Advances in Education 教育进展, 2025, 15(2), 979-987
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.152335

巧用三角函数解平面向量的数量积问题

何 秀

福建师范大学数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2025年1月20日；录用日期：2025年2月20日；发布日期：2025年2月27日

摘 要

通过对高考数学试卷中涉及平面向量数量积问题的解题分析，本文总结了几个运用三角函数解决此类问题的常见方法，同时，深入探讨了高考中平面向量数量积问题的命题意图，并据此提出了相应的教学建议。

关键词

向量的数量积，三角函数，教学建议，核心素养

Skillfully Applying Trigonometric Functions to Solve the Scalar Product Problem of Plane Vectors

Xiu He

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Jan. 20th, 2025; accepted: Feb. 20th, 2025; published: Feb. 27th, 2025

Abstract

Through the analysis of solving the problem of the product of plane vectors in the mathematics test paper of the college entrance examination, this article summarizes several common methods of using trigonometric functions to solve such problems. At the same time, it deeply explores the proposition intention of the product of plane vectors in the college entrance examination and proposes corresponding teaching suggestions based on this.

Keywords

Product of Vector Quantities, Trigonometric Function, Teaching Suggestions, Core Competencies

文章引用：何秀. 巧用三角函数解平面向量的数量积问题[J]. 教育进展, 2025, 15(2): 979-987.
DOI: 10.12677/ae.2025.152335

1. 引言

三角函数作为高中数学课程的基础与核心之一，在历年高考数学中占据关键地位。张景中院士提出：在中学数学课程中，三角函数的重要性不容忽视。它连接着几何与代数、初等数学与高等数学[1]。陈昂等人指出三角函数的特殊性质使其与向量、复数、立体几何和解析几何等领域紧密相连[2]。三角函数作为数与形的结合体，是连接中学数学众多知识点的纽带，在数学解题中具有广泛的应用。特别是在解决平面向量的数量积问题时，能够产生显著的解题效果。

本文将从以下几个方面展开讨论：首先，介绍三角函数解决数量积问题的直接求解方法，即通过向量的坐标来计算；其次，探讨如何利用几何意义与解三角相结合的方法来求解数量积问题，这种方法在处理与角度相关的向量问题时尤为有效；然后，将重点放在如何用定义求向量的数量积，并将数量积问题转化为三角函数求最值的问题；最后，本文还将引入参数方程的概念，通过建立坐标系来解决涉及动点的向量数量积问题。这种方法在处理动态变化的向量问题时，能够提供一种直观且有效的解决方案。通过这些方法的综合运用，学生不仅能够更深入地理解向量数量积的概念，还能在实际问题中灵活运用三角函数和向量知识，提高解题的准确性和效率。

2. 直接求解

例 1. (2021 高考全国 1 卷 • 10)已知O为坐标原点，点 $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$， $P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$， $A(1,0)$ 则(　)

A. $|\boldsymbol{OP}_1|=|\boldsymbol{OP}_2|$　　　B. $|\boldsymbol{AP}_1|=|\boldsymbol{AP}_2|$

C. $\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OP}_3=\boldsymbol{OP}_1\cdot\boldsymbol{OP}_2$　　　D. $\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OP}_1=\boldsymbol{OP}_2\cdot\boldsymbol{OP}_3$

命题意图 将向量坐标运算的问题转化为考试中的热点——三角函数的恒等变换问题，角恒等变形的基本公式(例如两角和差公式，二倍角公式)便成为设计的基础素材。这一过程旨在评估考生对向量数量积的坐标表示、运算公式以及对三角函数的恒等变形相关知识和技能的掌握程度。同时，它也检验了考生在三角函数运算求解方面的能力。

分析 直接从向量的数量积的坐标表示和向量模的运算出发，运用相关公式，随后将问题转化为三角函数进行处理。巧妙运用三角的恒等变换进行化简和求值。

解 A：$\boldsymbol{OP}_1=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{OP}_2=(\cos\beta,-\sin\beta)$所以$|\boldsymbol{OP}_1|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$，同理$|\boldsymbol{OP}_2|=1$，$\boldsymbol{AP}_1=(\cos\alpha-1,\sin\alpha)$故$|\boldsymbol{OP}_1|=|\boldsymbol{OP}_2|$，正确；

B：$\boldsymbol{AP}_2=(\cos\beta-1,-\sin\beta)$，故$|\boldsymbol{AP}_1|=\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(\cos\alpha-1)}=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$，同理，$|\boldsymbol{AP}_2|=2\left|\sin\frac{\beta}{2}\right|$，故$|\boldsymbol{AP}_1|$，$|\boldsymbol{AP}_2|$不一定相等，错误；

C：$\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OP}_3=1\times\cos(\alpha+\beta)+0\times\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$，$\boldsymbol{OP}_1\cdot\boldsymbol{OP}_2=\cos\beta\cdot\cos\alpha+(-\sin\beta)\cdot\sin\alpha=\cos(\alpha+\beta)$，正确；

D：$\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OP}_1=1\times\cos\alpha+0\times\sin\alpha=\cos\alpha$，$\boldsymbol{OP}_2\cdot\boldsymbol{OP}_3=\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)+(-\sin\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)=\cos(\beta+(\alpha+\beta))=\cos(\alpha+2\beta)$，不能说明

$\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OP_1}=\boldsymbol{OP_2}\cdot\boldsymbol{OP_3}$ 成立，错误；故选：AC。

教学建议 在教学过程中，教师应该重视培养学生运用坐标法解决向量问题的能力。在日常解决具体问题时，教师可以引导学生思考如何应用坐标法，以及如何简化计算过程。通过反思，学生将了解到运用坐标法处理向量问题是一种常见的问题解决的方案，将几何问题转化为代数问题。教师应注意指导学生分析问题的条件和目标，明确计算方向，从而简化运算步骤，以及提升学生的数学运算能力。同时，学生必须熟练掌握三角的恒等变换公式，其中主要包括两角和与差的正弦、余弦及正切公式，以及与正弦、余弦的二倍角公式相关的升幂、降幂公式等。重点强调公式的灵活应用，以及深入理解公式之间的密切联系并且实现公式之间的相互转化以及推导[3]。

3. 利用向量的几何意义，将数量积问题转化为三角形求解过程

例 2. (2023 高考全国甲卷 • 理 4)已知向量 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$， $\boldsymbol{c}$，满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$， $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\rangle=(\ \ )$

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

命题意图 将向量数量积问题中的夹角问题转化为平面几何问题，通过向量的几何意义巧妙地构建平面几何图形，将抽象问题具体化。通过合理构建数学模型，进行知识迁移，以及利用图形的性质来解决相应的平面向量问题。试题主要考查学生对平面向量加法和减法法则等基础知识点及基本技能的掌握，以及评估他们对向量运算及其几何意义的理解。并且检测学生能否熟练运用正弦余弦定理来解决平面几何问题。

分析 在绘制图形的基础上，我们依据几何学的原理来计算模长，通过向量的加法和数量积的定义，将问题转化为对三角形边长和角度的计算。随后，应用勾股定理和余弦定理来确定夹角。

解 因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，即 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{c}^2$，即 $1+1+2\boldsymbol{ab}=2$，所以 $\boldsymbol{ab}=0$。见图 1，设 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$， $\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{c}$，

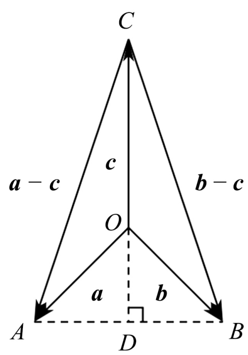

Figure 1. Image of example 2
图 1. 例 2 的图

由向量的平行四边形法则可知 $\boldsymbol{OD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，且 $OA\perp AB$，由题知，$|\boldsymbol{OA}|=|\boldsymbol{OB}|=1$，$|\boldsymbol{OC}|=\sqrt{2}$，且 $\angle AOB$ 是直角，由勾股定理易得 $|\boldsymbol{OD}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $|\boldsymbol{AD}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $|\boldsymbol{CD}|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$， $|\boldsymbol{CA}|=\frac{\sqrt{20}}{2}$， $|\boldsymbol{CB}|=\frac{\sqrt{20}}{2}$， $|\boldsymbol{AB}|=\sqrt{2}$，由余弦定理可得 $\cos\angle ACB=\frac{|CA|^2+|CB|^2-|AB|^2}{2|CA|\cdot|CB|}=\frac{4}{5}$，即 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\rangle=\cos\angle ACB=\frac{4}{5}$，故选：D。

例 3. (2011 高考全国 2 卷 •理 12)设向量，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{ab}=-2$，$\langle \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\rangle = 60^\circ$，则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值等于(　)

A. 4　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

命题意图 将向量数量积问题中的模长最值问题转化为平面几何问题，学生需掌握将向量运算与几何图形相结合的技巧。通过运用向量的加法和减法，学生能够根据向量的合成与分解，并利用向量的夹角关系来确定动点的轨迹。这一过程考查学生是否能够直观地理解向量的几何意义，以及是否能够在解决实际问题时应用几何意义。

分析 通过绘制图形，运用几何原理，我们能够找到动点的轨迹，将向量问题转化为解三角形问题。随后，利用正弦定理，我们可以计算出外接圆的半径。

解析 依题意可得，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{ab}=-2$，所以 $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$。见图 2，设 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\langle \boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\langle \boldsymbol{CA},\boldsymbol{CB}\rangle=\angle ACB=60^\circ$，且 $\angle AOB=120^\circ$。所以 $\angle AOB+\angle ACB=180^\circ$，所以 A,B,C,D 四点共圆。

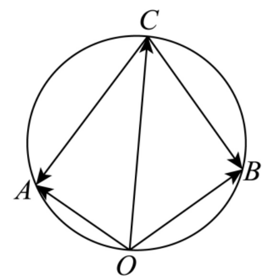

Figure 2. Image of *O*, *A*, *B* and *D*
图 2. *O*，*A*，*B* 与 *D* 的图

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$|\boldsymbol{AB}|^2=\boldsymbol{AB}^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2=12$。即 $|\boldsymbol{AB}|=2\sqrt{3}$，由正弦定理可得 ΔAOB 的外接圆的直径为 $2R=\dfrac{|\boldsymbol{AB}|}{\sin\angle AOB}=4$。当 $|\boldsymbol{OC}|$ 为圆的直径时，$|\boldsymbol{c}|$ 取得最大值 4。故选 A。

教学建议 在教学过程中，我们应当重视培养学生在解决问题时，学会通过构建平面几何图形连接平面向量的数量积、线性运算。以及使用图形中的长度、角度，实现向量与几何、代数的结合。例如，利用矩形、三角形、圆等特殊图形，直观形象地建立数学模型，简化数学运算，优化逻辑推理。重视学生对解题经验与技巧方法的积累，注重提高学生的数学运算与直观想象核心素养的水平[4]。并且，教师在教学中也应注重引导学生发现向量运算与几何图形性质之间的内在联系，帮助学生建立起解决向量问题的直观感受和逻辑思维能力。学生不仅需要掌握数形结合的能力，对函数与方程以及一般到特殊等思想方法有一定的理解。同时，学生还需要熟练掌握解三角的多种方法和基本公式，实现公式的灵活应用。教师在培养学生图形的分析能力的同时，还须提高其数学应用意识以及数学创新意识[5]。

4. 用定义求向量的数量积、将数量积的问题转化为三角函数求解

例 4. (2009 高考全国 1 卷 • 理 6)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 的最小值为(　)

A. -2　　B. $\sqrt{2}-2$　　C. -1　　D. $1-\sqrt{2}$

命题意图 本题是求解向量数量积的最大值和最小值。着重考查学生对向量数量积定义理解和数量积的计算，要求学生熟练运用向量乘法运算法则结合其他知识来解决综合应用问题[6]。这是一项对学生是

否全面掌握向量知识的评估。

分析 在转化过程中，我们首先需要明确数量积的定义，即两个向量的点积等于它们的模长乘以它们夹角的余弦值。$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 进行展开运算。由于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量，且它们的点积为 0，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，我们可以推导出 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 的表达式。进一步利用夹角的有界性，三角函数的性质，将问题转化为求解 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$ 的最大值，从而得到 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 的最小值。通过这种方法，我们可以将复杂的向量数量积问题简化为求解三角函数的最值问题，进而找到问题的答案。

解析 依题意可得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2=0-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+1=1-\sqrt{2}\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle\geq 1-\sqrt{2}$，故选 D。

例 5. (2009 安徽高考 • 理 14)给定两个长度为 1 的平面向量 $\boldsymbol{OA}$ 和 $\boldsymbol{OB}$，它们的夹角为 120°。如图 3 所示，点 C 在以 O 为圆心的圆弧 AB 上变动。若 $\boldsymbol{OC}=x\boldsymbol{OA}+y\boldsymbol{OB}$，其中 $x,y\in R$，则 $x+y$ 的最大值是________。

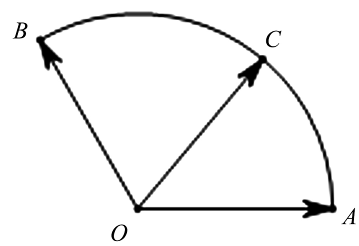

Figure 3. Image of example 5
图 3. 例 5 的图

命题意图 本题以圆的动点、向量线性表示为背景，研究参数之和最值。在解题过程中，一方面考查学生的化归转化、分析能力和直观想象素养，另一方面在运算过程中考查学生对于向量的线性表示水平和运算能力，培养学生的思维能力和知识迁移的能力，调动学生对所学知识的整体把握和应用。

分析 见图 3 通过表示向量 $\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OA}$ 和向量 $\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OB}$ 的数量积，将寻找 $x+y$ 的最大值问题转换为求解向量数量积的极值问题，根据平面向量数量积的定义，我们可以得到这样的表达：$\boldsymbol{OD}\cdot\boldsymbol{OC}=|\boldsymbol{OD}|\cdot|\boldsymbol{OC}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{OD},\boldsymbol{OC}\rangle$，由于 $\boldsymbol{OD},\boldsymbol{OC}$ 是已知的常数，故目标量的取值范围完全由 $\cos\langle\boldsymbol{OD},\boldsymbol{OC}\rangle$ 决定。因此，通过应用向量数量积的公式，我们可以将求解向量数量积的极值问题转化为研究三角函数值域的问题。为了找到 $\cos\langle\boldsymbol{OD},\boldsymbol{OC}\rangle$ 的最大值，我们需要考虑向量 $\boldsymbol{OD},\boldsymbol{OC}$ 的夹角范围。由于点 C 在以 O 为圆心的圆弧上变动，这意味着夹角 $\langle\boldsymbol{OD},\boldsymbol{OC}\rangle$ 的取值范围是 0°到 120°。根据三角函数的性质，当夹角为 0°时，cos 值达到最大值 1；而当夹角为 120°时，cos 值为 $-\frac{1}{2}$。因此，当 $\langle\boldsymbol{OD},\boldsymbol{OC}\rangle$ 为 0°时，即向量 $\boldsymbol{OD},\boldsymbol{OC}$ 方向相同时，它们的数量积达到最大值，此时 $x+y$ 的和也达到最大值。

解析 依题意可得 $\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OA}=x\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OA}+y\boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OA}=x-\frac{1}{2}y$，$\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OB}=x\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB}+y\boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OB}=-\frac{1}{2}x+y$，假设 D 是线段 AB 的中点，则 $x+y=2\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OC}+2\boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OC}=2(\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB})\cdot\boldsymbol{OC}=2\boldsymbol{OD}\cdot\boldsymbol{OC}=2\cos\langle\boldsymbol{OD},\boldsymbol{OC}\rangle$，当且仅当 O,C,D 三点共线时，$x+y$ 取到最大值 2。

例 5 的推广

通过上述方法，我们能够有效地将系数问题转化为向量数量积的问题，进而转化为三角函数的问题，并利用三角函数的性质和公式进行求解。这样，我们便能够解决系数问题。此方法不仅适用于本题，而且可以广泛应用于其他涉及结合圆上动点的向量线性表示的系数问题。接下来，我们将应用上述方法来

证明以下结论：

例 6. 若 O 是 ΔABC 的外心，若 $\boldsymbol{CO}=x\boldsymbol{CA}+y\boldsymbol{CB}$ （且 x,y 为任意实数)，则有 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab-a^2\cos C}{ab\sin^2 C} \\ y=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab-b^2\cos C}{ab\sin^2 C} \end{cases}$。

证明： $\begin{cases} \boldsymbol{CO}\cdot\boldsymbol{CA}=x\boldsymbol{CA}\cdot\boldsymbol{CA}+y\boldsymbol{CB}\cdot\boldsymbol{CA}=xb^2+yab\cos C=\frac{1}{2}b^2 \\ \boldsymbol{CO}\cdot\boldsymbol{CB}=x\boldsymbol{CA}\cdot\boldsymbol{CB}+y\boldsymbol{CB}\cdot\boldsymbol{CB}=ya^2+xab\cos C=\frac{1}{2}a^2 \end{cases}$，解方程组 $\begin{cases} xb^2+yab\cos C=\frac{1}{2}b^2 \\ ya^2+xab\cos C=\frac{1}{2}a^2 \end{cases}$，可得 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab-a^2\cos C}{ab\sin^2 C} \\ y=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab-b^2\cos C}{ab\sin^2 C} \end{cases}$。

例 7. (2023 全国高考乙卷 • 理 12)已知 $\odot O$ 的半径为 1，直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A，直线 PA 与 $\odot O$ 交于 B,C 两点，D 为 BC 的中点，若 $|PO|=\sqrt{2}$，则 ΔABC 的最大值为(　)

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

命题意图 本题探讨直线与圆的位置关系，重点研究平面向量数量积的最大值和最小值。解题时，既检验学生的绘图、分析和空间想象能力，也评估他们对向量表示和运算的掌握程度，旨在提升学生的综合思维能力和知识应用能力[7]。

分析 通过应用平面向量的数量积定义，我们得到 $\boldsymbol{PA}\cdot\boldsymbol{PD}=|\boldsymbol{PA}|\cdot|\boldsymbol{PD}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{PA},\boldsymbol{PD}\rangle$，根据题目要求进行作图，利用圆的对称性，我们可以发现当 $|\boldsymbol{PD}|$ 保持不变时，存在两种情况。这取决于直线 PD 位于直线 PO 的哪一侧，以求得 $\boldsymbol{PA}\cdot\boldsymbol{PD}$ 最大值。显然当直线 PD 和直线 PA 在直线 PO 的同一侧时，满足题目的要求。结合条件 $2\alpha-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，我们可以得出 $\boldsymbol{PA}\cdot\boldsymbol{PD}$ 的最大值为 1。因此，通过向量数量积公式，我们将向量数量积的最大值问题转化为三角函数的范围问题。随后，利用三角函数的性质和辅助角公式，我们可以确定 $\boldsymbol{PA}\cdot\boldsymbol{PD}$ 的最大值。

解析 见图 4，所示 $|OA|=1$，$|OP|=\sqrt{2}$，直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A，则 $\angle PAO=\frac{\pi}{4}$，由勾股定理可得 $|PA|=\sqrt{|OP|^2-|OA|^2}=1$，且 $\angle APO=\frac{\pi}{4}$，点 A,D 位于直线 PO 同侧时或 PB 为直径时，设 $\angle OPC=\alpha$，且 $0\le\alpha<\frac{\pi}{4}$，则 $\langle\boldsymbol{PA},\boldsymbol{PD}\rangle=\frac{\pi}{4}-\alpha$。

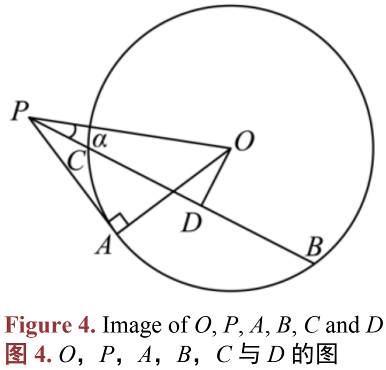

Figure 4. Image of O, P, A, B, C and D
图 4. O，P，A，B，C 与 D 的图

所以 $\begin{aligned}&1\times\sqrt{2}\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)\\&=\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$，因为 $\frac{\pi}{4}\le 2\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，所以当 $2\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{PA}\cdot\boldsymbol{PD}$ 有最大值 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$。故选：A。

例 7. (2010 北约自招 •题 4) 如图 5，向量 $\boldsymbol{OA}$ 和 $\boldsymbol{OB}$ 的夹角已知，$|\boldsymbol{OA}|=1$，$|\boldsymbol{OB}|=2$，$\boldsymbol{OP}=(1-t)\boldsymbol{OA}$，$\boldsymbol{OQ}=t\boldsymbol{OB}$，$0\le t\le 1$。$|\boldsymbol{PQ}|$ 在 t_0 时取到最小值，当 $0<t_0\le\frac{1}{5}$ 时，夹角的取值范围是________。

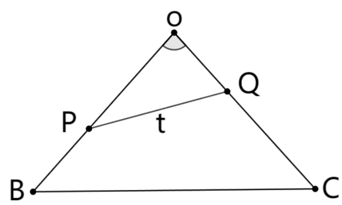

Figure 5. Image of example 7
图 5. 例 7 的图

命题意图 在强基中向量主要是一种辅导的解题工具，其大都和三角函数糅合在一起考查，并且特别热衷于考查就参数的范围及最值。因此，掌握向量与三角函数的结合使用，对于解决这类问题至关重要。

分析 我们需要明确向量的数量积定义，通过三角函数的性质，将向量问题转化为角度问题。我们先确定角度的范围，随后推理参数的取值范围，由此求解最值问题。例如，当向量的数量积与角度的余弦值有关时，我们可以根据余弦函数的单调性来确定参数的取值范围，找到数量积的最大值或最小值。这种方法不仅适用于选择题，也适用于解答题，是解决向量问题常用的有效手段。

解析 设 $\langle\boldsymbol{OA},\boldsymbol{OB}\rangle=\alpha$ $\begin{aligned}&|\boldsymbol{PQ}|^2=|\boldsymbol{OQ}-\boldsymbol{OP}|^2=|t\boldsymbol{OB}-(1-t)\boldsymbol{OA}|^2=4t^2+(1-t)^2-4t(1-t)\cos\alpha\\&=(5+4\cos\alpha)t^2-2(1+2\cos\alpha)t+1\end{aligned}$

当时 $t=t_0$，$|\boldsymbol{PQ}|$ 取得最小值，所以有当 $0<t_0\le\frac{1}{5}$ 时，$t_0=\frac{1+2\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}$，即 $\cos\alpha=\frac{-5t_0+1}{4t_0-2}\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 又因为 $\alpha\in[0,\pi)$，故可得 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$。

教学建议 教师在引导学生解决问题时，需强化学生应用数量积定义的意识，让学生学会思考并结合三角函数性质，将问题转换三角函数最值问题。通过向量夹角范围以及余弦函数在 $[0,\pi]$ 上单调递减的特性，学生可以找到数量积最小值。这一过程不仅让学生学会计算数量积，而且有利于他们更好地理解向量运算与三角函数的联系。在实际教学实践中，教师还可以设计一些具有挑战性的题目，让学生在解决问题的过程中，自然而然地运用向量数量积运算和三角函数的相关知识。例如，设计一些动点问题，让学生更进理解向量的几何意义。与此同时，教师还可以鼓励学生在解题时，尝试多种方法，并且比较不同方法之间的优劣，从而更深层次地理解向量运算和三角函数之间的关系。通过上述这类的教学活动，学生不仅能够掌握知识，还能培养出解决复杂问题的能力。

5. 引入参数方程，建系解决动点问题

例 8. (2022 • 北京 • 高考真题)在中 ΔABC，$AC=3$，$BC=4$，$\angle C=90^{\circ}$。P 为 ΔABC 所在平面内的

动点，且 $|CP|=1$，则 $\boldsymbol{PA}\cdot\boldsymbol{PB}$ 的取值范围是(　)

A. $[-5,3]$　　B. $[-3,5]$　　C. $[-6,4]$　　D. $[-4,6]$

命题意图 本题以向量为背景，融合了平面向量的坐标运算与数量积运算，将问题转化为三角函数问题。通过运用三角函数的相关知识，探讨数学问题的解决方法，从而考查学生在直观想象和数学运算方面的核心素养[8]。

分析 建立合适的直角坐标系，导出圆的参数方程，以表示动点坐标。通过向量坐标计算数量积，简化过程并直接求得最值。恰当的坐标系简化参数方程，便于用坐标表示向量，使问题解决策略更简洁明了。我们首先需要确定动点 P 的位置，然后利用向量的数量积坐标运算公式来表达 $\boldsymbol{PA}$ 和 $\boldsymbol{PB}$ 的点积。由于向量的数量积与角度有关，我们可以通过分析向量的数量积表达式来确定参数的取值范围，建立与三角函数的关系，利用辅助角公式。因此 $\boldsymbol{PA}$，$\boldsymbol{PB}$ 取值范围由 θ 决定，通过恒等变换，利用三角函数的性质和图像，进一步分析这个表达式，我们可以来确定这个范围，从而解答题目。

解析 依题意可知，建立平面直角坐标系，见图 6 则 $C(0,0)$，又因为 P 是以 C 为圆心且半径为 1 圆周上的动点，设，且 $\theta\in[0,2\pi]$，所以 $\boldsymbol{PA}=(3-\cos\theta,-\sin\theta)$，$\boldsymbol{PB}=(-\cos\theta,4-\sin\theta)$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PA}\cdot\boldsymbol{PB}&=(3-\cos\theta)\times(-\cos\theta)+(4-\sin\theta)\times(-\sin\theta)\\&=\cos^2\theta-3\cos\theta-4\sin\theta+\sin^2\theta=1-3\cos\theta-4\sin\theta=1-5\sin(\theta+\varphi)\end{aligned}$$

，其中 $\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，因为 $-1\le\sin(\theta+\varphi)\le1$，所以 $-4\le1-5\sin(\theta+\varphi)\le6$，即 $\boldsymbol{PA}\cdot\boldsymbol{PB}\in[-4,6]$。故选 D。

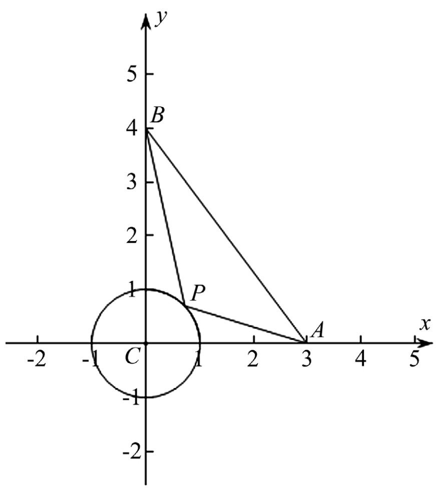

Figure 6. Image of P, A, B and C
图 6. P，A，B and C 的图

教学建议 学生在学习如何运用向量的坐标运算时，教师可以借助典型案例，引导学生尝试多种坐标系建立方法。此举有利于学生深入思考如何建立合适的坐标系，从而简化计算过程，使问题的解决策略更加清晰明了。在实际教学中，教师通过采用不同的方法和知识来表示向量，学生能更清楚地体验到数学知识之间的内在联系和综合运用。这样有助于培养他们的思维能力和整体观念，进一步深化对“四基”(基础知识、基本技能、基本思想、基本活动)和“四能”(发现问题的能力、分析问题的能力、解决问题的能力、创新思维的能力)培养的理解。

小结 向量的数量积问题不仅检验了学生对向量基础概念、运算技巧、平面几何定理以及坐标表示等关键知识点的掌握程度，而且它还起到了连接不同学科知识的桥梁作用。本文通过运用三角函数深入探讨这一问题，旨在加深对相关概念的理解和记忆，并且能够为解决其他问题提供新的视角。应用三角函

数求解向量数量积问题主要有四种方法：首先，基于向量的坐标运算直接求解，结合坐标运算考查三角恒等变换；其次，在求解过程中，构建相应的几何图形，借助向量数量积的几何意义和三角函数的相关知识，应用正余弦定理将向量的数量积问题转化为几何图形求解过程，从而培养学生的思维能力，同时在作图和几何分析中培养学生的直观想象素养，在求值中培养数学运算素养，进一步体会数形结合思想的应用策略。第三种方法是直接利用向量数量积的定义，并结合几何图形，夹角的有界性等进行求解，用公式将向量的数量积直接表示出来，用代数的方式求解，体会数量积概念的应用，培养学生的抽象思维和运算素养；最后一种方法是巧妙引入参数表示向量，从而得到向量数量积的三角形式，利用三角恒等变形化简，结合三角函数的单调性得到数量积的最值。在求解过程中，根据实际情境，灵活运用对应知识作为载体来表示向量，培养学生的知识应用能力。

通过上述示例，我们可以清晰地观察到三角函数作为解题工具，在解决向量数量积问题时得到了广泛的应用。数学概念是数学教学的核心[9]。学生只有明确数量积的定义及其几何含义，理解其与向量模长、向量夹角之间的关系才能够熟练应用三角函数解决解决向量数量积问题。从数学概念的来源来看，常见的有如下两个方面：一是直接从客观事物的数量关系和空间形式反映而得，二是在抽象的数学理论基础上经过多级抽象所获[10]。就解决平面向量数量积问题而言，学生可以通过几何分析，构造向量数量积，引入参数方程，探索动点轨迹，将向量问题转换为三角问题，从而简化计算步骤。这种策略不仅适用于上述示例，也同样适用于其他涉及向量数量积的问题。该过程展现了构造性思维，对于提升学生数学核心素养具有显著意义。

参考文献

[1] 张景中. 重建三角、全局皆活——初中数学课程结构性改革的一个建议[J]. 数学教学, 2006(10): 1-2.

[2] 陈昂, 任子朝, 赵轩. 高考中三角函数内容考查研究[J]. 数学通报, 2018, 57(10): 44-45.

[3] 林松. 在反思和追根中提升解题教学效益——以一道向量题为例[J]. 数学通报, 2019, 58(11): 46-47.

[4] 马洪博. 注重“四基”凸显“四能”, 彰显数学核心素养——以几道 2022 年平面向量高考题为例[J]. 中学数学研究, 2023(3): 7-9.

[5] 蔡双湖. 巧用“三观”妙解三角恒等变换问题——以 2022 年新高考全国 I 卷第 18 题为例[J]. 数理化研究, 2023(22): 113-115.

[6] 陈挺. 平面向量高考复习应关注交汇性问题[J]. 中学教学参考, 2023(26): 4-6+10.

[7] 刘辉, 刘金平. 核心素养背景下的平面向量教学探究——以 2023 年高考数学全国乙卷理科第 12 题为例[J]. 教学考试, 2024(11): 13-16.

[8] 杜强信. 探析 2022 年高考对平面向量的考查[J]. 中学数学, 2023(9): 61-62.

[9] 郭玉峰, 等. 数学学习论[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2015.

[10] 鲍建生, 周超. 数学学习的心理基础与过 程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009.