Advances in Education 教育进展, 2025, 15(2), 789-795
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.152311

Hans汉斯

基于STEM教学理念下线性代数课程的教学实践

——以消元法为例

邸贺璇[1,2]，蒋依夏[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2025年1月16日；录用日期：2025年2月18日；发布日期：2025年2月26日

摘 要

线性代数是高等学校理工科和经济学科等有关专业的一门重要基础课。本研究基于STEM的教育理念，以具体的消元法为例，将其核心的知识内容置于现实问题情境中，采用问题解决驱动的以学生为中心的教学方式，帮助学生理解各学科间的紧密联系、体会学科的价值。

关键词

STEM，消元法，线性代数

The Teaching Practice of Linear Algebra Course Based on STEM Teaching Concept

—Taking the Elimination Method as an Example

Hexuan Di[1,2], Yixia Jiang[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Jan. 16th, 2025; accepted: Feb. 18th, 2025; published: Feb. 26th, 2025

Abstract

Linear algebra serves as a fundamental course for students in science, engineering, economics, and other related fields at colleges and universities. Grounded in the educational philosophy of STEM,

文章引用: 邸贺璇, 蒋依夏. 基于 STEM 教学理念下线性代数课程的教学实践[J]. 教育进展, 2025, 15(2): 789-795.
DOI: 10.12677/ae.2025.152311

this study utilizes the specific elimination method as a case study. It contextualizes core knowledge within real-world problems and employs a problem-solving-driven, student-centered teaching approach. This methodology aims to enhance students' understanding of the interconnectedness between disciplines while allowing them to appreciate the intrinsic value of these fields.

Keywords

STEM, Elimination Method, Linear Algebra

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

2015 年 9 月，教育部印发《关于“十三五”期间全面深入推进教育信息化工作的指导意见(征求意见稿)》，明确提出要“探索 STEM 教育、创客教育等新教育模式”[1]。STEM 教育开始受到人们的关注。2017 年 6 月，中国教育科学研究院成立中国 STEM 教育研究中心，同时《2017 年中国 STEM 教育白皮书》正式发布。2018 年 5 月中国教育科学研究院正式启动了“中国 STEM 教育 2029 行动计划”，努力让 STEM 教育普及最广泛的学生群体，让科学思维与创新能力成为每一位学生的成长基因。近年来，STEM 教育在我国蓬勃发展，江苏省、深圳市、成都市等多个省市都专门发布文件，大力推进 STEM 课程建设，STEM 课程的设计也逐渐成为教育实践与研究的焦点。北京师范大学、北京国信世教信息技术研究院、教育部教育管理信息中心联合成立专门的课题组发布首期《中国 STEM 教育发展报告》，指出 STEM 教育能够有效培育学生的创造和参与的素养，科技与人文的贯通更有力促进了学生创新能力的提升[2]。

STEM 教育，即科学(Science)、技术(Technology)、工程(Engineering)、数学(Mathematics)的融合，源于美国 20 世纪 80 年度基于实用主义的国策，经历 30 余年的发展，目前已成为世界多国培养新世纪创新人才、提高公民综合素质的战略性教育政策选择。STEM 教育是一种以真实问题解决为任务驱动、立足学习过程、多种技术交叉融合的跨学科教育，以培养具有全面科学素养和创新时间能力的人才为根本目标[3]。STEM 教育的实质不是多学科，而是在多学科整合的基础上真正培养受教育者的能力：核心是发现问题→设计解决方法→利用科学、技术、工程、数学等知识解决问题→运用理性方法验证解决效果[2]。

线性代数是高等学校理工科和经济学科等有关专业的一门重要基础课。它不但是其它数学课程的基础，也是各类工程及经济管理课程的基础。另外，由于计算机科学的飞速发展和广泛应用，许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，于是作为处理离散问题的线性代数，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础[4]。线性代数课程对培养学生的逻辑推理能力、空间想象能力和抽象思维能力有着重要作用，对构建提升学生的数学涵养与素质有着不可替代的作用[5]。本文基于 STEM 的教学理念，对消元法进行重新设计和教学实践，以期让学生体会线性代数与社会发展、学生生活与发展的关系和意义。

2. 课例展示

2.1. 内容分析

在自然科学、工程技术和经济管理中的许多问题，往往可以归结为求解一个线性方程组。因此，研

究线性方程组的解法和解的理论就显得十分重要。本章主要研究一般的线性方程组，解线性方程组，如果变元为 4 个或者更多时，原来的方法就十分复杂了，必须建立“更有力的工具和更简单的方法”。这个更有力的工具和更简单的方法就是行列式和矩阵。用行列式理论求线性方程组的解，就有了克莱姆法则；用矩阵研究线性方程组，就有了一般线性方程组的消元法。对方程组的系数矩阵进行初等变化，我们还可以知道方程组是有解还是无解，有唯一解还是无穷多组解。对线性方程组本身的变形到对线性方程组的系数矩阵进行初等变换研究线性方程组，这绝不仅仅是一种速记的方式，更是一种工具和方法的创新。而方程组可能无解，也可能有唯一解或无穷多解；在有无穷多解的情况下，这些解之间的关系如何，线性方程组有解的充分必要条件和求解的方法；利用向量空间理论研究线性方程组解的性质和解的结构等问题。这些问题的谈论无论在理论上还是在应用上都是很有意义的。

2.2. 学情分析

学生在中学阶段已经学习用消元法解二(三)元一次方程组，会找当方程个数小于未知数的方程组的解，仅限于会求、会找方程组的解，本章的线性方程组从学生熟悉的代数形式到矩阵形式、向量形式，新词语、符号、定义和定理易让学生产生“形式化”障碍，内容的形式化、抽象性，使学生感到困难，如何创设贴近学生真实情境，将学生的已有经验与大学的线性代数建立联系，从而系统地解决线性方程解的相关问题，是本单元要重点突破的。

2.3. 教学目标

1) 能用消元法求解低阶的线性方程组，掌握初等行变换法求解高阶的线性方程组，理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件，能够利用矩阵的秩讨论线性方程组有解还是无解的条件。

2) 通过观察、归纳、概括出线性方程组解的情况，提升数学抽象素养；通过实际问题的解决，提升应用数学知识解决实际问题的意识与能力，提升数学建模素养。

2.4. 教学过程

创设情境、引入课题

随着中国经济的快速发展，人们的生活水平逐渐提高，越来越多的家庭开始拥有汽车。截至 2022 年 3 月底，我国机动车保有量达 4.02 亿辆，随着汽车数量的增加，给交通也带来一定的压力，为了更好掌握当地的交通情况，从而制定合理的交通规划，某市对某交叉路口做了交通流量的调查。

如图 1，某城市市区的交叉路口有两条单向车道组成，图中给出了在交通高峰时段每小时进入和离开路口的车辆数，计算在四个交叉路口间车辆的数量[6]。

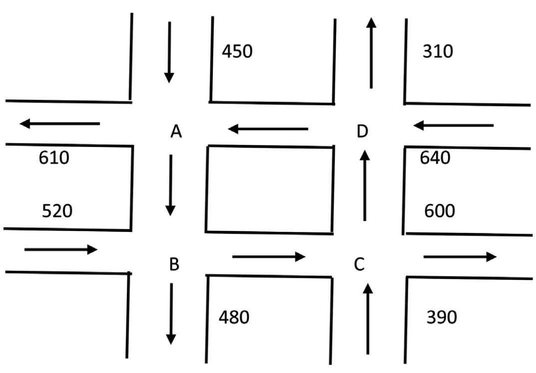

Figure 1. Traffic volume graph [6]
图 1. 交通流量图[6]

预案：根据我们的生活经验知道，交叉路口进入的车辆数等于离开路口的车辆数，根据这一条件，列出方程组。

可设 D-A 的车辆数为 x_1，A-B 的车辆数为 x_2，B-C 的车辆数为 x_3，C-D 的车辆数为 x_4。

$$\begin{cases} x_1+450=x_2+610 \\ x_2+520=x_3+480 \\ x_3+520=x_4+600 \\ x_4+640=x_1+310 \end{cases}$$

师：要全面掌握当地的交通情况，需要监测更多的交通数据。为此，方程的个数，未知元的个数都会增加。多元线性方程组是否有解？如果有解，它有多少解？如何求出方程组的全部解？这就是本章要重点探究的问题。

设计意图：通过创设生活中情境，引出多元一次方程组解个数的问题以及成立的条件，进而体会本节课学习的必要性。

探究新知，归纳方法

师：为了探寻多元线性方程组的一般解法，我们从最简单的一元一次方程开始着手。

问题 1：讨论方程 $ax=b$ 解的情况？

预案：当 $a\neq 0$ 时，方程有唯一解；当 $a=0$，$b=0$ 时，有无穷多个解；当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，无解。

问题 2：讨论二元一次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$ 解的情况？

问题 2.1：你能举个二元一次方程组有无穷多解的例子吗？无解的例子呢？

举例：$\begin{cases} x_1+x_2=35 \\ 2x_1+4x_2=94 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2=35 \\ 2x_1+2x_2=94 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2=27 \\ 4x_1+4x_2=108 \end{cases}$

有唯一解　无解　有无穷多解

对于二元一次方程，系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 及 D_i 是否为零，影响着解的情况。

通过上述分析我们可以看到克莱姆法则的局限性，但系数行列式 D = 0 时、方程的个数小于未知量的个数时，这种方面并不适用。而且对于四元以上的恰定线性方程组，用克莱姆法则求解的运算量会非常大，为此，我们有必要探寻一种通用性方法来求解多元线性方程组。

设计意图：通过最简单的方程(组)，让学生知道一般方程组解的情况有几种可能。通过举例子，让学生明白克莱姆法则解线性方程组的局限性，进一步引出更为一般的方法解决多元线性方程组。

接下来我们将以三元一次方程组为例，来探寻多元一次方程的是否有解的判定方法及一般解法，请看问题 3。

问题 3：解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=3 & ① \\ 3x_1+3x_2+x_3=0 & ② \\ -2x_1-x_2+2x_3=6 & ③ \end{cases}$

第一步，先让学生通过消元法求解，并呈现书写过程。

① + ③得：$3x_3=9$

等式两边乘以 $\frac{1}{3}$ 得：$x_3=3$，将 $x_3=3$ 代入①和②式得：

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=0 \\ 3x_1+3x_2=-3 \end{cases}$$

第 2 式乘以 $-\frac{1}{3}$ 加到第一式得 $x_1=1$，再代入求得 $x_2=-2$

第二步，改写呈现方式，将每步的运算具体呈现。

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=3\\3x_1+3x_2+x_3=0\\-2x_1-x_2+2x_3=6\end{cases}\xrightarrow{①+③}\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=3\\3x_1+3x_2+x_3=0\\3x_3=9\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}③}\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=3\\3x_1+3x_2+x_3=0\\x_3=3\end{cases}\xrightarrow{①-③,\,②-③}\begin{cases}2x_1+x_2=0\\3x_1+3x_2=-3\\x_3=3\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}②,\,(-②+①)}\begin{cases}x_1=1\\x_1+x_2=-1\\x_3=3\end{cases}\xrightarrow{②-①}\begin{cases}x_1=1\\x_2=-2\\x_3=3\end{cases}$$

第三步，根据矩阵的乘法，将线性方程组的形式改写，并介绍系数矩阵和增广矩阵的定义。之后，改写求解过程。

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\3&3&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}$$

$$\text{系数矩阵 }A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&3&1\\-2&-1&2\end{pmatrix},\text{增广矩阵 }\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&3\\3&3&1&0\\-2&-1&2&6\end{pmatrix}$$

$$\text{增广矩阵 }\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&3\\3&3&1&0\\-2&-1&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{①+③}\begin{pmatrix}2&1&1&3\\3&3&1&0\\0&0&3&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}③}\begin{pmatrix}2&1&1&3\\3&3&1&0\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-③+①,\,-③+②}\begin{pmatrix}2&1&0&0\\3&3&0&-3\\0&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}②,\,(-②+①)}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{②-①}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

设计意图：通过上述三种形式的呈现方式，让学生理解多元线性方程组实质是对系数进行四则运算，未知数附加在其后，当方程组的个数和未知元的个数增加时，用增广矩阵的初等变换来表示简便，体现了数学的简洁美。

思考交流，理解方法

思考 1：对增广矩阵施行行初等变换时，我们变换的目标是什么样的形式？

练习 1：请将下列方程组化成最简阶梯型矩阵的形式。

(1) $\begin{cases}x_1+x_2=35\\2x_1+4x_2=94\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+x_2=35\\2x_1+2x_2=94\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x_1+x_2=27\\4x_1+4x_2=108\end{cases}$

思考 2：如果增广矩阵 $\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，你能说出三元一次方程组解的情况吗？

预案：把它还原写成：$\begin{cases}x_1=2\\x_2=3\\0\cdot x_3=0\end{cases}$ 可以看出 x_3 是可以取任意值的，该方程有无穷多解。

思考 3：若是这种情况增广矩阵 $\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&0&5\end{pmatrix}$，此三元一次方程组解的情况呢？

设计意图：通过系列思考，帮助学生理解新符号的意义，使学生能够解读矩阵数字的含义。

问题 4：你能说出 n 元非齐次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$ 解的情况吗？

问题 5：设有 n 元齐次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\quad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$，系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$，讨论该方程组解的情况？

设计意图：通过具体三元一次方程组求解问题，引出初等行变换法，又设计了一些问题将三元一次方程组解的存在性以及解的个数推广到一般情形 n 元线性方程组解的存在性以及解的个数，引发学生思考。

回归引例，学以致用

分析：在每一路口，必有进入的车辆数与离开的车辆数相等，可设 D-A 的车辆数为 x_1，A-B 的车辆数为 x_2，B-C 的车辆数为 x_3，C-D 的车辆数为 x_4.

$$\begin{cases}x_1+450=x_2+610\\x_2+520=x_3+480\\x_3+520=x_4+600\\x_4+640=x_1+310\end{cases}\text{变形得：}\begin{cases}x_1-x_2=160\\x_2-x_3=-40\\x_3-x_4=210\\-x_1+x_4=-330\end{cases}$$

对增广矩阵实施行初等行变换得：

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&160\\0&1&-1&0&-40\\0&0&1&-1&210\\-1&0&0&1&-330\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&120\\0&1&-1&0&-40\\0&0&1&-1&210\\-1&0&0&1&-330\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&330\\0&1&-1&0&-40\\0&0&1&-1&210\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&330\\0&1&0&-1&170\\0&0&1&-1&210\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

思考 4：根据化简的增广矩阵，你能还原出对应的方程组吗？

$$\begin{cases}x_1-x_4=330\\x_2-x_4=170\\x_3-x_4=210\\0\cdot x_4=0\end{cases}$$

根据换元的方程组，我们可以看到 x_4 可以去任意值，而其他三个量都与 x_4 有关，只要 x_4 确定了，x_1、x_1、x_3 也就随之确定了。

师：现在你可以找到一组解吗？(提示：这是一个实际问题)

令 $x_4 = 300$，可得 $x_1 = 630$，$x_2 = 470$，$x_3 = 510$

城市规划者和交通规划师监控城市道路网格内的交通流量，电气工程师计算电力中流经的电流，经济学家分析产品通过批发商和零售商网络从生产者到消费者的分配，大多数网络问题中的方程组包含了数百甚至上千个变量和方程。n 元线性方程组是刻画上述问题的模型。

线性方程组的研究起源于古代中国，在经典著作《九章算术•方程》中对线性方程组的解法有比较完整的论述，其中所叙述方法实质上相当于方程组的增广矩阵施行的行初等变换，从而消去未知量，比西方早很多年。

设计意图：通过设计实际生活中的问题，让学生从“解题”走向“解决问题”，积累解决问题的体验，培养学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力。通过简化的增广矩阵逆向换元方程组的过程，培养学生会多角度想问题，为后面研究非齐次线性方程组解的结构问题奠定铺垫。

3. 结语

STEM 教育强调与真实世界的联系，在线性代数的课堂教学中，将通过创设实际生活中的问题情境，以问题驱动的方式引发学生思考，结合学习内容与已有的知识经验，注重动手与动脑的结合、理论与实践的结合、价值引导与知识传授的融合。让学生在参与、体验中获得知识，不仅获得结果性知识，还习得蕴含在情境问题解决过程中的过程性知识[7]，进而发展学生解决问题的能力。

基金项目

2022 年度伊犁师范大学教育教学改革项目，YSYB2022105。

参考文献

[1] 关于“十三五”期间全面深入推进教育信息化工作的指导意见(征求意见稿) [EB/OL]. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A16/s3342/201509/t20150907_206045.html, 2021-03-16.

[2] 《中国 STEAM 教育发展报告》：课程改革、师资培养、资源建设将是未来挑战[EB/OL]. http://www.jingmeiti.com/p=13458, 2021-03-16.

[3] 秦瑾若, 傅钢善. STEM 教育: 基于真实问题情景的跨学科式教育[J]. 中国电化教育, 2017(4): 67-74.

[4] 姚琼, 毛勇, 朱熙湖. 独立学院“线性代数”教学改革新思路[J]. 长春理工大学学报, 2011, 6(3): 167-168.

[5] 苏华东, 黄春红. 高等代数课程与高中数学的教学衔接策略[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2020, 37(1): 149-152.

[6] 郭文艳. 线性代数应用案例分析[M]. 北京: 科学出版社, 2019.

[7] 余胜泉, 胡翔. STEM 教育理念与跨学科整合模式[J]. 开放教育研究, 2015, 21(4): 13-22.