函数中的指数函数与幂函数, 其中  $a$ 、 $b$  同底,  $y=1.01^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $1.01^{0.6} > 1.01^{0.5}$ , 即  $b > a$ ;  $a$ 、 $c$  同指,  $y=x^{0.5}$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $1.01^{0.5} > 0.6^{0.5}$ , 即  $a > c$ 。所以  $b > a > c$  本题选 D。

### 3. 对教学的启示

#### 1) 在教学过程中, 注意基础部分之间的整体性地教学。

在教学中值得我们注意的是教师不能就解题而解题而是要关注这个题目背后所蕴含的基本知识、基本方法、基本能力、基本态度与价值观, 进而整体性地培养学生的解题能力与素养。

#### 2) 对学生进行因材施教, 实现不同的人在教学上实现不同发展的要求。

在教学上要对学生分层次教学, 对于一些学有余力的学生或者数学基础特别好的学生可以根据学生的需要适当的拓展教学, 即可以向学生介绍高观点的解题思想; 而在日常教学中必须严格遵守课程标准的要求, 讲清楚函数思想对于比较大小试题的解法即可。

#### 3) 深刻理解高考试题的命题意图与高考的导向作用。

根据高考的要求的服务选才、引导教学目标, 教师可以通过研究高考题, 实现以考促教的目的, 进一步地加强试题对于一线教学的引领作用, 通过对比较大小高考试题的分析我们可以发现高考对于基础性考查的导向。

### 4. 结语

2019 年 11 月, 教育部考试中心研制的《中国高考评价体系》出版发行。该评价体系被概称为“一核”“四层”“四翼”。其中“四翼”指的是如何考的问题, 功能定位为既是落实高考“服务选才”的着力点, 又是发挥高考“引导教学”的抓手。其第一“翼”是指高考命题考查的基础性, 具体指“准确理解并熟练掌握学科主干内容, 具备应对生活实践或学习探索问题情境的基本知识、基本能力与基本素养, 具备进入高等学校进行专业学习和终身发展所需要的必备知识、关键能力和学科素养”。其对教学的启示是, 我们要全面准确理解其“基础性”。它一方面并不是那么“基础”, 考查的是两个“具备”, 这要求我们不能局限于简单的解题。问题的解决固然需要解题的方法, 根本上说, 它是基本知识、基本能力与基本素养综合作用的结果, 我们在教学中要把这几个基础融于一体, 综合培养, 不能就解题而解题。另一方面, 教学不能超纲, 不能老想着“捷径”“妙招”, 教学需要练好“马步”“内功”, 重视基础性。

### 参考文献

- [1] 任子朝. 新高考十年数学科考试内容改革: 成就、挑战与转向[J]. 中国考试, 2024(7): 11-18+63.
- [2] 优化试卷结构设计突出思维能力考查——2024 年高考数学全国卷试题评析[J]. 中国考试, 2024(7): 79-85.
- [3] 赵轩, 任子朝, 翟嘉祺. 落实双减要求深化基础性考查——2022 年新高考函数试题分析[J]. 数学通报, 2022, 61(9): 7-10.
- [4] 翟嘉祺, 任子朝, 赵轩. 高考深化基础性考查研究[J]. 中学数学教学参考, 2022(31): 4-7+12.