

《信号与系统》课程中叠加性与均匀性的探讨

王文博¹, 雷成友^{2*}

¹华南农业大学电子工程学院(人工智能学院), 广东 广州

²武汉第二船舶设计研究所, 湖北 武汉

收稿日期: 2025年1月6日; 录用日期: 2025年2月10日; 发布日期: 2025年2月17日

摘要

叠加性和均匀性是《信号与系统》课程中的核心概念, 是理解线性特性和判断线性系统的基础。然而, 现有教材中普遍缺乏具备叠加性但不具备均匀性, 以及具备均匀性但不具备叠加性的具体实例。教学实验结果显示, 学生对这两个概念的理解普遍存在不足。对叠加性和均匀性的关系进行了研究, 证明了实数域内叠加性蕴含均匀性的结论, 并构造了两类非线性系统实例。研究结果丰富了现有教材内容, 提示教学过程中有必要加强探究性与启发式的讨论。

关键词

线性系统, 叠加性, 均匀性

Exploring Superposition and Homogeneity in “Signal and System” Course

Wenbo Wang¹, Chengyou Lei^{2*}

¹College of Electronic Engineering (College of Artificial Intelligence), South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong

²Wuhan Second Ship Design and Research Institute, Wuhan Hubei

Received: Jan. 6th, 2025; accepted: Feb. 10th, 2025; published: Feb. 17th, 2025

Abstract

Superposition and homogeneity are core concepts in the “Signals and Systems” course, forming the foundation for understanding linear properties and identifying linear systems. However, current textbooks generally lack specific examples that demonstrate systems possessing superposition but

*通讯作者。

文章引用: 王文博, 雷成友. 《信号与系统》课程中叠加性与均匀性的探讨[J]. 教育进展, 2025, 15(2): 272-278.
DOI: 10.12677/ae.2025.152238

not homogeneity, or *vice versa*. Teaching experiments reveal a widespread deficiency in students' comprehension of these two concepts. This study explores the relationship between superposition and homogeneity, proving that superposition implies homogeneity in the real domain, and presents two types of nonlinear system examples. The findings supplement existing textbook content and highlight the need for inquiry-based, heuristic discussions in the teaching process.

Keywords

Linear System, Superposition, Homogeneity

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在信号处理领域, 线性系统理论已相当完善, 具有统一的处理方法, 而非线性系统的有效处理方法仍较为欠缺。因此, 区分线性系统与非线性系统是一个重要的问题。根据线性系统的定义, 判定一个系统是否为线性系统需验证其输入与输出关系是否同时满足叠加性和均匀性。反之, 非线性系统则是指不满足叠加性、均匀性, 或两者均不满足的系统。在本文作者查阅的众多教材中, 非线性系统的例子多属于同时不满足叠加性和均匀性的情况[1]-[4]。显然, 单独不满足其中一种性质的非线性系统也应存在, 这是逻辑上的必然, 因为叠加性和均匀性是彼此独立的性质, 其中一个并不包含另一个。

本文的主要工作如下: 第2节给出具有叠加性但不具备均匀性的非线性系统实例。第3节给出具有均匀性但不具备叠加性的非线性系统实例。第4节证明在实数域上, 系统的叠加性蕴含均匀性。第5节介绍并分析关于学生对叠加性和均匀性理解的教学实验。第6节提出对教学中过度工程化与实用主义倾向的不同看法。第7节探讨研究结果对《信号与系统》课程的意义及教学启示。

2. 具有叠加性但不具备均匀性的系统

如果系数和信号均定义在复数域, 这类例子很容易找到。例如, 系统的输入-输出关系由式(1)确定。

$$y(t) = T[x(t)] = \text{Re}[x(t)] \quad (1)$$

其中, T 表示系统对输入信号的作用, 即变换或变形(Transform), $x(t)$ 为输入信号, $y(t)$ 为输出信号, Re 表示取信号实部的运算。由于

$$\begin{aligned} T[x_1(t) + x_2(t)] &= \text{Re}[x_1(t) + x_2(t)] \\ &= \text{Re}[x_1(t)] + \text{Re}[x_2(t)] \\ &= T[x_1(t)] + T[x_2(t)] \end{aligned}$$

因此系统满足叠加性。但令 $x(t) = 1 + i$, $a = i$, 其中, i 表示虚数单位, $i = \sqrt{-1}$ 。则

$$T[x(t)] = \text{Re}[x(t)] = \text{Re}[1 + i] = 1 \quad (2)$$

$$T[ax(t)] = \text{Re}[ax(t)] = \text{Re}[i(1 + i)] = -1 \quad (3)$$

从式(2)和式(3)可以看出, $T[ax(t)] \neq aT[x(t)]$, 因此系统不满足均匀性。

需要指出,《信号与系统》课程主要关注实数域的时域信号,但时域信号经过傅里叶变换或拉普拉斯变换等积分变换得到的频域信号,通常是复数域的信号。因此,系数和信号定义在复数域的情况,对于工程应用和课程教学均具有重要的实际意义。

3. 具有均匀性但不具备叠加性的系统

系数和信号均定义在实数域,系统的输入-输出关系由式(4)确定。

$$y(t) = T[x(t)] = \begin{cases} \frac{x(t-t_1)x(t-t_2)}{x(t)}, & x(t) \neq 0 \\ 0, & x(t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中, T 表示系统对输入信号的作用,即变换或变形(Transform), $x(t)$ 为输入信号, $y(t)$ 为输出信号, t_1 和 t_2 为非零常数。

对于 $a=0$, 显然 $T[ax(t)] = aT[x(t)]$ 成立。

对于 $a \neq 0$, 由于

$$\begin{aligned} T[ax(t)] &= \begin{cases} a \frac{x(t-t_1)x(t-t_2)}{x(t)}, & x(t) \neq 0 \\ 0, & x(t) = 0 \end{cases} \\ &= aT[x(t)] \end{aligned}$$

因此系统满足均匀性。但令 $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = e^{-t}$, $t_1 = t_2 = 1$ 。则

$$T[x_1(t) + x_2(t)] = \frac{e^{2(t-1)} + e^{-2(t-1)} + 2}{e^t + e^{-t}} \quad (5)$$

$$T[x_1(t)] + T[x_2(t)] = \frac{e^{2(t-1)}}{e^t} + \frac{e^{-2(t-1)}}{e^{-t}} = \frac{e^{2(t-1)} + e^{-2(t-1)} + e^2 + e^{-2}}{e^t + e^{-t}} \quad (6)$$

从式(5)和式(6)可以看出, $T[x_1(t) + x_2(t)] \neq T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$, 因此系统不满足叠加性。

显然, 这是一个精心构造的实例, 具有理论价值, 但在信号处理领域缺乏工程实用性。

4. 实数域中叠加性蕴含均匀性

在《信号与系统》课程中, 系数和信号通常定义在实数域内。假设系统满足叠加性, 即 $T[x_1 + x_2] = T[x_1] + T[x_2]$ (为书写简便, 本节省略时间变量 t)。其中, T 表示系统对输入信号的作用, 即变换或变形(Transform)。显然, 叠加性可推广到多个输入信号的情况:

$$T\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \sum_{i=1}^n T[x_i] \quad (7)$$

先证明均匀性对于整数系数成立。

令 $x_i = 0$, 由式(7)可得 $T[0] = 0$, 即零输入零输出, 这是一项线性系统的重要性质。这表明均匀性在零系数下成立。

令 $x_i = x$, 由式(7)可得 $T[nx] = nT[x]$ 。这表明均匀性在正整数系数下成立。

令 $n=2$, $x_1 = -x_2 = x$, 由式(7)可得 $T[-x] = -T[x]$ 。令 $x_i = -x$, 由式(7)进一步推得, $T[-nx] = -nT[x]$ 。这表明均匀性在负整数系数下成立。

综上所述, 均匀性在整数系数下成立。

再证明均匀性对于有理数系数成立。

令 $x_i = \frac{1}{n}x$, 其中, n 为正整数。由式(7)可得 $T[x] = nT\left[\frac{1}{n}x\right]$, 即 $T\left[\frac{1}{n}x\right] = \frac{1}{n}T[x]$ 。令 $x_i = \frac{1}{n}x$ 及 $n = m$,

由式(7)进一步推得, $T\left[\frac{m}{n}x\right] = \frac{m}{n}T[x]$, 其中, m 为正整数。这表明均匀性在正有理数系数下成立。

因为

$$T\left[-\frac{m}{n}x + \frac{m}{n}x\right] = T\left[-\frac{m}{n}x\right] + T\left[\frac{m}{n}x\right] = 0$$

所以 $T\left[-\frac{m}{n}x\right] = -T\left[\frac{m}{n}x\right] = -\frac{m}{n}T[x]$ 。这表明均匀性在负有理数系数下成立。

综上所述, 均匀性在有理数系数下成立。

最后证明均匀性对于实数系数成立。

根据有理数的稠密性[5], 每个实数 a 都可以写成有理数数列 $\{b_i\}$ 的极限, 即 $a = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i$ 。

$$\begin{aligned} T[ax] &= T\left[\left(\lim_{i \rightarrow \infty} b_i\right)x\right] = T\left[\lim_{i \rightarrow \infty} b_i x\right] \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} T[b_i x] = \lim_{i \rightarrow \infty} (b_i T[x]) \\ &= \left(\lim_{i \rightarrow \infty} b_i\right) T[x] = aT[x] \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)成立需要满足运算符 T 和 $\lim_{i \rightarrow \infty}$ 可交换的条件, 对于基本系统(如放大器、延迟器、微分器、积分器等)及其组合系统, 该条件均成立。

综上所述, 均匀性在实数系数下成立。

该定理表明, 对于实数域上的系统, 验证线性性质只需验证其叠加性。

由于《信号与系统》课程主要关注实数域的时域信号, 且上文已证明实数域中叠加性蕴含均匀性, 因此具有均匀性但不具备叠加性的非线性系统实例难以构造。第2节给出的实例虽然数学技巧较强, 但实用性不足, 显得较为刻意。

以下给出一个更优的实例。假设信号 $x(t)$ 为已标准化信号, 需衡量其数值分布的非对称性, 利用式(9)计算偏度。

$$y(t) = T[x(t)] = \left[\int_0^t x^3(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

$y(t) > 0$ 时, 信号 $x(t)$ 在 0 到 t 时间段内呈右偏态; $y(t) < 0$ 时, 信号 $x(t)$ 在 0 到 t 时间段内呈左偏态。随着 $|y(t)|$ 增大, 偏态程度增强。

容易验证, 系统满足均匀性而不满足叠加性。因此, 式(9)构成了一个具有均匀性但不具备叠加性的非线性系统。同时, 式(9)是数据处理中常用的工具, 用于检验数据分布的对称性, 具备较高的工程实用价值。

5. 教学实验

在过去三年的《信号与系统》课程教学中, 本文第一作者进行了实验: 通过设置思考题, 鼓励学生提供两类非线性系统的实例, 正确回答者可获得课程成绩加分。实验结果如表1所示。

Table 1. Statistics of nonlinear system examples submitted by students in the course over the past three years
表 1. 过去三年中学生在课程中提交的非线性系统实例统计

年份	班级人数	第一类实例人数	第二类实例人数
2022	43	3	1
2023	30	4	0
2024	38	3	1

由表 1 可见，约 10% 的学生能够给出第一类实例(具有叠加性但不具备均匀性的系统)，而能够给出第二类实例(具有均匀性但不具备叠加性的系统)的学生则极为稀少。

这种两类实例完成情况的对比趋势是合理的。正如上文所述，一方面，在复数域中，许多运算不满足均匀性，使得第一类实例相对容易构造。另一方面，在实数域中，叠加性蕴含均匀性。因此，第一类实例虽仅存在于复数域，但较易构造；而第二类实例的构造空间更小，难度更高。

然而，完成两类实例的学生人数低于预期，反映出学生对叠加性和均匀性概念的理解不足，基础数学知识也存在欠缺。同时，学生在学习过程中受限于课本内容，缺乏批判性思维和自主扩展学习的意识。

针对这一现象，教师应通过对知识的深入思考与个性化讲解，引导学生学习并激发其创新思维，使课程教学从单纯的信息传授转变为理解层次的启发式探讨。这不仅体现了研究型教学的本质，也对教师的专业素养和综合素质提出了更高要求。

6. 观点争论

有一种观点认为：在《信号与系统》课程中，学生只需根据给定的输入输出约束关系判断系统是否满足线性条件，无要求学生构造特例分析叠加性与均匀性之间的关系。过多的数学分析可能导致课程偏离其核心内容，带来不必要的困扰。当然，对于少数有兴趣的学生，可以鼓励其探究此类问题，但这不应作为课程的教学要求。

本文作者认为：

两类非线性系统(具有叠加性但不具均匀性的系统与既不具叠加性也不具均匀性的系统)的存在在逻辑上是必然的，否则叠加性与均匀性将是同一概念。因此，本文所探讨的问题是线性系统判定问题的自然延伸，而非偏离核心脉络。通过举例说明这两类系统，阐明叠加性与均匀性之间的关系，有助于补充教学内容，促进学生对线性概念的深入理解。

线性系统的分析与表示是《信号与系统》课程的核心内容之一。叠加性与均匀性作为线性概念的两个重要组成部分，虽然从工程应用角度来看可能不是最实用的部分，但从理论体系的完整性出发，它们却是不可或缺的。这不应成为对少数学生的馈赠，探索精神和思维方法始终比暂时的结果更为重要，更贴近教育的本质。

此外，上述观点折射出目前的教学模式的一个隐忧：无论是教材还是课堂教学，主要传授的是最终的结果、结晶化的知识、精心雕琢的理论。而忽略了理论背后的想法，结晶化的过程那条漫长而曲折的道路，乃至发现新东西时那种惊奇的感觉。这种教学模式下培养的学生往往缺乏批判性思维与创造性思维[6]。本文第一作者在教学实践中尝试三个做法以改进教学过程：

一、追溯概念的起源与方法的演变。

二、鼓励学生保持强烈的问题意识，不满足于最终结果，也不轻易接受一个快速的解答[7]。应深入思考问题，变换角度，进行多样化探索。

三、从理论价值、实用价值和审美价值三个维度全面衡量教学内容的重要性。在评估时, 不应将工程实用性作为唯一标准, 理论意义和审美价值同样不可忽视。

本文的主题源于这种教学实践, 是一个教学相长的案例。最初由学生提出的问题, 最终发展为教师的研究课题。通过溯源分析, 本文作者进一步探讨了线性系统一般定义下叠加性与均匀性的关系, 相关内容详见附录。

用砌墙做比喻比较两种教学模式。前一种教学模式下, 学生可能完成“拆了东墙补西墙”的工作, 但面对更为复杂的任务, 如砌墙乃至盖房子时, 往往感到束手无策。而在后一种教学模式下, 学生需要经历较为漫长的基础训练, 但通过持续不断的努力, 他们一定会像砌墙的砖头——后来居上。

7. 结束语

本文通过对叠加性与均匀性在《信号与系统》课程中的作用分析, 构造了若干非线性系统实例, 探讨了二者之间的关系, 并证明了在实数域中叠加性蕴含均匀性的结论。教学实验结果表明, 学生在理解这两个概念上仍有不足, 提示教学中应加强探究性与启发式的讨论。研究结论为现有教材内容提供了有益补充, 对深入理解线性系统特性及优化课程教学具有重要参考价值。

本文理论上阐明了, 具有均匀性但不具备叠加性且工程应用价值较高的系统难以构造。除第3节中的实例外, 作者暂时未能提出更多更合适的实例。

第3节的证明方法借鉴了文献[5]中柯西的证明技巧(牛顿将二项式定理由正整数幂推广到实数幂, 柯西提供了严格的证明, 本文采用的方法与其类似)。附录中构造的实例参考了魏尔斯特拉斯常用的技巧。这些案例为学生提供了一个观察一流头脑的思维过程的窗口, 从描述问题的方式, 到分析问题的思路, 再到处理问题的风格, 均可为学习的典范。模仿大师, 以大师为师, 是最好的学习方法。

基金项目

广东省普通高校青年创新人才类项目(2019KQNCX013)。

参考文献

- [1] Oppenheim, A.V., Willsky, A.S., Nawab, S.H., 著. 信号与系统[M]. 刘树棠, 译. 第2版. 北京: 电子工业出版社, 2013.
- [2] Lathi, B.P., 著. 线性系统与信号[M]. 刘树棠, 王薇洁, 译. 第2版. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.
- [3] 郑君里, 应启珩, 杨为理. 信号与系统[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [4] 吴大正. 信号与线性系统分析[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [5] Bradley, R.E. and Sandifer, C.E. (2009) Cauchy's Cours d'Analyse. Springer.
- [6] 钱颖一. 批判性思维与创造性思维教育: 理念与实践[J]. 清华大学教育研究, 2018, 39(4): 1-16.
- [7] 澳大邀菲尔兹奖得主森重文教授分享数研之路[EB/OL]. <https://www.gov.mo/zh-hans/news/117934/>, 2015-05-18.
- [8] 线性系统[EB/OL]. <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%B7%9A%E6%80%A7%E7%B3%BB%E7%B5%B1>, 2022-11-07.

附录

文献[1]-[4]关于线性系统的定义, 是一个工程化的定义(狭义的定义)。在线性系统的一般定义中, 系数和信号可以属于不同的数域[8] (数域的定义: 如果 S 中的数对任意两个数的和、差、积、商(除数不为 0)仍属于 S , 则称 S 是一个数域。例如有理数集 $\mathbb{Q}$ 、实数集 $\mathbb{R}$ 、复数集 $\mathbb{C}$ 等都是数域)。

在线性系统一般定义下, 具有均匀性但不具备叠加性的系统较容易构造, 下面给出一个实例。

系数定义在有理数域, 信号定义在实数域, 系统的输入 - 输出关系由式(10)确定。

$$y(t) = T[x(t)] = \begin{cases} x(t), & x(t) \in \mathbb{Q} \\ -x(t), & x(t) \in \mathbb{I} \end{cases} \quad (10)$$

其中, T 表示系统对输入信号的作用, 即变换或变形(Transform), $\mathbb{Q}$ 表示有理数集, $\mathbb{I}$ 表示无理数集。当输入信号为有理数时, 输出信号等于输入信号本身; 当输入信号为无理数时, 输出信号等于输入信号的相反数。

对于 $a \in \mathbb{Q}$, 由于 $T[ax(t)] = aT[x(t)]$, 因此系统满足均匀性。

但对于 $x_1(t) \in \mathbb{Q}$, $x_2(t) \in \mathbb{I}$,

$$T[x_1(t) + x_2(t)] = -x_1(t) - x_2(t) \quad (11)$$

$$T[x_1(t)] + T[x_2(t)] = x_1(t) + x_2(t) \quad (12)$$

从式(11)和式(12)可以看出, $T[x_1(t) + x_2(t)] \neq T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$, 因此系统不满足叠加性。

尽管可以举一反三的构造很多类似实例, 但这些实例无一例外均缺乏工程实用性。