

借探究式教学深度融合，铸就逻辑思维能力提升

——以“第二个重要极限”为例

乔琪

苏州科技大学数学科学学院，江苏 苏州

收稿日期：2025年3月22日；录用日期：2025年4月22日；发布日期：2025年4月29日

摘要

本文聚焦于高等数学中第二个重要极限的教学，深入探讨其在培养学生数学逻辑思维与应用能力方面的重要作用。通过对第二个重要极限的概念引入、理论推导、题型解析以及实际应用的教学过程分析，阐述如何引导学生掌握知识、提升逻辑思维能力，并将数学知识运用到实际问题解决中。同时，结合教学实践中的反馈，提出优化教学策略，旨在为高等数学教学提供有益参考，促进学生数学素养的全面提升。

关键词

第二个重要极限，逻辑思维，应用能力，教学策略

Through the In-Depth Integration of Inquiry-Based Teaching, the Logical Thinking Ability Is Enhanced

—Taking “the Second Important Limit” as an Example

Qi Qiao

School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: Mar. 22nd, 2025; accepted: Apr. 22nd, 2025; published: Apr. 29th, 2025

Abstract

This paper focuses on the teaching of the second important limit in higher mathematics, and explores in depth its important role in cultivating students' mathematical logical thinking and

application abilities. Through the introduction of the concept of the second important limit, theoretical derivation, analysis of question types, and analysis of the teaching process of practical application, this paper elaborates on how to guide students to master knowledge, enhance logical thinking ability, and apply mathematical knowledge to solve practical problems. At the same time, based on feedback from teaching practice, optimization teaching strategies are proposed, aiming to provide useful references for higher mathematics teaching and promote the comprehensive improvement of students' mathematical literacy.

Keywords

The Second Important Limit, Logical Thinking, Application Ability, Teaching Strategy

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在高等数学的知识体系中，极限理论是微积分学的基石，对学生构建数学知识大厦起着关键作用。而第二个重要极限作为极限理论的核心内容之一，不仅在数学分析、函数求导等理论领域有着广泛应用，还在自然科学、工程技术、经济金融等多个实际领域发挥着重要作用[1]。深入探究其教学过程，对于培养学生的数学逻辑思维、提升学生运用数学知识解决实际问题的能力，进而提高高等数学教学质量具有重要意义。通过有效的教学活动，注重以人为本，引导学生理解第二个重要极限的本质，掌握其应用技巧，能够为学生后续学习高等数学及相关学科奠定坚实基础，同时也有助于培养学生的逻辑思维，创新思维和实践能力，增强数学的应用意识[2]-[5]。

2. 教学活动设计与实施

2.1. 创设情境：激发探索欲望

教师借助多媒体展示复利计算的相关表格，呈现不同结算周期(每年、半年、每月、每日)下，本金为1万元、还款期限为1年，不同利率(100%、1/2、1/12、1/365)下时，对应的利息和结算额度变化情况。向学生提出问题：“随着结算周期不断缩短，结算次数不断增加，最终的本息和会变成无穷多吗？”学生通过计算和讨论得到结论。接着提出问题

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = ?$$

引出本节课要研究的内容。

设计意图：创设贴近生活的复利计算情境，能够有效激发学生的学习兴趣 and 好奇心，让学生在熟悉的经济场景中感受到数学的实用性。通过计算和讨论，培养学生的自主探索精神，让学生在实践中初步感知极限的概念，为后续引入第二个重要极限的研究奠定基础。同时让学生亲身体验从实际问题抽象出数学模型的过程，培养学生的数学建模能力。

2.2. 借助图像，深化概念认知

教师运用数值模拟，在大屏幕上展示函数 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的散点图。引导学生观察图像中随着取值 n 的不断

变化, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 值的变化情况。向学生提问: “从图像上看, 当 n 越来越大时, 函数值有什么变化趋势?”

鼓励学生积极发言, 分享自己观察到的函数性质, 如函数的单调性、是否存在极值、函数值的变化范围等。其他学生可针对分享内容进行补充和提问, 教师对学生的分享和讨论进行总结与点评, 引导学生从多个角度深入理解函数图像所反映的极限概念, 得到猜想 “数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调递增并且有界, 极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在!”。

设计意图: 在观察数据和图形变化的过程中, 锻炼学生的观察能力和归纳能力, 引导学生初步猜测 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的存在性, 为后续深入探究奠定感性认识基础。

2.3. 合作探究, 培养逻辑思维

教师通过分析, 引导学生思考如何证明数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调递增。首先回顾均值不等式的内容和应用条件, 然后逐步展示如何利用均值不等式构造式子来证明数列单调递增。令 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1$, 根据均值不等式有

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}$$

化简可得 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, 即 $x_n < x_{n+1}$, 从而证明数列 $\{x_n\}$ 单调递增。

接着, 教师引导学生证明数列 $\{x_n\}$ 有界。通过对 x_n 进行展开, 并借助均值不等式进行放缩, 得到

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 4 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < 4 \left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} \right] < 4,$$

即数列 $\{x_n\}$ 有界。根据单调有界原理, 得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在。强调证明过程中的重点和难点, 加深学生对理论推导的理解。

教师介绍早在 1683 年瑞士数学家伯努利就对此数列进行了研究, 直到 1728 年瑞士数学家欧拉才证明该数列的极限为无理数, 记为 e , 从而引出第二个重要极限。

设计意图: 在理论推导过程中, 培养学生逻辑推理能力和严谨的数学思维。加深学生对知识的理解和综合运用能力。了解第二个重要极限的历史背景, 有助于学生更好地将其融入到自己的知识框架中, 构建更加系统、完整的数学知识体系。

2.4. 实践拓展, 强化应用意识

教师引导学生对第二个重要极限的初始型 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 进行拓展, 推导出一般形式 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

和 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ，以及复合形式

$$\lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} (1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$$

通过具体的函数实例，判断这些实例是否属于第二个重要极限的类型，并进行计算。教师与学生总结解题步骤：首先判断极限类型，确定是否为“ 1^∞ ”型，然后通过凑倒数等方法，将函数变形为符合第二个重要极限的形式，最后运用公式得出结果。学生进行课堂练习，教师巡视指导，及时反馈学生的练习情况。

设计意图：帮助学生全面理解第二个重要极限的多种形式，掌握其变化规律，提高学生对公式的识别和应用能力。通过实例讲解和练习，让学生在实践中巩固所学知识，进一步培养学生的逻辑思维能力和运算能力。

2.5. 课堂小结，巩固知识体系

教师引导学生回顾本节课的主要内容，包括第二个重要极限的引入背景、公式的推导过程、公式的多种形式及其应用方法。请学生分享在探究过程中的收获和体会，以及在运用公式解题时的注意事项。教师对学生的分享进行总结和补充，强调第二个重要极限在数学学习和实际生活中的重要性，鼓励学生在未来的学习中继续运用探究式学习方法，深入探索数学知识。

设计意图：通过总结归纳，帮助学生梳理知识体系，加深对本节课重点内容的记忆和理解。让学生分享收获和体会，培养学生的反思能力和表达能力，同时也能让教师了解学生的学习情况，为后续教学提供参考。鼓励学生运用探究式学习方法，有助于培养学生的自主学习能力和创新精神。

3. 逻辑思维能力的培养与体现

在教学过程中，对学生逻辑思维能力的培养体现在以下三个关键方面。

3.1. 归纳推理与知识构建

学生通过数值模拟、观察散点图，尝试归纳出一般性规律并猜测极限存在性，这一过程锻炼了从特殊到一般的归纳能力，为后续证明提供方向。在证明过程中，利用均值不等式证明数列单调性、有界性，以及在公式拓展应用中类比推理得出新形式，都强化了逻辑推理能力，帮助学生构建起严谨的知识体系。

3.2. 转化思维与问题解决

面对函数极限计算问题，学生需要运用凑倒数、等价变形等方法，将复杂函数表达式转化为符合第二个重要极限的标准形式，把未知问题转化为已知问题求解。这种转化与化归的思维方式是数学逻辑思维的核心，经过反复训练，能显著提升学生思维的灵活性与敏捷性，使其更好地应对各类数学问题。

3.3. 反思质疑与思维优化

在整个探究过程中，学生需要对自己的猜想和推导过程进行反思与质疑，比如在证明数列有界性时思考放缩的合理性。这有助于学生发现思维漏洞，培养批判性思维。

4. 教学反思

在“第二个重要极限”的探究式教学过程中，学生的参与度较高，通过实际操作、小组讨论和理论推导等活动，对知识的理解更加深入，逻辑思维能力得到了有效的锻炼。然而，教学过程中也存在一些

不足之处。部分学生在理解均值不等式证明数列单调性的过程中仍存在困难，需要在今后的教学中加强引导和个别辅导。此外，在教学时间的把控上还可以更加精准，确保各个教学环节能够更加紧凑、高效地进行。

在今后的教学中，教师应继续优化探究式教学方法，根据学生的实际情况设计更加合理的教学活动。加强对数学逻辑思维的指导，针对学生的薄弱环节进行有针对性的训练。同时，进一步挖掘数学知识与实际生活的联系，让学生在更多的实际情境中运用数学知识解决问题，不断提升学生的数学素养和逻辑思维能力。

5. 结语

将探究式教学深度融合于“第二个重要极限”的教学中，为学生提供了一个主动探索、积极思考的学习环境。通过一系列精心设计的教学活动，学生不仅掌握了重要的数学知识和技能，更在探究过程中实现了逻辑思维能力的全面提升。这种教学模式符合现代教育理念，能够培养学生的自主学习能力、创新精神和实践能力，为学生的未来发展奠定坚实的基础。在今后的数学教学中，应进一步推广和完善探究式教学方法，让更多的学生在数学学习中受益，感受数学的魅力，提升综合素养。

基金项目

江苏省高等学校自然科学研究项目(24KJB110025)。

参考文献

- [1] 同济大学数学科学学院. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [2] 易强. 高校数学教学中培养学生创新能力的策略研究[J]. 科教导刊, 2024(18): 139-141.
- [3] 耿敬荣. 在高等数学教学中提高学生逻辑思维能力的实证研究[J]. 成才, 2024(13): 96-98.
- [4] 李继良. 重视例题教学, 培养思维能力[J]. 河南科技, 2016(6): 53-54.
- [5] 王春丽, 何向东. “以人为本”与逻辑思维素质培养——“钱学森之问”引发的思考[J]. 西南大学学报(社会科学版), 2010(6): 46-50.