Advances in Education 教育进展, 2025, 15(3), 85-92
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.153375

《信号与系统》课程中卷积法的探讨

王文博，代　芬*

华南农业大学电子工程学院(人工智能学院)，广东 广州

收稿日期：2025年2月1日；录用日期：2025年2月27日；发布日期：2025年3月7日

摘　要

工程实践限定了信号的因果性，物理可实现性要求系统满足因果性，因此系统分析通常隐含遵循因果律。同时，系统起初绝对静止是系统分析的另一个基本假设。基于这两个条件，结合具体案例，阐明初始条件的物理意义，揭示零状态响应概念的本质，并推导卷积分解方法的合理性。研究结果不仅丰富了相关理论内容，为教材编写提供了参考和补充，也对研究方法优化、课程思政设计和教学方法创新具有重要启示。

关键词

线性时不变系统，因果性，初始状态，卷积法，线性常系数微分方程

Exploring the Convolution Method in “Signal and System” Course

Wenbo Wang, Fen Dai*

College of Electronic Engineering (College of Artificial Intelligence), South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong

Received: Feb. 1st, 2025; accepted: Feb. 27th, 2025; published: Mar. 7th, 2025

Abstract

Engineering practice constrains signals to causality, and physical realizability requires systems to adhere to causality, making causality an implicit assumption in system analysis. Additionally, the assumption of an initially quiescent system serves as another fundamental premise for system analysis. Based on these two conditions, this study, through specific cases, elucidates the physical significance of initial conditions, reveals the essence of the zero-state response, and derives the rationality

*通讯作者。

文章引用: 王文博, 代芬. 《信号与系统》课程中卷积法的探讨[J]. 教育进展, 2025, 15(3): 85-92.
DOI: 10.12677/ae.2025.153375

of the convolution decomposition approach. The findings not only enrich relevant theoretical content and provide references and supplements for textbook development but also offer valuable insights for optimizing research methods, designing curriculum ideologies, and innovating teaching approaches.

Keywords

Linear Time-Invariant System, Causality, Initial State, Convolution Method, Linear Constant Coefficient Differential Equation

1. 引言

线性时不变系统(LTI)是信号与系统理论的核心概念，其关键特性之一是系统的输出信号等于输入信号与系统单位冲激响应的卷积。由于卷积运算满足交换律和结合律，且单位冲激信号作为单位元，LTI 系统因此具备许多重要性质[1] [2]。作为 LTI 系统的典型代表，线性常系数微分方程系统的响应求解是《信号与系统》课程的重点内容之一，其中卷积法作为一种简便有效的求解方法占据重要地位[3] [4]。因此，卷积法是《信号与系统》课程教学中的重要内容。

根据卷积法的分解方式，当输入信号为零时，零输入响应为原方程对应齐次方程的解，其形式由系统特性和初始状态共同决定。当初始状态为零时，零状态响应则等于输入信号与系统单位冲激响应的卷积，其形式由系统特性和输入信号共同决定。尽管该分解方式能够通过代入原方程验证解的正确性和唯一性，但其合理性缺乏严谨的论证或证明。本文将从“系统起初处于绝对静止状态”、“系统遵循因果律”等更基本的概念或更直观的观点出发，构造性的证明卷积法本质上是 LTI 系统的线性叠加性质，这一结果有助于学生更加简洁且深刻地理解卷积法的原理。

本文的主要工作如下：第二节通过一阶线性常系数微分方程的系统响应求解案例具体化研究问题；第三节分析系统起初处于绝对静止状态的隐含假设；第四节讨论系统遵循因果律的隐含假设；第五节基于上述假设，阐明卷积法和单边拉普拉斯变换的实质，通过对比系统响应的时域求解与频域求解方法，印证本文的观点；第六节分析研究结果的启示；第七节总结研究结果对《信号与系统》课程教学的意义。

2. 问题的引出：一阶系统响应求解案例

考虑《信号与系统》课程中的一个典型问题：对于一个连续时间线性时不变系统，其描述方程为

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=2x(t) \tag{1}$$

0^- 时刻的初始状态为 $y(0^-)=1$，输入信号 $x(t)=u(t)$，其中，$u(t)$ 为单位阶跃信号。求解系统的响应。

采用卷积法。卷积法将系统响应分解为零状态响应和零输入响应。

先求零输入响应 $y_{zi}(t)$。根据零输入响应定义，$y_{zi}(t)$ 是式(1)对应的齐次方程的解。不难求得，$y_{zi}(t)=A\mathrm{e}^{-3t}$。将初始状态代入 $y_{zi}(t)$，可求得 $A=1$。所以，$y_{zi}(t)=\mathrm{e}^{-3t}$，$t>0$。这里对时间 t 的限定涉及对初始状态的理解，将在下文详细阐释。

再求零状态响应 $y_{zs}(t)$。先求系统单位冲激响应 $h(t)$，根据系统单位冲激响应定义，$h(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+3h(t)=\delta(t) \tag{2}$$

的解。其中，$\delta(t)$ 为单位冲激信号。由冲激平衡法，求得 $h(t)=2\mathrm{e}^{-3t}u(t)$。由 $x(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积运算，求得 $y_{zs}(t)=\frac{2}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$。这里求解 $h(t)$ 时假定系统为因果系统，这样做的理由将在下文说明。

综上，卷积求解的结果为：

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\begin{cases}\text{未知}, & t<0\\ \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{2}{3}, & t>0\end{cases} \tag{3}$$

卷积法通过分析系统对单位冲激信号的响应，将输入信号响应的求解转化为卷积运算。这种方法的核心在于单位冲激响应在零时刻外满足齐次方程，使得求解过程相对简便。当输入信号变化时，仅需重新计算卷积，而卷积计算可由计算机高效完成[5]。因此，对于线性常系数微分方程系统的响应求解，与经典法相比，卷积法具有显著优势。但卷积法的分解方式的合理性并非在直觉上显然的，而现有教材对此缺乏严谨的论证或证明。下文将通过具体案例，说明卷积法的分解方式与上面两个保留问题密切相关。通过合理解释系统初始状态的成因以及合理选择系统的因果性，卷积法的实质便自然呈现出来。

需要说明，在工程实践中，信号从某一特定时刻开始激励系统，通常为了方便，将该时刻定义为 0 时刻。0^- 时刻的系统初值称为初始状态，0^+ 时刻的系统初值称为初始条件。两者可能相等，也可能不相等。在系统描述和分析中，0^- 和 0^+ 的区分并不关键，真正重要的是如何理解系统初值的物理成因及其带来的影响。类似于观念影响人们对世界的认知，不同的理论框架会带来不同的结论。

3. 初始状态的案例分析与研究

下面构造一个产生初始状态 $y(0^-)=1$ 的具体案例。

在信号 $x(t)$ 之前，即从 $-\infty$ 到 0 这段时间内，有信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ 激励系统。其中，

$f(t)$ 的表达式为：

$$f(t)=\frac{1}{4\mathrm{e}^{-9}}\delta(t+3)$$

由 $f(t)$ 产生的响应为：

$$y_f(t)=f(t)*h(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}u(t+3) \tag{4}$$

由式(4)可知，$f(t)$ 可以产生 0^- 初始状态 $y_f(0^-)=\frac{1}{2}$。

$g(t)$ 的表达式为：

$$g(t)=\frac{3}{2\left(\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}^{-6}\right)}\left[u(t+2)-u(t+1)\right]$$

由 $g(t)$ 产生的响应为：

$$y_g(t)=g(t)*h(t)=\begin{cases}0, & t\le -2\\ \frac{1-\mathrm{e}^{-6}\mathrm{e}^{-3t}}{2\left(\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}^{-6}\right)}, & -2<t\le -1\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}, & t>-1\end{cases} \tag{5}$$

由式(5)可知，$g(t)$可以产生0^-初始状态$y_g(0^-)=\frac{1}{2}$。

根据 LTI 系统的叠加性，可求得：

$$y(0^-)=y_f(0^-)+y_g(0^-)=1$$

第 2 节案例中的零输入响应是$y_f(t)$和$y_g(t)$在$t>0$部分的叠加。

$$y_{zi}(t)=y_f(t)+y_g(t)=\mathrm{e}^{-3t}$$

若从$t=-\infty$时刻开始分析系统的输入输出关系，则系统的完全响应是由$f(t)$、$g(t)$和$x(t)$三个信号分别激励系统所产生响应的叠加。

$$\begin{aligned} y(t) &= y_f(t)+y_g(t)+y_x(t) \\ &= f(t)*h(t)+g(t)*h(t)+x(t)*h(t) \\ &= \begin{cases} 0, & t\le -3 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}, & -3<t\le -2 \\ \frac{1+\left(\mathrm{e}^{-3}-2\mathrm{e}^{-6}\right)\mathrm{e}^{-3t}}{2\left(\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}^{-6}\right)}, & -2<t\le -1 \\ \mathrm{e}^{-3t}, & 1<t\le 0 \\ \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{2}{3}, & t>0 \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

除式(6)外，只要满足条件$\alpha+\beta=2$，信号$\alpha f(t)$与$\beta g(t)$激励系统均可产生非零初始状态$y(0^-)=1$。对于$t<0$的响应，其变化取决于α和β的具体取值，而$t>0$的响应则保持不变。这不禁令人联想到陶潜的名句：“悟已往之不谏，知来者犹可追”。

上述案例隐含一个基本假设：系统起初绝对静止，即$y(-\infty)=0$。这种状态类似于许多创世传说中的描述，如“地是空虚混沌，渊面黑暗”或“天地浑沌如鸡子”。从现代物理学的角度看，“混(浑)沌”意味着熵值极大、极度无序的静止状态。非零初始状态$y(0^-)=1$反映了系统在过往受到输入信号激励后的累积结果。然而，仅凭初始条件，无法推断出系统过去具体的输入信号情况。

4. 因果性的案例分析与研究

从数学角度来看，式(2)的解不唯一，表 1 列出三组典型解及其所对应系统特性。

Table 1. Unit impulse response and system function of the system in eq. (1)
表 1. 式(1)系统的单位冲激响应和系统函数

系统方程	单位冲激响应	系统函数	因果性	稳定性
$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=2x(t)$	$h(t)=2\mathrm{e}^{-3t}u(t)$	$H(s)=\frac{2}{s+3}$, ROC: $\mathrm{Re}(s)>-3$	因果	稳定
	$h(t)=-2\mathrm{e}^{-3t}u(-t)$	$H(s)=\frac{2}{s+3}$, ROC: $\mathrm{Re}(s)<-3$	非因果	不稳定
	$h(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)-\mathrm{e}^{-3t}u(-t)$	不存在	非因果	不稳定

事实上，式(2)有无穷多个解，只要满足 $A_1 - A_2 = 2$， $h(t) = A_1 e^{-3t} u(t) + A_2 e^{-3t} u(-t)$ 即是其解，如图 1 所示。因此，从微分方程本身无法确定系统的因果性。

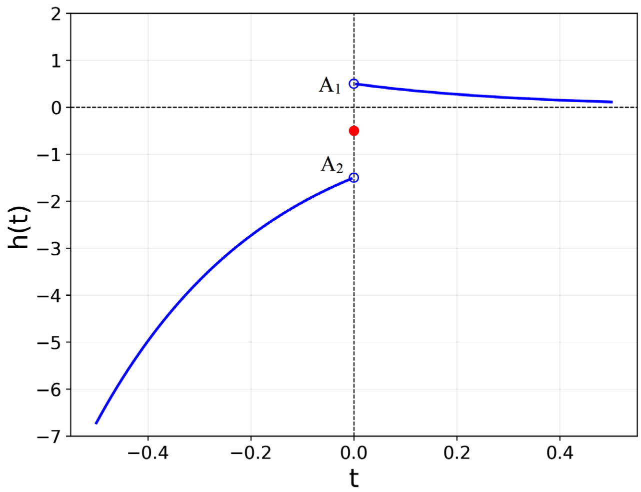

Figure 1. Illustration of the unit impulse response of the system in eq. (1)
图 1. 式(1)系统的单位冲激响应示意图

对此结论，还可以采用另一种更直观的分析方法。由式(1)可知，某一时刻的输出信号 $y(t)$ 与同一时刻的输入信号 $x(t)$ 有关。同时方程中还包含的微分项 $\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$，它表示 $y(t)$ 的变化，反映了前后两个时刻的关系。如果把后一时刻作为“现在”，则输出信号只与当前及过去的输入信号有关，系统是因果的。如果把前一时刻作为“现在”，则输出信号与未来的输入信号有关，系统是非因果的。

但在物理世界中，任何现象的发生都必须有其原因。输出信号的生成通常是响应输入信号的作用，这种响应需要一定时间完成。输出依赖于未来的输入的情况，在物理上是无法实现的(一个系统是因果的，则输出不超前于输入)。实际的物理信号通常在某一时刻之前为零或不存在，是因果信号(一个信号 $x(t)$ 是因果的，当且仅当其满足条件： $x(t) = 0$ 对于所有 $t < 0$)。因此，实际的物理系统遵循因果律，这是系统分析隐含的另一个基本假设。

需要指出，物理世界受到因果律的限制，但思维、意识或理念的世界并不受限于因果律。很多文艺创作正是通过打破因果律的限制而获得奇妙的效果。比如，《百年孤独》著名的开头，“多年以后，面对行刑队，奥里雷亚诺·布恩迪亚上校将会回想起父亲带他去见识冰块的那个遥远的下午”。很多人读到阿根廷诗人安东尼奥·波契亚的诗句“今天将要结束，明天也将结束，难以结束的是昨天”，都曾激起抚今追昔的复杂情感。有一首有名的流行歌曲，名字是“后来”，可是沉浸在歌声里的人，头脑里浮现的全是“从前”。

5. 对卷积法的理解

系统分析隐含的两个基本假设为系统起初绝对静止与系统遵循因果律。以此为出发点，可以建立对于卷积法分解方式的透彻理解，很多系统分析问题可获得大幅简化。

5.1. 时域解释

卷积法本质上体现了 LTI 系统的线性特性。系统的完全响应是从 $t = -\infty$ 时刻开始所有信号独立作用于系统所产生响应的线性叠加。通常，将输入信号 $x(t)$ 开始作用于系统的时刻定义为 0 时刻，假设 0 时刻之前有 n 个信号已作用于系统，记作 $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)$。系统的完全响应可表示为：

$$y(t)=\underbrace{x(t)*h(t)}_{y_{zs}(t)}+\underbrace{f_1(t)*h(t)+f_2(t)*h(t)+\cdots+f_n(t)*h(t)}_{y_{zi}(t)} \tag{7}$$

根据上文定义，$x(t)$是因果信号，即$x(t)=0,t<0$。根据因果律预设，$h(t)$是因果信号，即$h(t)=0,t<0$。由卷积运算的性质可知，$y_{zs}(t)$是因果信号，即$y_{zs}(t)=0,t<0$。因此，$y_{zs}(0^-)=0$。系统初始状态可表示为：

$$y(0^-)=y_{zi}(0^-)=f_1(t)*h(t)+f_2(t)*h(t)+\cdots+f_n(t)*h(t)\big|_{t=0^-} \tag{8}$$

零输入响应是 0 时刻之前的 n 个信号作用于系统所产生响应的线性叠加，系统初始状态是零输入响应在0^-时刻的取值。但如第 3 节的案例所示，初始状态能够决定零输入响应的未来行为，但无法推断其过去形式。

5.2. 频域解释

第 3 节中的系统响应问题也可以采用频域方法求解，使用的工具是拉普拉斯变换。通过分析求解过程可知，频域方法以上述两个基本假设为前提条件。

拉普拉斯变换可以求解带有初始状态的线性常系数微分方程式，特别是非齐次项是分段连续函数或冲激函数的情况。求解的流程如图 2 所示，微分方程在拉普拉斯变换下转换为代数方程，利用代数运算求解代数方程后，再利用反变换得到原微分方程的解。

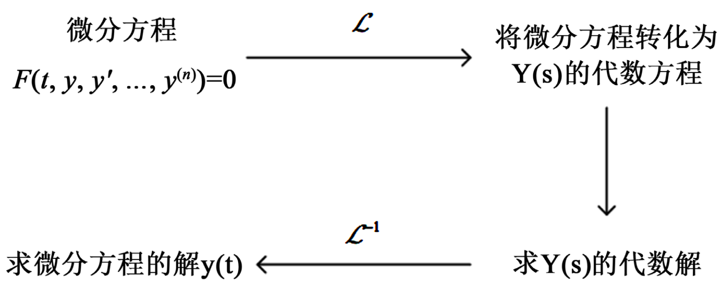

Figure 2. Workflow for solving differential equations via the Laplace transform
图 2. 拉普拉斯变换求解微分方程的流程

仍以式(1)系统为例，对方程两边做单边拉普拉斯变换，可得：

$$sY(s)-y(0^-)+3Y(s)=2X(s) \tag{9}$$

对式(9)变形整理，可得：

$$\begin{aligned} Y(s)&=\frac{2}{s+3}X(s)+\frac{y(0^-)}{s+3} \\ &=Y_{zs}(s)+Y_{zi}(s) \end{aligned} \tag{10}$$

其中，$Y_{zs}(s)$是零状态响应$y_{zs}(t)$的拉普拉斯变换，$Y_{zi}(s)$是零输入响应$y_{zi}(t)$的拉普拉斯变换。$x(t)$的拉普拉斯变换$X(s)=\frac{1}{s}$，$\mathrm{ROC}:\mathrm{Re}(s)>0$。代入到式(10)，由拉普拉斯反变换得到结果与式(3)相同。

在求解过程中，要求系统函数$H(s)=\frac{2}{s+3}$的收敛域为$\mathrm{Re}(s)>-3$，从而隐含系统的因果性。单边拉普拉斯变换实际上是对因果信号(一种特殊的右边信号)的拉普拉斯变换。根据第 3 节的分析，输出信号$y(t)$在$t<0$的部分是无法确定的(且通常不予关注)，因此，不妨将其设定为 0，使得$y(t)$成为因果信号。

综上，线性常系数微分方程的复频域求解方法以信号与系统的因果性为前提，在此前提下，拉普拉斯变换自然简化为单边变换。单边拉普拉斯变换实际上是一种特殊形式，而非独立的概念。这不禁令人联想到《金刚经》中著名的三段论，即“佛说……即非……是名……”。

6. 讨论与启示

6.1. 研究方法启示

线性常系数微分方程系统是某些真实物理系统(如机械系统、电路系统)的数学抽象。初始状态反映了系统在外部信号施加之前已储存的能量，例如机械系统中的压缩弹簧或电路系统中的带电电容器，这些能量来源于更早的外部作用。系统响应的求解不仅是数学方程的计算，还需结合物理背景，否则可能导致结果与实际情况不符。这一过程与文学艺术创作类似——源于生活，高于生活，最终仍需回归生活。

6.2. 课程思政启示

初始状态反映了系统的历史。但更多的时候，我们的目标不是抚今追昔，而是继往开来。因此，我们更关注系统未来的行为，而非历史细节。一个设计合理的系统应能消除初始状态的长期影响。对于线性常系数微分方程系统而言，这种设计的核心在于系统的稳定性。更进一步，对于更复杂的社会系统，良好的设计应体现在公平与公正的机制上，使个人的成长和发展更多依赖于才能与努力等输入，而非出身或背景等初始状态。

6.3. 教学方法启示

1) 教学中的“厚”与“薄”。在《信号与系统》课程中，零状态响应的概念和单边拉普拉斯变换方法对于理解信号表示与系统描述的基本思想和分析方法具有重要意义。然而，深入思考可以发现，这些内容实际上是更基本概念或方法的自然推论。教学的核心任务是引导学生深入思考，挖掘并掌握更为根本的内容。正如数学家华罗庚所言，“读书要先由厚变薄，再由薄变厚”。这一原则同样适用于课程教学，其中“薄”代表课程的核心与精华，“厚”则是中间的概念或方法，虽非最终目标，却是不可或缺的学习桥梁，为学生提供了循序渐进的学习路径。类似于声闻、缘觉是进入菩萨乘的准备，尽管属于权宜之法，却是大多数人必经之路。通过丰富和完善这些中间内容，教学可以不断优化与创新。例如，设计引人入胜的案例或提供深入浅出的解释，不仅能够激发学生兴趣，还能帮助其更深入地理解知识体系。

2) 构造优于验证。本文采用构造性方法研究卷积法，相较于验证性方法，该方法提供了更简洁且深刻的视角。一般而言，在教学过程中，构造性的方法相较于验证性的方法具有更高的教学价值。构造性方法不仅能够帮助学生理解问题的内在结构，还能引导他们主动思考解题的过程，从而深化对知识的掌握。而验证性方法则通常局限于对已有结果的确认，难以激发学生的思维潜力。因此，在教学中，鼓励学生通过构造性方法来探索和解决问题，不仅能提升其分析和推理能力，还能促进对理论知识的深刻理解。

3) 类比法的运用。近代数学先驱欧拉说：“类比是伟大的引路人”。在概念学习过程中，如果能够找到一个具体的、生活化的例子，或者与已掌握的概念建立对应关系，就不必死记硬背新概念。例子越生活化、对应关系越贴切，学习者就能在直觉上更容易理解新概念，这种基于理解形成的记忆不仅速度快，而且更牢靠[6]。上述研究中多次运用了类比法。例如，卷积的表达式往往让学生感到陌生和困惑，这也成为教学的难点之一。通过类比可以有效化解这个难点：卷积运算之于信号，就像加法或乘法运算之于数字，卷积与加法、乘法一样，满足交换律和结合律，意味着可以按照任意顺序进行卷积计算。而单位冲激信号在卷积运算中的作用，类似于加法中的 0 或乘法中的 1，作为卷积运算的单位元。通过这种

类比，这三个性质自然而然地浮现出来，学习者无需刻意记忆。这些核心性质是卷积运算的基础，其他性质可以较容易地由这三个性质推导出来，对卷积性质的学习由此变得更加清晰。

7. 结束语

本文通过具体案例，探讨了《信号与系统》课程中因果概念的内涵与外延，主要结论如下：

1) 系统分析中隐含的两个预设条件为系统起初绝对静止和因果律。基于此，可以证明卷积法本质上是 LTI 系统的线性叠加性质，而单边拉普拉斯变换实质上是因果信号的拉普拉斯变换。

2) 线性常系数微分方程系统的物理基础而非数学形式，决定了其适用于因果系统。

3) 初始状态仅能反映系统对过去信号激励的响应结果，但无法确定过去响应的具体形式。

以上结论为现有教材内容提供了有益补充，同时对科学思维方法的培养及课程思政教学具有启发意义。同时，本文所采用的类比、反例、启发式构造、跨学科综合等方法应在《信号与系统》课程教学中得到同等重视。科学的本质不仅在于最终的结果，更在于思维方法，它为打开更丰富的知识宝库提供了钥匙。

需要指出，本文以一阶线性常系数微分方程系统为例，主要是出于计算简便的考虑。相关概念、方法及结论同样适用于高阶线性常系数微分方程系统。

基金项目

广东省普通高校青年创新人才类项目(2019KQNCX013)；2024 年华南农业大学质量工程项目“电子信息工程专业课程教研室”；2017 年国家级产学合作协同育人项目“信号与系统”。

参考文献

[1] Oppenheim, A.V., Willsky, A.S. and Nawab, S.H. 信号与系统[M]. 刘树棠, 译. 第 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2013.

[2] Lathi, B.P. 线性系统与信号[M]. 刘树棠, 王薇洁, 译. 第 2 版. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.

[3] 郑君里, 应启珩, 杨为理. 信号与系统[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[4] 吴大正. 信号与线性系统分析[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2005.

[5] Roberts, M.J. (2018) Signals and Systems: Analysis Using Transform Methods and MATLAB®. 3rd Edition, McGraw-Hill, New York.

[6] Polya, G. (1990) How to Solve It. 2nd Edition, Penguin UK, London.