Advances in Education 教育进展, 2025, 15(3), 609-616
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2025.153446

基于APOS理论的高中数学教学案例

——以余弦定理为例

冯宇程，杜　雯

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北　黄冈

收稿日期：2025年2月13日；录用日期：2025年3月12日；发布日期：2025年3月19日

摘　要

APOS理论是一种数学教育理论，强调通过操作、过程、对象和图式四个阶段促进学生的数学概念建构。余弦定理作为高中数学的核心内容，具有深刻的数学内涵和丰富的物理背景，是数形结合的良好载体和有效的解题工具。本研究以高中数学“余弦定理”相关内容为研究对象，采用文献研究法和案例分析法对APOS理论的来源、内涵与特点进行分析，结合余弦定理的教材内容与《普通高中数学课程标准(2017版)》解读，分析以APOS理论为指导的高中数学教学案例，提出余弦定理的教学策略和具体的教学设计案例。

关键词

教学案例，APOS理论，余弦定理

High School Mathematics Teaching Case Based on APOS Theory

—Taking “Cosine Theorem” as an Example

Yucheng Feng, Wen Du

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Feb. 13th, 2025; accepted: Mar. 12th, 2025; published: Mar. 19th, 2025

Abstract

APOS theory is a kind of mathematics education theory, which emphasizes the promotion of students’ mathematical concept construction through the four stages of operation, process, object and schema. As the core content of high school mathematics, cosine theorem has profound mathematical

文章引用: 冯宇程, 杜雯. 基于 APOS 理论的高中数学教学案例[J]. 教育进展, 2025, 15(3): 609-616.
DOI: 10.12677/ae.2025.153446

connotation and rich physical background. It is a good carrier and effective problem-solving tool for the combination of number and shape. This study takes the relevant content of high school mathematics "cosine theorem" as the research object, uses literature research method and case analysis method to analyze the source, connotation and characteristics of APOS theory, combines the textbook content of cosine theorem with the interpretation of "Ordinary High School Mathematics Curriculum Standard (2017 Edition)", analyzes the high school mathematics teaching cases guided by APOS theory, and puts forward the teaching strategies and specific teaching design cases of cosine theorem.

Keywords

Teaching Cases, APOS Theory, Cosine Theorem

1. 引言

余弦定理作为高中数学的核心内容之一，不仅具有深刻的数学内涵和丰富的物理背景，更是数形结合的典型载体，在解决几何与三角问题中发挥着重要作用。然而，在实际教学中，由于余弦定理内容抽象、逻辑性强，学生往往难以理解其本质属性，导致学习效果不理想。如何突破传统教学模式的局限，帮助学生更好地掌握余弦定理，成为高中数学教育亟待解决的问题。近年来，APOS 理论作为一种基于建构主义的数学学习理论，为数学概念的教学提供了新的视角和方法。该理论通过操作、过程、对象和图式四个认知阶段，引导学生从具体操作逐步过渡到抽象理解，为数学教学注入了新的活力。因此，本研究以余弦定理为例，探讨基于 APOS 理论的高中数学教学模式，旨在通过理论分析与案例研究，提出切实可行的教学策略，为改善学生的学习效果提供理论支持和实践参考。

2. Dubinsky 的 APOS 理论

2.1. APOS 理论的来源

APOS 理论由美国数学教育家杜宾斯基(Dubinsky)于 20 世纪 80 年代提出，其理论基础源于皮亚杰的建构主义思想。该理论旨在解释学生如何通过动态的认知活动逐步建构数学概念，强调数学学习是从具体操作到抽象理解的递进过程。

2.2. APOS 理论的内涵

APOS 理论是由四个英文单词的首字母组合而成，这四个字母分别是 action (活动)、process (过程)、object (对象)、schema (图式)，这也就是 APOS 理论的四个阶段。杜宾斯基指出：学生在学习某一数学概念时，要经历以上四个阶段才能够深刻理解数学概念。

APOS 理论以四个认知阶段为核心：

1) 操作(Action)：学生通过具体活动(如计算、作图)感知数学对象，形成初步经验。

2) 过程(Process)：将操作内化为心理过程，能够在思维中独立执行相关运算或推理。

3) 对象(Object)：将过程抽象为独立的数学对象，可对其进行整体分析和操作(如函数作为独立实体)。

4) 图式(Schema)：整合多个对象及其关系，形成系统化的知识网络，实现高阶应用与迁移。

2.3. APOS 理论的特点

APOS 理论通过分阶段引导学生的认知发展，为数学教育研究与实践提供了重要的理论支持。

1) 阶段性：强调从“具体操作”到“抽象图式”的渐进式认知发展。
2) 建构性：以学生主动建构为核心，反对机械记忆。
3) 实践性：为教学设计提供框架，帮助教师设计符合认知规律的教学活动。
4) 普适性：适用于代数、几何等多种数学内容的教学，尤其利于解决抽象概念的教学难题。

2.4. APOS 理论应用于数学教学的重要意义

APOS 理论是杜宾斯基提出的一种数学学习理论，其基本假设是：数学知识是学生在解决所感知的数学问题的过程中获得的。学生学习数学概念会经过“活动”“过程”“对象”这三个阶段，最后形成认知“图式”，在这个过程中学生学到的不只是知识本身的定义，更能体会到知识的形成过程，理解数学知识的本质。并用以解决实际问题[1]。

与“概念同化、顺应”等教学模式相比，该理论更加强调学生自主探索与思维活动在数学概念学习中的重要性。在该理论的指导下，学习者在学习中将不再是知识“接受者”，反而跻身成为知识“探索者”。在经历这样一个转变之后，学生将会深刻地理解数学概念。这与《普通高中数学课程标准(2017 版)》中提倡的“创设合适的情境，启发学生思考，引导学生把握数学教学内容的本质”十分契合。

因此，在余弦定理教学中应用 APOS 理论是具有理论意义的。

3. APOS 理论下的余弦定理教学设计案例

3.1. 教学内容分析

余弦定理是普通高中教科书(人教 A 版)必修第二册第六章第四节第三课时的内容，余弦定理是三角形的边角关系量化的体现。从知识结构上看，余弦定理是勾股定理内容的直接延拓，同时余弦定理的推导一方面体现了向量加法、减法数量积运算在解三角形中的应用，另一方面其也为下一课时正弦定理的推导做了铺垫，因此余弦定理这节课在知识结构上起着承上启下的作用[2]。

本研究改变了传统的证明方法，利用向量的数量积来推导余弦定理。在利用数量积证明余弦定理的过程中，体会向量工具在解三角形的度量问题中的作用，余弦定理为解三角形提供了基本方法，为后续解决测量问题、判断三角形形状、证明三角形有关的等式与不等式提供了理论基础和操作工具，让学生进一步认识和体会数学知识之间的普遍联系与辨证统一(三角函数、向量、三角形)。

3.2. 教学对象分析

本节课主要的学习任务是余弦定理的推导与应用，其中对于余弦定理的推导在课上主要以“向量法”为主要推导方法，对于这一学习任务，学生已有的知识基础、已经具备的逻辑推理能力，使其能够较顺利的完成这一过程在此基础上探求余弦定理，会激发学生的探究兴趣；对于余弦定理的应用，由于此阶段学生的应用知识解决问题的能力水平有限，因此，对于学生来讲，这具有一定的难度。这要求教师要合理的设疑，正确的引导学生通过计算－归纳－推理余弦定理，培养学生发现问题、探索问题、解决问题的能力，养成良好的思考习惯。

3.3. 教学目标

总体目标：通过向量运算研究三角形边长与角度的内在联系，理解并掌握余弦定理，提升逻辑推理与数学运算能力；能够运用余弦定理解决实际问题，培养数学建模素养。

具体目标：

操作阶段：认识余弦定理的实际背景，理解其量化三角形边角关系的意义。

过程阶段：从实际问题中抽象出 ΔABC，建立边角对应关系；运用向量方法推导余弦定理；概括余弦定理及解三角形的定义，掌握其推论。

对象阶段：区分余弦定理与勾股定理的异同；明确余弦定理适用的解三角形问题类型。

图式阶段：理解余弦定理在《平面向量》章节中的定位；总结本节课的数学知识、思想方法及学习收获，反思学习中的疑问；能够综合运用余弦定理解决实际问题或数学问题，并与其他知识相结合。

3.4. 教学重、难点

教学重点：用向量方法推导余弦定理，余弦定理的应用。

教学难点：余弦定理的证明、应用。

3.5. 教学方法

讲授法、问答法、讨论法、发现法、练习法。

3.6. 教学过程

3.6.1. 操作阶段——创设情境，类比探究

问题 1　如图 1 所示，修建铁路时要在山体上开挖一条隧道，需要测得隧道口 A，B 之间的距离，因无法直接测量，测量人员在山的一侧选取点 C 测得 CA，CB 以及 $\angle ACB$，能否由此得到 A，B 的距离[3] [4]？

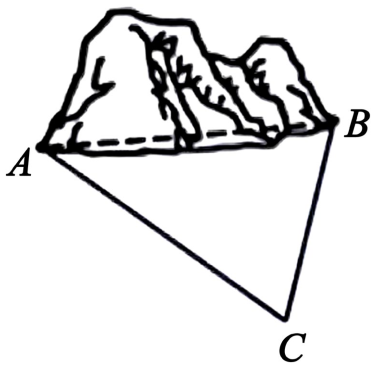

Figure 1. Instructional design illustrations
图 1. 教学设计插图

师：引导学生将实际问题转化为数学问题，这个问题可转化为：已知三角形两边及其夹角，能否确定第三边？同学们说到两边及其夹角我们不难想到全等三角形的“边角边”定理，那你们能回忆起初中学过的全等三角形“边角边”定理吗？

生：回答“边角边”定理，即：两个三角形的两组对应边相等且它们的夹角相等，那么这两个三角形全等。

【设计意图】利用隧道问题激发学生求知欲，通过复习回顾，唤醒学生对“两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等”这样的定性结论的记忆，同时启发学生思考三角形的边角之间有怎样的定量关系，以此引导学生由定性研究上升到定量研究。将实际问题数学化并回忆全等三角形边角边定理方便进行新旧知识的衔接，减小学生的学习难度，淡化学生对新知识的陌生感，为引入新课做准备。

DOI: 10.12677/ae.2025.153446

3.6.2. 过程阶段——活动引导，形成新知

问题 2　如图 2 在三角形 ABC 中，已知 a，b，$\angle C$，如何表示 c？

师：若已知角为直角即角 C 为 90 度你能求解出 c 边吗？

生：可利用勾股定理当 $\angle C = 90^\circ$ 时，$c^2 = a^2 + b^2$ 求解

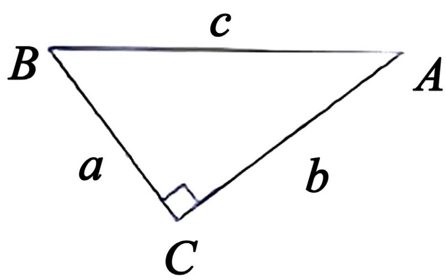

Figure 2. Instructional design illustrations
图 2. 教学设计插图

【设计意图】通过具体情境的分析，让学生从特殊问题中找出解决问题的方法，为一般情况的探究做好铺垫，引导学生从特殊到一般。

启示：引导学生从求第三边 c 转换到求第三边 c 的平方。

【设计意图】将几何问题转化成向量问题。

师：不知道大家有没有想起到前面我们学习过的向量的数量积，并且我们知道向量由于有了运算使得它在解决几何问题中有着相当强大的威力，所以我们今天尝试用向量法来解决这个问题[5]。

师：我们一起来回顾一下向量法解决几何问题的三步曲。

生：第一步向量表示、第二步向量运算、第三步几何翻译。

师：大家都很棒！现在第一步我们来把几何问题翻译成向量问题。

生：设 $\boldsymbol{CB} = \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$。

师：向量表示完了，下一步我们需要运算，我们需要的是 c^2，也就是向量 $\boldsymbol{AB}$ 模的平方，也就是向量 $\boldsymbol{AB}$ 的平方。那很自然我们可以对式子展开。

生：展开式子是这样的 $\boldsymbol{AB}^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$。

师：接下来我们进行最后一步几何翻译，用三角形的边和角表示，大家试着写一下。

生：写出来为 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$。

问题 3　接下来老师想问一下大家如果是在三角形 ABC 中，已知 a，c，$\angle B$，如何表示 b^2？在三角形 ABC 中，已知 b，c，$\angle A$，如何表示 a^2 [6]？

生：像刚刚那样再推导一遍。

师：大家说的没错，不过我们还有第二种思路，因为三角形的三条边与三个角地位是对等的，所以我们只需将字母换一下即可得到所学的结论。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

【设计意图】以上两个问题的设计，对于学生的思维发展具有很强推动作用。其中问题 2 是用于启发学生利用向量将已知与所求之间建立联系，为学生提供证明思路，降低学生的思考难度；问题 3 在于引导学生顺利完成证明过程，起到提示作用，帮助学生突破证明难点。通过这样的两个问题串的设计，学生完成的不仅是定理的证明，更完成了解题思维的突破，真正做到了触类旁通。

3.6.3. 对象阶段——意义建构，理解新知

这三个式子都体现了三角形三边以及其中一个内角的余弦之间的关系，被我们称为余弦定理：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

文字语言：三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍。

【设计意图】由学生来归纳余弦定理的文字定义，能进一步考查学生对知识的掌握情况，同时，能够锻炼学生用数学语言表达世界的能力。

探究：好，介绍完这个定理，那这个定理可以帮助我们解决什么样的问题呢？

师：首先这个定理能帮助我们解决最开始的隧道问题，已知两边和夹角可以求得第三边，它也定量的刻画了我们的“SAS”定理，即利用余弦定理，可以从三角形已知两边及其夹角直接求出第三边。

问题 4　除了“SAS”，余弦定理还能定量刻画全等三角形的哪种判定定理？

师：我们再来看这个式子，式子中涉及三角形的三边以及其中一个夹角的余弦，如果我们已知三角形的三边我们是否可以把夹角的余弦表示出来呢？

生：只要做一下适当的变形就可以得到：

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

师：很棒！这个就是我们余弦定理的推论，它也定量的解决了我们“SSS”定理的问题，告诉我们在三角形三边确定的情况下我们可以具体的计算出它三个内角的值。

【设计意图】探究问题的设计，意在加深学生对余弦定理的理解，使学生全面的认识余弦定理。通过观察式子结构，探讨余弦定理的推论，及时对所学知识进行巩固和强化。

3.6.4. 学以致用，知识升华

例 1　在 ΔABC 中，已知 $b = 3$，$c = 2\sqrt{3}$，$A = 30^\circ$，求 a。

生：利用余弦定理，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 9 + 12 - 2\times3\times2\sqrt{3}\cos30^\circ = 3$，得 $a = \sqrt{3}$。

例 2　已知 $a = 3$，$b = 4$，$c = 6$，求 A。

生：由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$，所以 $9 = 16 + 36 - 2\times4\times6\cos A$，故 $\cos A = \frac{43}{48}$。

师：我们能直接求 $\cos A$ 吗？

生：可以的，将余弦定理进行变形，整理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$。

师：A 的值唯一吗？为什么？

生：唯一，因为 $y = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减。(此时生成余弦定理的推论)

【设计意图】通过课堂练习，学生在教师的指导下进行有针对性的强化训练，加深对知识的理解和记忆。

3.6.5. 图式阶段——回顾反思，构建图式

回顾 1：引导学生回顾余弦定理及其推论的内容，说说你对“余弦定理”与边角边(SAS)之间关系的理解。

回顾 2：回顾本节课的探究路径，谈谈余弦定理在平面向量体系中的地位。

回顾 3：回顾本节课所用到的数学思想方法。引导学生总结本节课用到的主要数学思想方法：由特殊到一般的归纳、类比思想以及转化与化归思想。

回顾 4：引导学生总结发现，通过本节课的学习，经历用数学的眼光观察现实世界、用数学的思维思考实际问题、用数学的语言表达生活现象的过程，提升数学建模、数学运算、逻辑推理等核心素养，不仅收获了数学知识和数学方法，更收获了分析问题和解决问题的能力。

反思：本节课你学会了哪些知识；对哪些知识存在疑问；思考利用余弦定理可以继续探究哪些问题。

【设计意图】课堂小结由回顾与反思两部分构成，回顾部分主要是对本节课的知识、学习方法、数学思想方法进行总结；反思环节是对学生的学习效果进行总结，进一步加速学生头脑中图式的形成。本节课我们主要借助向量这个有用的工具，证明并学习了余弦定理。

4. 研究结论与展望

4.1. 研究结论

(1) APOS 理论的有效性：APOS 理论为余弦定理的教学提供了清晰的认知框架，通过操作、过程、对象和图式四个阶段的递进设计，帮助学生逐步从具体操作过渡到抽象理解，显著提升了学生对余弦定理本质属性的掌握。

(2) 教学策略的优化：

操作阶段：学生通过具体的几何作图、几何图形测量、计算，直观感知三角形边角关系等具体活动，丰富了学生的感性经验，为后续抽象概念奠定基础。

过程阶段：在推导余弦定理时，采用问题驱动的方式，学生经历从特殊到一般的归纳过程，引导学生从具体操作中提炼出余弦定理的数学表达，促进思维内化。

对象阶段：通过例题训练和变式练习，学生将余弦定理视为一个数学对象，灵活运用其解决各类三角形问题。

图式阶段：通过知识整合与迁移，学生能够将余弦定理与勾股定理、向量等知识联系起来，形成系统的知识网络。

(3) 学习效果的提升：基于 APOS 理论的教学设计有效降低了学生对余弦定理的认知难度，提高了学习兴趣和解题能力，尤其在解决复杂几何问题时表现出更强的灵活性和创造性。

(4) 教学效果显著：相比传统教学，APOS 理论指导下的教学使学生课堂参与度更高，学习积极性显著增强。学生在自主探究、小组合作中，不仅掌握知识，还锻炼合作交流、问题解决能力，成绩有明显提升。

4.2. 研究不足与展望

4.2.1. 研究不足

教学案例的设计和实施主要针对特定学生群体，未充分考虑不同地区、学校和学生个体差异的影响。

4.2.2. 未来研究方向

跨学科应用：探索 APOS 理论在其他数学内容(如三角函数、向量)以及物理、化学等学科中的应用价值。

技术支持：结合信息技术(如动态几何软件、虚拟实验平台)，设计更具互动性和直观性的教学活动，进一步提升学生的学习体验。

教师培训：加强对高中数学教师的 APOS 理论培训，帮助其掌握基于该理论的教学设计方法，推动理论在实践中的广泛应用。

总之，基于 APOS 理论的余弦定理教学研究为高中数学教学提供了新的思路和方法，但仍需进一步探索和完善，以更好地服务于数学教育的改革与发展。

5. 结语

本研究以 APOS 理论为指导，以余弦定理为例，探讨了高中数学教学模式的优化路径。通过理论分析与案例研究，提出了基于 APOS 理论的教学策略，包括操作阶段的具体活动设计、过程阶段的问题驱动引导、对象阶段的例题与变式训练以及图式阶段的知识整合与迁移。研究结果表明，APOS 理论能够有效降低学生对余弦定理的认知难度，提升其学习兴趣与解题能力，为高中数学教学提供了新的思路和方法。希望本研究能为高中数学教育的改革与发展提供有益的参考，推动数学教学质量的不断提升。

参考文献

[1] 贾明霞. 基于 HPM 视角的正弦、余弦定理教学设计研究[D]: [硕士学位论文]. 扬州: 扬州大学, 2024.

[2] 王雪. 基于 APOS 理论的平面向量教学研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨师范大学, 2021.

[3] 刘禹靖. 基于波利亚解题理论的平面向量教学研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨师范大学, 2023.

[4] 苗瑛琦. 数学文化在数学教学中的渗透——以“余弦定理”教学为例[J]. 高中数学教与学, 2024(6): 34-36.

[5] 童波. 利用向量法, 巧解三角形——以“正(余)弦定理”教学为例[J]. 数学教学通讯, 2022(30): 71-73.

[6] 张晓丹. 基于发展学生高阶思维的高中数学探究教学设计思考——以“余弦定理”为例[J]. 中学数学月刊, 2024(8): 41-43+48.